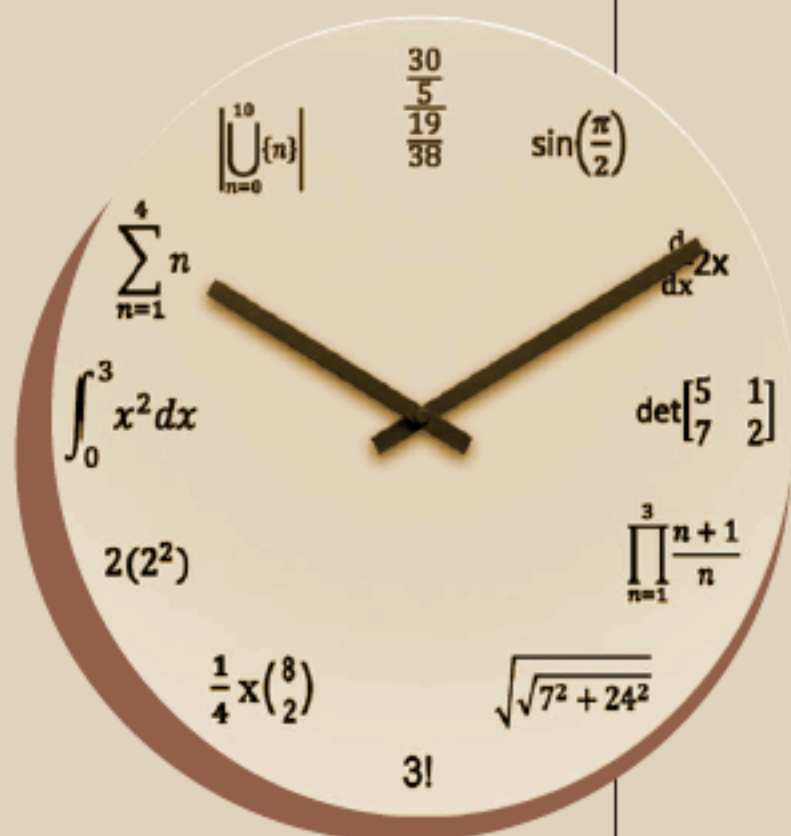


ENSEÑAR A ENSEÑAR MATEMÁTICAS

UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

MARICELA SOTO

LUIS MANUEL AGUAYO



taberna libreria editores

SOBRE LOS AUTORES

LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN. Maestro en Educación y doctor en Educación con especialidad en Educación Matemática por la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), ha sido profesor de educación primaria, de educación media superior (Matemáticas) y de educación normal. Actualmente es profesor de la Maestría en Educación Básica en la Unidad Zacatecas de la UPN y coordinador del Doctorado en Desarrollo Educativo en el Capítulo Noreste de la misma UPN. Contacto: l_aguo@yahoo.com.mx

MARICELA SOTO QUIÑONES. Licenciada en Educación Primaria por la Benemérita Escuela Normal «Manuel Ávila Camacho» (BENMAC), maestra en Ciencias de la Educación por la Universidad Autónoma de Zacatecas y doctora en Desarrollo Educativo por la Universidad Pedagógica Nacional, ha sido profesora de educación primaria y normal. Actualmente es catedrática y coordinadora del Departamento de Investigación en la BENMAC. Contacto: soquima@gmail.com

ENSEÑAR A ENSEÑAR MATEMÁTICAS
UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN
PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Primera edición 2020

*Enseñar a enseñar matemáticas
Un recorrido de estudio e investigación
para la formación de profesores*

DERECHOS RESERVADOS

© Maricela Soto

© Luis Manuel Aguayo

© Taberna Librería Editores

Plaza Tacuba local 4,

Calle Tacuba 182, Centro,

98000, Zacatecas, Zacatecas

tabernalibreriaeditores@gmail.com

Edición: Friné González H.

Corrección de estilo: Sara Margarita Esparza R.

Diseño de portada: Juan José Macías

ISBN: 978-607-8731-13-8

Queda rigurosamente prohibida, sin autorización de las titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por la ley, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento.

Impreso y hecho en México

Enseñar a enseñar Matemáticas

UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN
PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

MARICELA SOTO
LUIS MANUEL AGUAYO

MMXX



INDICE

INTRODUCCIÓN	9
I. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y FORMACIÓN DE PROFESORES	17
II. LA PROPORCIONALIDAD DE LA ORGANIZACIÓN CLÁSICA A LA ORGANIZACIÓN FUNCIONAL	63
III. PROPORCIONALIDAD, INSTITUCIÓN Y TEXTO DEL SABER	95
IV. VIVIR UN REI. LAS PRAXEOLOGÍAS DE LOS «APRENDICES» DE MATEMÁTICAS	125
V. ANALIZAR UN REI. LAS PRAXEOLOGÍAS DEL «PROFESOR ANALISTA»	179
VI. DISEÑAR UN REI. LAS PRAXEOLOGÍAS DEL «PROFESOR INGENIERO»	217
VII. GESTIONAR UN REI. LAS PRAXEOLOGÍAS DEL «PROFESOR EN ACTO»	237
ApUNTES PARA UN CIERRE PROVISIONAL	295
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	305
SOBRE LOS AUTORES	317

INTRODUCCIÓN

Actualmente, la formación de profesores es un objeto emergente en la investigación educativa, de manera particular la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas ha sido un objeto de estudio recurrente en los últimos años. Diferentes perspectivas teóricas destacan la necesidad de otorgar una formación adecuada a los profesores, en especial aluden al alcance y los efectos de los saberes del profesor respecto de la calidad de los aprendizajes de los estudiantes; por esta razón, no son pocos los estudios de alcance nacional e internacional sobre el bajo rendimiento escolar en matemáticas que han ligado dicho aprovechamiento con la formación del profesorado.

En el caso de México, la formación de profesores en las escuelas normales ha experimentado una serie de recurrentes reformas; en nuestros días, como ya es costumbre, se ubica en un proceso de reforma con la idea de brindar una mejor preparación académica a los estudiantes.¹ En las propuestas implementadas en 2012 se asume que los estudiantes requieren del conocimiento disciplinar, el manejo adecuado de los planes de estudio de la educación básica y la comprensión de los enfoques de enseñanza que les permitan generar ambientes de aprendizaje mediante la creación o adaptación de estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación.

En el caso específico de la formación para la enseñanza de las matemáticas, los cursos incluidos en el Plan de Estudios 2012 de la Licenciatura en Educación Primaria para las escuelas normales de México fueron: *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza*, *Álgebra: su aprendizaje y enseñanza*, *Geometría: su aprendizaje y enseñanza* y *Procesamiento de Información Estadística*. Estos cursos se corresponden con los ejes planteados para la Educación Primaria: *Sentido numérico y pensamiento algebraico*; *Forma, espacio y medida* y *Manejo de la información*. A partir de esta organización curricular se pretende consolidar el dominio de lo disciplinar y lo pedagógico.

1. En el momento que concluíamos este texto, en México se esperaban los nuevos planes y programas de estudio para las escuelas normales, específicamente los que darían contenido a la llamada «Nueva Escuela Mexicana».

En lo que corresponde a la asignatura *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza*, (contexto en el que se realizó la presente investigación), el Programa de estudios establece el logro de competencias como: distinguir las características tanto teóricas como metodológicas para la enseñanza de la aritmética; identificar los principales obstáculos que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética en la escuela primaria y; relacionar los saberes aritméticos formales con los contenidos del eje sentido numérico y pensamiento algebraico de este nivel educativo (SEP, 2012a).

Por otra parte, como se asume que la proporcionalidad constituye la transición entre sentido numérico y pensamiento algebraico y entre escuela primaria y secundaria, seleccionamos el concepto de proporcionalidad como objeto matemático para esta investigación. Es importante señalar que en su trayecto formativo los estudiantes normalistas requieren diseñar, aplicar y evaluar situaciones didácticas para la escuela primaria lo que les demanda una cierta comprensión tanto matemática como didáctica de la proporcionalidad.

La investigación se centró en la formulación, la caracterización y el análisis de prácticas de formación ligadas al tratamiento de la proporcionalidad, específicamente en la formación inicial de profesores para la escuela primaria en México, la pregunta de la que se partió tiene que ver con analizar ¿qué efectos sobre la formación de los estudiantes tienen ciertas tareas matemáticas y didácticas especialmente diseñadas para tal propósito?

Si bien el actual enfoque curricular al parecer antepone la formación pedagógica a la didáctica, la pregunta planteada se verá contextualizada desde la perspectiva didáctica cuyo principio fundamental asume que no es posible desligar un contenido matemático (la proporcionalidad) del estudio de lo didáctico.

PUNTUALIZACIONES SOBRE EL CAMPO DE ESTUDIO

Recientemente, la mayoría de los estudios sobre formación inicial de profesores en México se ha centrado en la reflexión de identidades, en el hacer docente, en el análisis del capital cultural, la construcción de un sujeto social en la formación inicial de profesores, el desarrollo de competencias docentes y en el uso de tecnologías como herramientas para la formación (Minor, 2013; Hernández, 2013; Rodríguez, Piña y Soto, 2013; Celis, Pérez y Torres, 2013). Aunque también aparecen otros estudios, menos numerosos, que

analizan las reformas en las Escuelas Normales y sus retos en términos de formación, actualización y capacitación (Atriano, Benítez y Ramírez, 2013 y Martínez, Perea y Piña, 2013).

En lo tocante al campo de la Educación Matemática, los estudios sobre la proporcionalidad y la formación de profesores se han realizado en otros países, principalmente en España y Francia. La proporcionalidad ha sido objeto de numerosas investigaciones sobre las dificultades, los procedimientos y las estrategias de resolución que utilizan los alumnos de educación básica al trabajar con el concepto de proporcionalidad (Vergnaud, Riccò y Rouchier, 1979; Pluvinaud y Dupuis, 1981 y Sokona, 1989 en Ruiz, 2007). Sin embargo, los trabajos que abordan la problemática del profesor o aspirante a profesor son escasos (Pezzard, 1985; Thompson y Thompson, 1996; Klemer y Peled, 1998; Comin, 2002 y Lo, 2004 en Ruiz, 2007).

En una etapa más reciente se pueden encontrar estudios relacionados con la formación de profesores de Matemáticas desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), este periodo se caracteriza por un cierto alejamiento de las prácticas áulicas para centrarse en el enfoque antropológico que fue inaugurado por Chevallard (1999) y que se había manifestado ya en las primeras teorizaciones asociadas a la Transposición Didáctica (Chevallard, 1998a).

Desde esta perspectiva, Bosch (1994) muestra que las técnicas y los objetos no ostensivos se tornan sensibles a los complejos de ostensivos manipulados y con ello se pone en evidencia la necesidad de integrar el papel que tienen los instrumentos ostensivos en la creación y desarrollo de técnicas matemáticas. Por su parte, Bolea, Bosch y Gascón (2001) proponen un modelo de Álgebra Elemental como un instrumento para la actividad matemática al culminar con la modelización algebraica y, señalan que el uso de este instrumento (el Álgebra) modifica la naturaleza de las Organizaciones Matemático-Didácticas. Esta reconstrucción les permite identificar las restricciones que afectan al proceso de algebrización en las matemáticas escolares. Otros estudios de Bosch (1994) y García (2005) señalan que la escasa comprensión de la proporcionalidad por parte de los estudiantes se debe a la homogeneidad de las propuestas clásicas para su enseñanza que centran el estudio en ámbitos numéricos separados de las relaciones funcionales donde la proporcionalidad puede fungir como herramienta para la solución de situaciones problemáticas, y por el otro, a que los elementos

praxeológicos respecto a la proporcionalidad directa, inversa y compuesta son estudiados de modo aislado y con un bajo nivel de algebrización.

El avance de la TAD ha permitido el diseño de dispositivos de enseñanza denominados *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI), un estudio donde se pone a prueba un REI para la proporcionalidad es el de García (2005), el cual se centra en la proporcionalidad y las relaciones funcionales que se proponen en la Educación Secundaria Obligatoria en España.

El diseño de dispositivos para la formación de profesores es todavía una línea de investigación incipiente, sin embargo, en el marco de la TAD se ha experimentado que los REI pueden ser un dispositivo efectivo para la formación, contexto en el cual se les nombra *Recorridos de Estudio e Investigación para la formación de profesores* (REI-FP).

PUNTUALIZACIONES SOBRE LA PERSPECTIVA TEÓRICA

La noción fundamental de la TAD es la de organización praxeológica o simplemente praxeología. En esta perspectiva, cualquier actividad humana puede representarse mediante un modelo único que puede resumirse en la palabra praxeología (Chevallard, 1999). Una praxeología u organización praxeológica se modeliza mediante un esquema de cuatro componentes, los dos primeros se corresponden con el nivel de lo práctico, los otros dos con el nivel del logos, del saber. Los cuatro componentes de una praxeología son: a) la tarea a resolver; b) la técnica que resuelve la tarea; c) la tecnología o el discurso que explica y justifica la técnica y; d) la teoría o el discurso que justifica a la tecnología. En el caso de la actividad del profesor siempre estarían articuladas praxeologías matemáticas (OM) y praxeologías didácticas (OD).

Ahora bien, si se habla de una organización matemática (OM) y una organización didáctica (OD), se podría decir que en la primera se incluyen tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías ligadas al objeto matemático, por su parte en la OD se consideran esos mismos elementos praxeológicos referidos al estudio de la praxeología matemática.

En lo que toca a la formación de profesores la cuestión fundamental es identificar las praxeologías o el «equipamiento praxeológico» que requiere un profesor (ODFM) para desarrollar una enseñanza adecuada o para ayudar a otro sujeto a estudiar el objeto matemático. Respecto de las praxeologías didácticas que requiere el profesor, Ruiz y García (2007) señalan que deben permitir la construc-

ción de los saberes para poder reconstruirlos en el medio escolar, razón por la que requieren funcionar desde la institución formadora de docentes, es decir:

Una ODFM puede ser deconstruida en términos de tareas problemáticas de formación (T_{FM}), para las que se diseñan técnicas didácticas de formación (τ_{FM}), justificadas por tecnologías y teorías didácticas de formación (θ_{FM} y Θ_{FM}). Así, a través de los correspondientes procesos de estudio, los maestros en formación construyen tanto saberes matemáticos (praxeologías matemáticas: $[T_m, \tau_m, \theta_m, \Theta_m]$) como posibles formas de organizar su estudio en el medio escolar (praxeologías didácticas: $[T_d, \tau_d, \theta_d, \Theta_d]$). (p. 197)

Se puede decir entonces que los estudiantes normalistas viven dos procesos de formación: la reconstrucción de las praxeologías asociadas a la proporcionalidad y la construcción de saberes didácticos. En términos curriculares, la asociación de estos dos procesos resulta imprescindible si de formar para la enseñanza se trata, esta situación hace necesario entonces el diseño y la experimentación de un REI-FP que permita conjuntar ambos procesos:

FM_{M-d}: Formación MATEMÁTICO-didáctica: genera procesos de estudio que permiten la construcción de praxeologías matemáticas OMEP.

FM_{m-D}: Formación matemático-DIDÁCTICA: desarrolla una actividad de estudio que conduce a la generación de todo un dominio de praxeologías didácticas ODEP que permiten la «reconstrucción» de estos saberes matemáticos en la escuela primaria (Ruiz y García, 2007, p. 199-200).

Como se puede observar, los procesos enunciados se correlacionan. Para que un estudiante normalista se desempeñe eficientemente en las aulas de la escuela primaria, no basta el dominio conceptual de la proporcionalidad o el diseño de estrategias didácticas, en la formación ambos procesos se apoyan y fortalecen a partir de las praxeologías que los cohesionan. Esta situación se hace presente desde su formación en las escuelas normales con el estudio de nociones matemáticas y su enseñanza en la escuela primaria donde se enfrentan al planteamiento de situaciones que le dan sentido al saber matemático.

El estudio de las praxeologías matemáticas ha sido integrado por Chevallard en los REI que pueden funcionar como dispositivo didáctico para romper la

atomización de las matemáticas que se enseñan en las instituciones. La función articuladora de los REI deriva de su capacidad para permitir que la modelización matemática viva en los actuales sistemas de enseñanza (Barquero, Bosch y Gascón, 2007a, 2007b, en Bosch y Gascón, 2007). En el caso de la formación de profesores y considerando las necesidades de los profesores, Ruiz (2015) propone el diseño de los REI-FP, articulados con los REI para organizar las praxeologías matemáticas por enseñar.

Bajo esta mirada nos propusimos identificar las praxeologías de formación que se construyen en las escuelas normales a partir de la experimentación de un REI-FP respecto a la proporcionalidad.

Desde esta perspectiva la investigación se enfocó en el diseño, la implementación y la evaluación de secuencias de enseñanza teóricamente fundamentadas como REI-FP asociadas al campo de la proporcionalidad en la formación inicial de profesores con el propósito de provocar la aparición de determinados fenómenos didácticos, como el desarrollo de tareas de variación proporcional directa, indirecta y compuesta.

El estudio se llevó a cabo con un grupo de ocho estudiantes de octavo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Normal Manuel Ávila Camacho, en la ciudad de Zacatecas. Todos tenían como tema de titulación algún aspecto ligado a las matemáticas y previamente habían cursado ya las asignaturas correspondientes a esta área, su aprendizaje y su enseñanza. Analizamos la actividad de los profesores en formación en dos contextos, en un primer momento en la escuela normal como estudiantes de matemáticas y en la escuela primaria como profesores «en acto». En el primer momento analizamos la actividad de los ocho profesores en formación, pero, en un segundo momento revisamos la actividad sólo de dos de los ocho profesores en formación, de aquellos que realizaban sus prácticas profesionales en un grupo de sexto grado donde se aborda formalmente la proporcionalidad.

La experimentación del REI-FP se desarrolló a lo largo de seis meses con sesiones grupales e individuales de tres horas por semana, durante este tiempo los profesores en formación se encontraban cumpliendo con una jornada intensiva de práctica en la que sólo asistían a la Escuela Normal un día por semana, la distribución del tiempo de la experimentación del REI-FP se vio determinada por las características propias de cada uno de sus módulos.

El Módulo uno. M_1 : «*Vivir un REI*», se centró en la perspectiva de la

organización clásica de la proporcionalidad como Modelo Epistemológico de Referencia. Los sujetos se colocaron en posición del «aprendiz de matemáticas» al, resolver, cuestionar y validar la construcción y relaciones de la proporcionalidad con otras nociones a partir de ciertas tareas planteadas. La intención era que el alumno se enfrentara a una tarea matemática en la que utilizara técnicas que paulatinamente transitaran de la organización clásica a la organización funcional. Se planteó un REI denominado «El Petróleo»,² en el que tuvieron necesidad de la modelización matemática, se analizó la resolución de la tarea, la formulación de la técnica y la validación de la misma en un proceso colectivo.

En el Módulo dos. M_2 : «*Analizar el REI*», el análisis se centró en las características del REI trabajado en el módulo uno y se focalizó en las dimensiones matemáticas y didácticas. En el Módulo tres. M_3 : «*Diseñar un REI*», se abordó el diseño y/o adaptación de un REI para los alumnos de sexto grado de la escuela primaria, los profesores en formación se enfrentaron a varias tareas didácticas, la primera consistió en buscar materiales para diseñar un plan de clase, en la segunda tarea revisaron el Modelo Didáctico de Referencia (la Teoría de las Situaciones Didácticas) y, una vez realizado el análisis de manera individual, adaptaron el REI para desarrollarlo en la escuela primaria. Finalmente, durante el Módulo cuatro. M_4 : «*Gestionar y experimentar un REI*» dos profesores en formación experimentaron con grupos de sexto grado el REI diseñado. Los resultados de las acciones metodológicas descritas dan contenido al presente documento que se desglosa a lo largo de siete capítulos.

En el primer capítulo se describe el sustento teórico con el cual se fundamenta el estudio, las nociones propias de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, especialmente se reflexiona sobre el significado de las organizaciones praxeológicas y la orientación que la vincula con la formación de profesores.

El segundo capítulo hace un recorrido por la organización clásica de la proporcionalidad, desde una perspectiva aritmética hasta el análisis de la modelización funcional, lo que permite observar la evolución praxeológica de dicha noción a partir de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER).

El tercer capítulo muestra el «análisis ecológico» de la institución, es decir se revisa la manera en la que se incluye la proporcionalidad en los programas de

2. El REI está basado en una propuesta de trabajo de la Dra. Darly Alina Kú Euán. Docente de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

estudio de la Escuela Normal y las posibles restricciones para su aplicación en la escuela primaria.

En el cuarto capítulo se analiza lo que pasó durante el primer módulo del REI-FP, se muestran las técnicas empleadas por los profesores en formación en la solución de diversos tipos de tareas relacionadas con la proporcionalidad. El quinto capítulo integra el análisis sobre la experiencia de vivir un REI y las percepciones acerca de su enseñanza. En el sexto capítulo se muestra cómo estructuran un REI matemático para un grupo de sexto grado de la escuela primaria y los tipos de tareas didácticas que ponen en juego para dirigir el proceso de estudio de la proporcionalidad. En el séptimo capítulo se analiza la experimentación que realizaron los profesores en formación, especialmente los momentos didácticos desarrollados y las dificultades más relevantes para gestionarlos. Por último, el apartado de las conclusiones incluye algunos argumentos que intentan responder a las preguntas y objetivos de investigación planteados.

I. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y FORMACIÓN DE PROFESORES

Dada la compleja relación entre didáctica y formación de profesores, se requiere reconstruir las nociones producidas en el campo de la didáctica para comprender dicha relación. Una primera acción en este sentido es la caracterización de ese objeto-campo¹ de estudio llamado didáctica de las matemáticas. Para comprender la naturaleza de la didáctica de las matemáticas es necesario separar este término de los significados que tradicionalmente se le han asignado. Como lo señala Artigue (1995), la mayoría de las acepciones con las que se asocia a la didáctica aluden a métodos de enseñanza, técnicas, pedagogías o simplemente al arte de enseñar. A diferencia de estas acepciones, actualmente se piensa a la «didáctica de las matemáticas» como un campo de estudio que en Francia inicia su desarrollo en los años 60's² y como todo campo de estudio, resulta difícil acotarlo en una definición, sin embargo en lo que sigue hemos de entender que la didáctica de las matemáticas es:

La ciencia que se interesa por la producción y la comunicación de conocimientos matemáticos [...] estudia la forma en que los conocimientos son creados, comunicados y empleados para la satisfacción de las necesidades de los hombres que viven en sociedad, y más particularmente:

Por una parte, de las operaciones esenciales de la difusión de conocimientos, las condiciones de su existencia y su difusión y las transformaciones que esa difusión produce, también sobre los conocimientos que son utilizados y por otra, las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar esas operaciones (Brousseau en Portugais, 1995, p. 28).

1. Lo designamos como objeto-campo en la medida que es en esencia un campo de estudio, pero al mismo tiempo es parte del objeto del estudio que aquí se analiza.

2. En esta tradición didáctica se inscribe nuestro trabajo. La decisión de asumir como referente a la didáctica francesa de las matemáticas no es arbitraria, puesto que su influencia es evidente en las propuestas dedicadas a la escuela primaria y a la formación de profesores en México.

En correspondencia con esta definición, se han producido nociones en dos vertientes: sobre la enseñanza y el aprendizaje que explican los fenómenos inherentes a la transmisión del saber matemático y nociones surgidas de la experimentación de dispositivos (ingenierías de ciertos conceptos matemáticos particulares) que buscan el mejoramiento del sistema de enseñanza.³ Las primeras han sido utilizadas para analizar los procesos de producción, difusión y transmisión del conocimiento matemático, las segundas son un conjunto de ingenierías que intentan articular a la investigación con la enseñanza. Sin embargo, a pesar de los saberes producidos en la didáctica de las matemáticas, la relación entre saber didáctico y formación de profesores es todavía un objeto de estudio que precisa de varias preguntas y respuestas. Por ejemplo, la manera en que el saber didáctico debe incluirse en la formación de profesores es una cuestión sin una respuesta clara, sobre el respecto existen varias posturas cuyos principios básicos se analizan en los apartados siguientes.

1.1. ¿TRANSPOSICIÓN DE LOS SABERES DIDÁCTICOS?

El problema de la relación entre didáctica y transposición⁴ ha sido subrayada por múltiples autores, por ejemplo, Brousseau (2000) señala que la profesionalización del profesor ha dependido de numerosos conocimientos venidos de diferentes campos del conocimiento, lo que ha generado, señala, una saturación de conocimientos de referencia que terminan por desalentar a los educadores que buscan referentes científicos para su práctica. Ante esta situación, el profesor que busca mejorar la enseñanza necesita articular los diversos conocimientos de referencia, tarea que no es fácil si se piensa en las diferentes posturas epistemológicas desde las cuales se construyeron.

Frente a este problema, Brousseau afirma que la didáctica proporciona a los profesores una ciencia integradora que permite la construcción de una cultura común basada en las reflexiones sobre la experiencia adquirida y sobre los resultados en la investigación científica, pero no obstante las ventajas, en opinión de Brousseau (2000), el problema persiste porque no existe una transposición

3. Sobre este respecto Chevallard (1994, p. 313) señala que «los didactas de las matemáticas, han elaborado, tratándose de la clase, de lo que se realiza (análisis didáctico), y de lo que se podría realizar (ingeniería didáctica), un cuerpo de conocimientos sólido, fundado sobre un pequeño número de conceptos bien distribuidos».

4. La Transposición Didáctica alude al proceso donde todo saber sufre una serie de deformaciones que lo convierten de un saber sabio (surgido de la investigación), en un saber a enseñar, esto es, en un conocimiento apto para ser enseñado (Chevallard, 1994).

didáctica⁵ para el saber didáctico porque se tiene que «transponer» un alto volumen de saberes didácticos dispersos y fragmentados y además, señala, los saberes didácticos crecen más rápido que el tiempo que dura la formación y más de prisa que la jerarquización y síntesis que de ellos se puede realizar.

Sin esta transposición, la comprensión y utilización de los resultados de la investigación precisa de conocimientos sobre un gran número de temas y sólo un número reducido de maestros los poseen. Transmitir esos saberes didácticos en los procesos de formación inicial es una tarea que enfrenta múltiples dificultades, por esta razón Brousseau (2000) plantea como alternativa la promoción de una «didáctica para principiante» que garantice un comportamiento profesional mínimo, pero que a la vez contenga elementos teóricos que preparen a los maestros para la utilización más refinada de los saberes más avanzados de la didáctica.⁶

1.1.1. Las dificultades de la transposición

A pesar de que la inclusión del saber didáctico ha sido planteada en términos de la transposición, existen posturas que niegan esta posibilidad, por ejemplo Kuzniak (1994) asume que no es posible considerar la transmisión de los saberes ligados a la enseñanza de las matemáticas como un caso particular de la transposición didáctica, en su opinión, la dificultad se manifiesta cuando se pregunta sobre la existencia de un «verdadero» saber profesional de los profesores, para él, existen dos respuestas a esta cuestión que permiten dudar sobre la pertinencia de «transponer» el saber didáctico. La primera corresponde al nivel de la noosfera educativa y se distingue por negar la existencia de dicho saber puesto que en este ámbito se asume que el dominio del saber matemático basta para desarrollar una buena enseñanza. La segunda acepta la existencia del saber profesional de los profesores, pero considera que es un objeto con esencia propia que no se puede reducir a las leyes de la didáctica de las matemáticas.⁷

5. Con estos términos Brousseau alude a la ausencia de investigaciones sobre el papel del saber didáctico en la formación, ya que una transposición didáctica pertinente para estos saberes tendría que constituirse con diversos análisis, uno de ellos se relacionaría con las condiciones en que este saber puede «vivir» en las aulas.

6. Cabe aclarar que en la perspectiva de Brousseau, éste es apenas uno de los problemas de la relación entre didáctica y formación. Una discusión más amplia sobre esta problemática es abordada por este autor en *La Teoría de las Situaciones Didácticas* (Brousseau, 1998; cap. 6)

7. En coherencia con la segunda respuesta, Contreras y Carrillo (2000; 1-2) señalan que «aprender a enseñar matemáticas no es una consecuencia inmediata del estudio del conocimiento propio de la Didáctica de las Matemáticas...», en su perspectiva, al conocimiento sobre la didáctica habría que

Por otra parte, señala Kuzniak (1994), si se quisiera ver esta transmisión como un caso más de la transposición didáctica, debería pensarse en un formador que bajo la lógica de la transposición intenta definir lo que hace falta retener del saber sabio (generado en el seno de las diversas escuelas de didáctica) y reflexionar sobre la forma de transponerlo, acción que requiere dos condiciones necesarias pero inexistentes: que la didáctica toma en cuenta todo eso que constituye al acto de enseñanza y que su desarrollo sea suficiente para permitir un trabajo de transposición rico e indiscutible. Para Kuzniak (1994), éstas son condiciones inexistentes porque olvidan dos elementos consustanciales al acto de enseñar: los saberes «pedagógicos» sobre la práctica y los conocimientos empíricos sobre la enseñanza que han construido los formadores sin considerar los aportes de la didáctica.⁸

Una postura similar a la de Kuzniak es la de Tanguy (1995) quien postula la imposibilidad de una transposición didáctica para los saberes profesionales, en opinión de Tanguy la imposibilidad deriva de la inexistencia de un saber profesional «sabio» y la ausencia de una transcripción de ese saber en el seno de una institución con fines de transmisión. Aunque Tanguy acepta la existencia de un saber «sabio» en las matemáticas, indica que los saberes profesionales no tienen un estatus de legitimidad, es decir, no están considerados como saberes escolares.

En este mismo sentido, Tanguy (1995) considera que no se puede establecer una relación directa entre los saberes matemáticos y profesionales porque se omite la especificidad de los saberes profesionales y su irreductibilidad a saberes científicos o técnicos. Para esta autora, los saberes profesionales no se reducen a una simple aplicación de saberes técnicos, dado que configuran un corpus más o menos coherente apegado a eso que llamamos disciplina, mientras que los procesos de formación no tienen determinados claramente los saberes «a enseñar» porque los diferentes agentes que intervienen en su selección y organización no comparten puntos de vista para organizar la transformación de saberes profesionales en objetos de enseñanza. Además, señala, la enseñanza profesional olvida algunos eslabones propios de la transposición, por ejemplo, no hay un estado «sabio» del saber profesional, tampoco manuales que objetiven la estandarización de dicho saber o asociaciones que favorezcan su difusión.

añadir uno más con su especificidad propia, que ellos distinguen como un conocimiento de carácter profesional.

8. Esta posición es compartida por Huraux-Masselot (2000), quien considera que los problemas de la formación en didáctica no pueden ser abordados desde un punto de vista estrictamente didáctico.

Las perspectivas de Tanguy y Kuzniak sirven como punto de partida para discutir las condiciones necesarias de una posible transposición didáctica del saber didáctico y a la formación de profesores como un objeto de estudio de la didáctica. Desde las posturas de Tanguy y Kuzniak existen tres cuestiones que impiden asumir esta relación: la inexistencia y legitimidad de un saber didáctico «sabio», la especificidad e irreductibilidad de dichos saberes y, la ausencia de eslabones necesarios para la cadena transpositiva. Para discutir la existencia de tales condiciones, en lo que sigue se analizará la postura de Chevallard sobre la formación de profesores, ésta cobra un especial interés porque es Chevallard quien incluyó la noción de transposición didáctica y es también un formador de profesores.

1.1.2. La formación, un objeto de la teoría antropológica de lo didáctico

A decir de Chevallard (2001), las escuelas para alumnos y para profesores son escuelas «normales» porque crean y difunden normas, es decir, modos de pensar y de actuar. En el primer caso, son normas para la vida (entre ellas normas matemáticas), en el segundo son normas para la enseñanza. Empero, las normas no son simplemente prácticas ni sólo un «saber hacer», lo que difunden estas escuelas son praxeologías u organizaciones praxeológicas porque en esas prácticas se incluye lo que comúnmente se conoce como «saber» (Chevallard, 2001).

Para ilustrar la relación entre «saber» y «saber hacer» dentro de una praxeología, Chevallard utiliza el sistema $[T / \tau / \theta / \Theta]$, los dos primeros símbolos aluden al bloque técnico-práctico o al «saber hacer» que se compone de un cierto tipo de tareas (T) y una técnica (τ) que permite resolver ese tipo de tareas. Los dos últimos representan al bloque tecnológico-teórico o al «saber», éste se compone de los discursos tecnológicos (θ) que justifican las técnicas utilizadas y los discursos teóricos (Θ) que dan sentido a las tareas planteadas. Siguiendo la idea de Chevallard, puede decirse que las escuelas para alumnos crean y difunden praxeologías matemáticas (entre otras) mientras que las escuelas para profesores difunden praxeologías didácticas.⁹

Ahora bien, cuando la sociedad debe elegir las praxeologías que deben difundirse en unas y otras escuelas recurre a instituciones especializadas política

9. Para designar a las praxeologías matemáticas, Chevallard utiliza los términos praxeología, organización praxeológica matemática, organización matemática o las siglas OM, lo mismo hace para designar a las praxeologías didácticas.

o científicamente. La didáctica es una de las instituciones a las que se recurre cuando se trata de praxeologías didácticas relacionadas con una praxeología matemática. Por esta razón, señala Chevallard, el buen funcionamiento de esta configuración institucional debe estar a cargo de «la didáctica», tanto en el terreno del desarrollo como el de la investigación, en otros términos, la didáctica debe enfrentarse con los problemas de la formación de los alumnos y de los profesores.¹⁰

En síntesis, la didáctica debe estudiar los problemas didácticos específicos del campo de las praxeologías matemáticas (OM) o del de las praxeologías didácticas (OD) porque los dos tipos de praxeología están siempre ligados, es decir existe un «isomorfismo» didáctico-matemático, una determinación recíproca entre las praxeologías matemáticas y las didácticas, en otras palabras, una praxeología didáctica no puede elaborarse o difundirse si no se toman en cuenta las restricciones que le impone cierta praxeología matemática.

Por otra parte, este proceso transpositivo determina una «ecología» que condiciona lo que podrá producirse en la clase, condiciona la posibilidad de crear, de ciertas maneras, ciertas respuestas a ciertas cuestiones y dicha «ecología» depende también de alumnos y profesores, dado que la construcción de una jerarquía adecuada debe tomar en cuenta lo que los alumnos pueden recibir y lo que los profesores pueden aceptar hacer en un entorno social dado.

Para Chevallard, la formación de profesores es un desarrollo «local» que forma parte del desarrollo global de una praxeología y como su referente es una praxeología matemática, está determinado por el «isomorfismo» matemático-didáctico, por esta razón la formación de profesores no puede estudiarse sin tomar en cuenta la OM de referencia dado que reducir la praxeología del profesor a un componente pedagógico, significa olvidar los niveles de codeterminación dado que:

Un principio fundador de las didácticas, al menos en el sentido Brousseauiano de la palabra, es que no sólo lo transmitido depende de la herramienta con la que se pretende conseguir su transmisión, sino al revés que las organizaciones «transmisoras», es decir, didácticas, se configuran de una manera estrechamente vinculada a la

10. Esta idea es compartida por Portugais (1995, pp. 9-12), para él, los contenidos didácticos también están sujetos a fenómenos didácticos, por esta razón los estudia desde una perspectiva llamada «Didactificación de la didáctica» cuyo postulado fundamental tiene que ver con pensar que los fenómenos de la formación de profesores pueden y deben ser objetos de estudio de la didáctica.

estructura dada a lo que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas, las OD, dependen fuertemente de las organizaciones por enseñar las OM, si se trata de organizaciones matemáticas (Chevallard, 2001, p. 3).

En síntesis, la formación de profesores en tanto desarrollo praxeológico «local» es un objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas que, según sea el nivel de jerarquía, tendrá diferentes determinaciones, también es un objeto susceptible de analizarse mediante la noción de transposición didáctica dado que el estudio o desarrollo de una organización praxeológica didáctica no puede considerarse como un conjunto de saberes con esencias distintas, cuando se designa a un saber, señala Chevallard (2001), se designa a toda una organización praxeológica y aun cuando los elementos de dicha organización sean de distinta naturaleza, constituyen aquello que se designa como «saber».

En cuanto a la legitimidad del saber didáctico y la existencia de los eslabones necesarios para la cadena transpositiva, es necesario remitirse al postulado fundamental de la teoría antropológica de lo didáctico, en él se dice que:

toda acción procede de una praxeología admitiendo que esta praxeología pueda estar en curso de elaboración, o también que su construcción se haya detenido –puede estar definitivamente, a la escala de una vida humana o institucional–, congelada en un estado de incompletud o en un estado de desigual desarrollo, con, por ejemplo, una técnica apenas esbozada, una tecnología incierta, una teoría inexistente (...) si toda acción regularmente cumplida resulta de la puesta en obra de una cierta praxeología $[T / \tau / \theta / \Theta]$, y si es necesario reconocer en esta praxeología la presencia de un «saber» $[\theta / \Theta]$, entonces, se debe concluir que toda acción procede de un saber... (Chevallard, 1997a, pp.6-7).

Como se puede observar, la perspectiva antropológica no admite la existencia de acciones totalmente empíricas, «la «simple práctica» – que no es jamás, como se ha sugerido, simple práctica– no permite aprender todo eso que sería útil» Chevallard (1997a, p. 13), aún los gestos más humildes¹¹ son acciones que derivan de los saberes incluidos en una praxeología, sin importar que apenas esté en

11. En estos casos, Chevallard utiliza el término «gesto» en su sentido más amplio, no como un movimiento corporal o facial sino como acción que se orienta hacia el cumplimiento o hacia la «gestión» de una tarea.

curso de elaboración o en estado de incompletud. En este sentido, las acciones de formación derivan de las organizaciones praxeológicas que se encuentran en desarrollo en el seno de la didáctica de las matemáticas.

De manera que aún «si no es posible caracterizar los saberes de una manera intrínseca entre las praxeologías, es posible siempre precisar algunos de los rasgos que se acuerdan para su reconocimiento» (Chevallard, 1997a, p. 7). Entre esos rasgos, está el hecho de que el bloque tecnológico teórico debe aparecer como poseedor de una generatividad que permita estructurar técnicas, justificaciones y explicaciones relativas a un conjunto amplio y diverso de tareas y no como una creación oportunista que justifica tal o cual bloque práctico técnico.

Además, debe considerarse la existencia de una «dignidad epistemológica», esto es, del reconocimiento social y cultural, aunque sea incierto, de que determinada praxeología tiene posibilidades de explicar y desarrollar un dominio específico de la realidad. En este caso, existe la posibilidad de que las praxeologías estudiadas en la didáctica de las matemáticas expliquen la formación de profesores, de ahí que se considere la existencia de un saber que se ha generado en el interior de la didáctica de las matemáticas¹² con cierto status de legitimidad o con cierta «dignidad epistemológica». Si se acepta la «dignidad epistemológica», puede aceptarse a la didáctica de las matemáticas como una institución con fines de transmisión, que intenta construir una transposición del saber didáctico y puede aceptarse también que ese saber ha sido objetivado en los manuales que sobre la formación de profesores se han generado en las diferentes instancias de esta institución. Esta última consideración marca la existencia de los eslabones necesarios para la transposición del saber didáctico: un saber con cierta «dignidad epistemológica», una institución con fines de transposición y un saber objetivado a través de un conjunto de operaciones.¹³

Sin embargo, para esclarecer la trayectoria de dicha transposición, es necesario analizar las formas que toma dicho saber o los tipos de tareas que le son consustanciales, en otras palabras, es necesario analizar los componentes, los diferentes saberes y los tipos de tareas que, en opinión de la institución didáctica,

12. La «dignidad epistemológica» se refiere al estatus de legitimidad que social y culturalmente se le reconoce a una praxeología que explora y da cuenta de un dominio específico de la realidad. Los saberes didácticos serían un ejemplo de una praxeología que busca desde tiempo atrás el reconocimiento de su «dignidad epistemológica».

13. Los numerosos documentos producidos al interior de los Institutos Universitarios de Formación de Maestros (IUFM) en los que se plantean diversas actividades para la formación constituirían la objetivación del saber didáctico –de referencia– para la transposición.

constituirían ese saber más general que podríamos llamar «saber didáctico» u organización praxeológica didáctica de los profesores. En los siguientes apartados se intentará realizar tal análisis, no sin antes aclarar que al contrario de lo que piensa Tanguy (1995), toda selección de saberes implica una cierta discusión, precisamente las diferentes posturas que se analizarán son un ejemplo de tal discusión, lo que parece ser una condición natural del ámbito noosférico. Específicamente, analizaremos las llamadas por Bosch y Gascón (2002), «aproximación cognitiva» y «aproximación epistemológica» para tratar de identificar los saberes, conocimientos o praxeologías¹⁴ que deben caracterizar a un profesor.

1.2. PERSPECTIVAS SOBRE LA RELACIÓN ENTRE DIDÁCTICA Y FORMACIÓN DE PROFESORES

La formación de profesores es un problema que puede abordarse desde dos ópticas no siempre complementarias. La primera centrada en el perfil del profesor se plantea las cuestiones: «¿Qué conocimientos son necesarios (o por lo menos útiles) para que los profesores puedan enseñar matemáticas de forma efectiva? y ¿qué se puede hacer para ayudar a los profesores a que construyan o adquieran estos conocimientos?» (Bosch y Gascón, 2009, p. 91).

La segunda se centra en cuestiones como: ¿Cuál es el equipamiento praxeológico necesario (o por lo menos útil) para que los profesores puedan enseñar matemáticas de manera efectiva? y ¿qué se puede hacer para ayudar a que los profesores dispongan de él? Esta postura, derivada de la TAD, estudia la problemática de la formación reflexionando sobre la manera cómo evolucionan las tareas y técnicas que el profesor puede llevar a cabo para la enseñanza y explora también los discursos teóricos que emplean los profesores para dar explicación a las praxis que se ponen en juego en una actividad matemática.

1.2.1. *Los conocimientos y el pensamiento del profesor. La «aproximación cognitiva»*

El nacimiento del programa cognitivo se vio influido por los trabajos de Bauersfeld y Skowronek (1976) quienes explicitaron la necesidad de construir una teoría del aprendizaje matemático en lugar de basarse en una teoría del aprendizaje general, se caracteriza por establecer un modelo cognitivo del sujeto con-

14. La distinción entre saber y conocimiento no es un asunto resuelto, como se puede ver en Carrillo (et al, 1998), la discusión sobre la distinción entre ambos términos es una polémica viva y si añadimos a esta dupla la noción de praxeología el asunto se torna más complejo, por esta razón en este capítulo hemos decidido respetar el uso de los términos que hacen los autores aludidos en cada caso.

siderando al aprendizaje como un proceso psicocognitivo. Sus primeros análisis giraban en torno a la noción de aprendizaje significativo y a la heurística positiva,¹⁵ además proponían el estudio empírico de los errores de los alumnos. De forma posterior, este enfoque evoluciona y formula un aprendizaje específicamente matemático, con ello se modificó su núcleo y su heurística (García, 2005). Este programa presupone que todo fenómeno asociado a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas deriva de los fenómenos cognitivos, por lo que su objeto de investigación se circunscribió a la actividad cognitiva de los sujetos, inicialmente con los alumnos y posteriormente con los profesores.

A partir de estos principios el programa cognitivo desarrolla varios estudios sobre las concepciones de los alumnos, de los profesores y las prácticas de enseñanza, priorizando siempre la explicación del aprendizaje con relación al comportamiento del alumno en clase (Bosch y Gascón, 2002). En términos de la formación de profesores, hay dos características esenciales que se postulan en este modelo:

- a) Se toma como problemática didáctica una ampliación bastante limitada de la problemática espontánea del profesor. Esto significa que recoge, reformula, amplía y sintetiza las cuestiones que constituyen inicialmente la problemática docente del profesor, que acostumbran a estar muy condicionadas por las ideas dominantes en la cultura escolar.
- b) Presenta el saber didáctico como un saber técnico, en el sentido de aplicación de otros saberes fundamentales importantes de otras disciplinas. Esto comporta considerar la didáctica de las matemáticas como una disciplina más normativa que explicativa (Gascón, 1998, pp. 3-4).

Al seguir esta idea se puede decir que los conocimientos del profesor de Matemáticas están asociados directamente con lo que sabe y piensa y, además, las modificaciones de sus prácticas se encuentran relacionadas con sus concepciones sobre la matemática. En correspondencia con estos principios, se consideraron inicialmente los fenómenos cognitivos para luego relacionarlos con las prácticas de enseñanza y posteriormente llevarlos a la especificidad del aprendizaje.

15. La heurística positiva indica las líneas de investigación, lo que se puede (y se debe) hacer. Es un conjunto parcialmente articulado de sugerencias o motivaciones sobre cómo cambiar y desarrollar las «variantes refutables» (Lorenzano, 2010).

Otra opinión sobre las fases del desarrollo de la «aproximación cognitiva» es la de Gómez (2001), quien señala que la investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas ha pasado por tres fases. En la primera, llamada de la «enseñanza eficiente», se buscaba identificar las características de los buenos profesores con base en las concepciones de los alumnos. En una segunda fase se trataron de validar los resultados sobre el aprendizaje por lo que la investigación se orientó hacia el estudio de la enseñanza, para ello se adaptó una estrategia paralela aunque con ciertas variantes, es decir, se siguió privilegiando el estudio de las concepciones pero se estudiaron las concepciones de los profesores acerca de ciertas nociones matemáticas y la relación de éstas con los modelos que desplegaban en la enseñanza de las matemáticas, en la tercera fase, «del pensamiento del profesor», se incorporó el estudio de la enseñanza como una variable más para explicar los conocimientos adquiridos por los alumnos.

Ahora bien, si el interés de estos estudios es eminentemente cognitivo, una pregunta crucial es ¿cómo integran a la matemática en su modelo de investigación? A decir de Bosch y Gascón (2002) una forma muy esquemática de explicarlo sería la siguiente: de inicio se toman los fenómenos esencialmente cognitivos en el sentido que lo hacen Fennema y Franke (1992) y Thompson, (1992). Enseguida se trata de relacionar esta estructura con las prácticas de enseñanza, lo que añade una dimensión social o pedagógica a los fenómenos cognitivos y finalmente, aparece la necesidad de considerar la especificidad del aprendizaje, lo que aporta una dimensión matemática a esos fenómenos. De esta manera «lo cognitivo» se amplía con la integración de «lo matemático». En esta vía de integración, una línea de investigación fue la de Shulman (1986), quien al tratar de responder a la pregunta ¿cuál conocimiento es esencial para el profesor?, introduce la noción de conocimiento de contenido pedagógico.

1.2.2. Tipos y componentes del conocimiento del profesor

Carrillo, Coriat y Oliveira (1998)¹⁶ analizan el conocimiento de los profesores

16. La filiación entre estas posturas y «la aproximación cognitiva», es asumida por los mismos autores cuando señalan «mencionaremos lo que tienen en común los maestros (...): la actitud hacia su propio trabajo profesional (conocimiento concreto, significados personales, creencias matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, imágenes mentales, preferencias, y mucho más). Colocaremos todo esto dentro de la expresión de Thompson (1992): las concepciones de los maestros» (Carrillo, et al, 1998, p. 3). Sin embargo, señalan estos autores, esta elección puede estar sujeta a divergencias por parte de los investigadores.

tomando como referente los tipos y componentes del conocimiento. En opinión de estos autores, una de las primeras aproximaciones a los tipos de conocimientos es la de Shulman (1986), quien considera tres tipos de conocimiento: proposicional (de carácter teórico o declarativo), de caso (cuando se conoce una situación en particular) y estratégico (relacionado con las estrategias que pueden desarrollarse en un caso o situación particular). Desde la perspectiva de los conocimientos de Shulman, Borko y Livingston (Carrillo, et al, 1998) caracterizan la interacción entre tipos y componentes del conocimiento del profesor y definen al enseñante experto mediante la conjunción de cuatro habilidades cognitivas: razonamiento pedagógico, conocimiento del contenido pedagógico, esquema y ejecución improvisada.

Para ellos, el razonamiento pedagógico es el proceso de transformar la materia de conocimiento en formas pedagógicas adaptadas a los antecedentes del estudiante; el conocimiento del contenido pedagógico –a la manera de Shulman– es la mezcla de contenidos y pedagogía en una forma comprensible; el esquema es un conocimiento abstracto que reúne información de muchos casos particulares y de su relación con ellos; y la ejecución improvisada es la acción que se desarrolla bajo un guion pero que incluye acciones que «el actor» improvisa durante la enseñanza.

En esta primera aproximación, Carrillo, Coriat y Oliveira (1998) destacan las tipologías de Simon (1994), quien sostiene que la formación de los maestros debe incluir el conocimiento de (sustantivo) y sobre (sintáctico) las matemáticas;¹⁷ la de Farnham-Diggory (1994), quien describe tres modelos que buscan transformar el conocimiento «novato» en «experto» en los que se permite la adquisición de cinco tipos de conocimiento: declarativo, procesual, conceptual, analógico y lógico; y la de Elstgeest, Goffre y Harlen (1993, en Aguayo, 2005), quienes distinguen cinco nociones unidas al conocimiento del profesor¹⁸: conocimiento social (el conocimiento en general), físico (de la experiencia directa),

17. La clasificación de Simon, se basa en la definición que Ball había realizado desde 1988, en la cual se define al conocimiento de las matemáticas como conceptual y procedimental y al conocimiento sobre las matemáticas como la comprensión sobre la naturaleza de la disciplina. El conocimiento conceptual señala Ball, es una especie de tejido o red de conocimientos interconectados mientras que el conocimiento procesual, de acuerdo con Hiebert y Lefevre (en Simon 1993, p. 234) «consiste en el lenguaje formal o sistema de representación simbólica de las matemáticas y los algoritmos o reglas para completar ciertas tareas...» Desde esta perspectiva, el conocimiento de las matemáticas incluye lo que significa saber y hacer matemáticas.

18. Aunque cabe mencionar que, en la óptica de estos autores, dichas nociones no son tipos ni niveles.

lógico (relaciones entre conceptos), técnico (precede a las habilidades y destrezas) y profesional (que permite emprender nuevas situaciones y dar autonomía). En esta misma línea, Fennema y Franke (1992) identifican cuatro componentes del conocimiento del profesor: sobre el contenido, sobre el aprendizaje, sobre la manera de representar un concepto matemático y el pedagógico.

En una segunda aproximación, mencionan Carrillo, Coriat y Oliveira (1998) Wilson, Shulman y Rither (1987) proporcionan un modelo teórico que sintetiza las posturas presentadas, en éste se establecen tres componentes del conocimiento del profesor:

- *La materia del conocimiento.* El qué y el porqué de los contenidos.
- *El conocimiento del contenido pedagógico:* Se incluyen elementos que caracterizan el estilo del maestro como el conocimiento de la materia, las creencias, el conocimiento pedagógico general y el conocimiento acerca de las metas y los objetivos educativos.¹⁹
- *El conocimiento curricular.* Se incluye el conocimiento acerca de los materiales alternativos para la enseñanza de una noción específica, acerca de otras materias relacionadas con matemáticas y el conocimiento curricular acerca de las matemáticas en cursos anteriores.

En opinión de Carrillo (et al, 1998), las preocupaciones acerca de los diferentes tipos de conocimientos que debe adquirir un futuro profesor pueden reflejarse en los tres componentes del modelo anterior, con excepción de una serie de preocupaciones que se expresan sobre el conocimiento de él mismo, esto es, además de los conocimientos incluidos en el modelo, consideran que los maestros también deben adquirir un conocimiento sobre ellos mismos, sobre sus propias habilidades para hacer matemáticas y sobre la confianza en sus propias habilidades.

No obstante la síntesis, analizar la formación de profesores desde esta perspectiva implica una doble problemática, por un lado existe el problema del cómo, esto es, en tanto que, los tipos de conocimiento no son pocos y los componentes de cada tipo son aún más numerosos, existe una pregunta que no se ha respondido, si de formar a un futuro profesor se trata, ¿cómo se ha de transmitir

19. Al tomar como referencia el modelo anterior, Bromme (1988, en Carrillo et al, 1998, p. 19), establece los siguientes elementos para caracterizar el conocimiento del contenido pedagógico: conocimiento matemático, curricular, del aula, acerca de lo que aprenden los estudiantes, metaconocimiento (matemáticas y creencias) acerca de la educación matemática (teórico y práctico) y pedagógico (de carácter general).

o «transponer» cada uno de esos tipos y componentes del conocimiento del profesor?²⁰ Por otra parte, aun considerando que los tipos y los componentes están en una relación de conjunción, no se esclarece la manera en que se articulan, señalar la experiencia como elemento integrador, como lo hacen estos autores, es trivial por obvio y asumir la conversión del futuro profesor en un «solucionador de problemas en muchas direcciones» (Carrillo, *et al*, 1998, p. 37), es otra respuesta tan general que termina por no decir nada. Sin embargo, es comprensible que un texto de síntesis como el que elaboran estos autores, presente huecos sobre la manera de formar o de la manera en que deberían integrarse los diferentes tipos y componentes del conocimiento del profesor.

1.3. SABERES O PRAXEOLOGÍAS. «LA APROXIMACIÓN EPISTEMOLÓGICA»

A decir de Bosch y Gascón (2002) la diferencia fundamental entre «la aproximación cognitiva» y «la epistemológica», radica en que esta última tuvo como primer objeto de estudio no al alumno ni al maestro, sino al saber, a la actividad matemática, su construcción, su desarrollo y su difusión. Al tomar este objeto de estudio se asumía que,

los conocimientos del alumno, sus actividades de aprendizaje, la práctica docente del profesor, los procesos cognitivos que acompañan esas actividades y sus prácticas, e incluso los procesos de enseñanza-aprendizaje en toda su complejidad, deben ser considerados como objetos de estudio «secundarios» (lo que no significa que sean menos importantes), y contruïdos a partir de la noción primitiva de actividad matemática... (Bosch y Gascón, 2002, p. 6).

El programa epistemológico se integra en una problemática más compleja, la necesidad de problematizar las situaciones que son la «razón de ser» de los conocimientos matemáticos con finalidades didácticas, es decir, el análisis de las prácticas matemáticas institucionales. En este caso la formación del profesor juega un papel determinante, pues lejos de analizar los saberes que debe poseer para desarrollar una buena práctica, se consideran las praxis que pone en juego ante un saber determinado. Esta situación:

20. Aunque, en las conclusiones de este evento se dice que dichos componentes del conocimiento deberán adquirirse mediante la investigación acción, el aprendizaje situado y las narrativas, el carácter general de esta propuesta termina por ser una respuesta ambigua.

- Supone una nueva forma de estudiar los fenómenos didácticos a partir de la modelización del conocimiento matemático enseñado.
- Toma la actividad matemática en sí misma como objeto primario de investigación.
- Su núcleo está constituido por un modelo general de la actividad matemática (y los correspondientes modelos epistemológicos específicos de los diferentes «ámbitos» de la actividad matemática escolar).
- Su heurística positiva está caracterizada por la emergencia de fenómenos didácticos-matemáticos no reducibles a fenómenos psicológicos, sociológicos y lingüísticos.
- El modelo didáctico considerado y, en particular, lo que se entiende por enseñar y aprender matemáticas, se formula a partir de estos términos primitivos del modelo epistemológico de la actividad matemática (Gascón 2003, en García, 2005, p. 45).

Por esta razón, en sus inicios, algunas teorías incluidas en «la aproximación epistemológica»²¹ no estudiaron –al menos explícitamente– el comportamiento del alumno o el del profesor. Sin embargo, una vez que la enseñanza se comenzó a estudiar –aunque de manera tardía–, la brecha entre «la aproximación epistemológica» y la «cognitiva» se profundizó, dado que uno de los primeros aportes de la teoría antropológica de lo didáctico (la noción de transposición didáctica) puso en evidencia la imposibilidad de interpretar adecuadamente los fenómenos didácticos, sin tomar en cuenta las diferentes formas de manipulación social de un saber (matemático), por esta razón, desde «la aproximación epistemológica», el estudio de la actividad matemática escolar se integra en una problemática mucho más amplia, en el análisis de las prácticas matemáticas institucionales.

En este sentido, el saber se constituye como eje rector de esta aproximación pues considera que, bajo una forma u otra, el modelo epistemológico de las matemáticas incluye un modelo de la construcción, la evolución y la difusión de esta actividad y en particular, incluye un modelo de su enseñanza para las instituciones escolares. Este postulado «consiste en considerar que lo didáctico, entendido como eso que es relativo a la enseñanza y el aprendizaje escolar de las

21. En opinión de estos autores, la Teoría de las Situaciones Didácticas, la de los Campos Conceptuales, la de la Dialéctica herramienta-objeto y la Antropológica de lo Didáctico pueden tomarse como «teorías epistemológicas» en tanto que proponen modelos (definiciones, descripciones, etc.) de la actividad matemática o de los conocimientos que se construyen cuando se hace matemáticas.

matemáticas, integra lo matemático y debe ser cuestionado y modelado a partir de ello» (Bosch y Gascón, 1998, p. 9, en Aguayo, 2005) y permite considerar que las formas de transmisión y difusión escolar de las matemáticas son un objeto que debe estudiarse y modelarse con el fin de abordar los problemas relativos al problema del profesor de matemáticas²², pero el abordaje de los problemas del profesor, lo matemático (la difusión) y lo didáctico (la transmisión) deben ser objetos que se estudien de manera conjunta.

No obstante este postulado, dentro de esta aproximación existen varias formas de pensar la relación entre lo didáctico y la formación; una que analiza la articulación entre lo matemático, lo pedagógico y lo didáctico, otra desde la que se asume a la Teoría de las Situaciones Didácticas como referente principal y una más basada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico que articula lo matemático y lo didáctico (en la formación) a través de la noción de praxeología. En lo que sigue se analizarán las ideas principales de unas y otras con el objetivo de construir algunos referentes que permitan razonar los procesos de formación de los sujetos de este estudio.

1.3.1. La formación, entre la pedagogía y la didáctica.

Primeras aproximaciones «epistemológicas»

De acuerdo con Butlen y Peltier, una de las primeras aproximaciones a la formación de profesores puede caracterizarse como una postura que «... no comparte del todo el análisis que consiste en unir matemática y didáctica de las matemáticas en la formación de maestros de escuela» (1994, p. 6). Dicha aproximación está representada por los trabajos de Kuzniak (1994), Houdement (1995) y Peltier (1995), los que, a pesar de perseguir objetivos distintos,²³ toman un punto de partida común, la existencia de tres saberes para la formación profesional de los enseñantes.

- El saber teórico
- El saber práctico
- El saber en uso o pedagógico

22. Este problema no es otro que el de enseñar Matemáticas o el de reconstruir las praxeologías matemáticas en el aula.

23. Mientras Kuzniak (1994) explora las estrategias de formación que utilizan los formadores de profesores, Houdement (1995) intenta construir lo que ella denomina un proyecto global de formación y Peltier (1995) analiza la evolución de las tareas planteadas en los exámenes de reclutamiento de los Institutos Universitarios de Formación de Maestros (IUFM).

A decir de Kuzniak (1994, p. 3), el objetivo de la enseñanza en los centros de formación es transmitir un conjunto de saberes y competencias en dos fases: la primera se relaciona con la teorización de la transmisión de contenidos matemáticos a los alumnos (la didáctica de las matemáticas) y la segunda incluye todos los conocimientos útiles al enseñante.²⁴ De ahí que en su opinión, una pregunta central sea ¿cuáles son los conocimientos mínimos que deben incluirse en la formación? Para este autor, un futuro profesor debe conocer lo que aprenden los niños, cómo lo aprenden y cómo hacer para que aprenda un niño. No obstante, esta respuesta genera más interrogantes: ¿cuál es la naturaleza de los conocimientos sobre la práctica de enseñanza de las matemáticas que deben poseer los profesores en formación?, ¿puede decirse que ese es en efecto «un saber profesional»?

Por su parte, Houdement (1995, p. 11) señala que «una enseñanza destinada a los adultos, en vista de enriquecer sus saberes profesionales comporta saberes de diferentes naturalezas que administran la acción profesional y la acción profesional los estructura». Al seguir el análisis de los saberes ligados a la formación de adultos de Malglaive,²⁵ en una primera clasificación Houdement (1995) distingue dos tipos de saberes: unos del lado de la teoría y otros del lado de la práctica. En su opinión, la teoría busca precisar todos los elementos de la racionalidad y de la conceptualización, permiten conocer al objeto y sus modalidades de transformación y aunque no están ligados operatoriamente con la práctica, permiten ajustar las intervenciones sobre la realidad, prever sus efectos y fijar las condiciones y los límites de la validez. El efecto de un saber teórico, menciona Houdement es «hacer conocer» y no el de «hacer-hacer», no dice lo que se debe hacer, pero conduce a hacerlo con discernimiento.

En un análisis más fino, Houdement caracteriza a los saberes que deberían ser parte de la práctica profesional según las relaciones que éstos tienen con la práctica, dicha caracterización incluye los siguientes saberes:

- Los saberes teóricos que permiten conocer al objeto y aunque no están en relación directa con la práctica permiten ajustar las intervenciones sobre la realidad. Son el fundamento de los saberes que regulan la acción (los saberes procedimentales).

24. Esta posición es compartida por Houdement (1995, p. 11), para quien, los futuros formados deben adquirir, conocimientos sobre la matemática y sobre la transmisión de un saber matemático a los niños.

25. La autora se refiere aquí a la obra de Malglaive (1990, en Aguayo, 2005) Enseigner á des adultes. Ed. PUF, París.

- Los saberes procedimentales están del lado de la práctica y suponen un conocimiento de la realidad sobre la que opera la acción, representan los enlaces de operaciones, las reglas y las condiciones que deben respetarse para obtener los efectos deseados en la práctica, se organizan en procedimientos o planes de acción, son abstraídos de la acción y aparecen de forma escrita en los manuales.
- Los saberes prácticos son complementarios a los procedimentales, están directamente ligados a la acción y apuntan hacia la eficacia. Por ello no se encuentran en textos.
- Los «saber-hacer» están constituidos por hábitos o rutinas y pueden resumirse en el «oficio» de un experto profesional.
- El saber en uso. Los saberes anteriores se alimentan unos a otros y son elementos del saber en uso, que está ligado a la maestría en un oficio o del experto profesional.

En opinión de Houdement, la noción de saber en uso puede importarse al campo de la formación de enseñantes, donde puede nutrirse de los saberes disciplinarios (matemáticos), didácticos y pedagógicos. En su perspectiva, didáctica y pedagogía no se oponen, se complementan, por ejemplo la didáctica permite ciertas especializaciones disciplinarias porque se relaciona con los saberes mientras que la pedagogía guarda un carácter más general, esto es:

Como existe una didáctica, campo de la estructuración, de la organización, de la gestión de los contenidos, sería también bueno crear una pedagogía, corpus de saberes pedagógicos, de conocimientos profesionales surgidos de investigaciones en ciencias de la educación sobre la gestión de flujos interactivos de información, de la relación interactiva, de las condiciones de aprendizaje, de la situación pedagógica puesta en obra por el enseñante en clase. Se trataría de desarrollar unos saberes de la práctica (Altet, 1994, en Houdement, 1995, p. 15).²⁶

Houdement ubica a los saberes prácticos y pedagógicos como procedimentales. Esos saberes señala, se enriquecen con la experiencia adquirida en el ejercicio del oficio y algunos son explicitables e incluso generalizables mientras que los sabe-

26. La obra a la que se hace referencia en esta cita es M. Altet (1994) *La formation professionnelle des enseignants*. Collection Pédagogie d'aujourd'hui, Editions PUF, París.

res matemáticos son una parte de los saberes teóricos.²⁷ Finalmente, menciona Houdement, los saberes didácticos son más bien procedimentales porque requieren del conocimiento de la realidad y se fundan sobre el conocimiento de ella.

Desde una postura similar, Kuzniak (1994) afirma que los conocimientos que deben adquirir los profesores en formación son los teóricos (matemáticos y didácticos), los marcados por el saber-hacer y un tercero que sólo la experiencia puede dar (el pedagógico). En su opinión, los dos primeros son saberes teóricos reconocidos de manera institucional y la diferencia fundamental entre el didáctico y el pedagógico es que el sello distintivo del saber didáctico es su esfuerzo por la teorización mientras que el saber pedagógico es la reunión compleja y a veces contradictoria de un saber procedimental (abstraído de la observación de una práctica y objetivado en los manuales) y un saber proposicional o declarativo.

El saber pedagógico se caracteriza por oscilar entre un polo teórico y otro cercano a la práctica y al sentido común, pero privado de la adaptabilidad de un modelo teórico. En el contexto de la formación de profesores los saberes proposicionales serían los ejemplos de actividades de clase, es decir, de ingenierías prestas a ser efectuadas, los saberes procedimentales serían las sugerencias sobre la enseñanza que aparecen en los manuales escolares (Kuzniak; 1994, p. 13). Una postura similar a la de Kuzniak es la de Peltier (1995) quien, citando a Altet (1994, en Houdement, 1995) señala que junto a los saberes prácticos o de la experiencia, deben elaborarse ciertos saberes teóricos sobre:

- La disciplina.
- La cultura enseñante y el sistema educativo.
- Los saberes didácticos surgidos de la investigación en los diferentes campos didácticos.
- Los saberes pedagógicos sobre gestión interactiva en clase, surgidos de investigaciones sobre los diferentes parámetros del proceso enseñanza-aprendizaje.

En un intento por sintetizar las posturas anteriores, puede decirse con Houdement y Kuzniak (1996) que existen «... tres niveles de saber, ligados a las matemáticas y

27. Sin embargo considera que las matemáticas del profesor deben estar «más arriba» que los contenidos de los programas de la escuela elemental y que debe considerarse también aquello que la investigación en didáctica ha esclarecido; como el lugar de ciertos conocimientos tradicionales.

que remiten a diferentes aspectos del oficio de profesor: el saber matemático, el saber didáctico y eso que llamaremos provisionalmente «el tercer saber»» (p. 296).²⁸

No obstante esta clasificación, existen saberes cuya pertenencia al saber pedagógico resulta discutible, por ejemplo el diseño y la experimentación de ingenierías es un trabajo que se realiza al interior de la didáctica de las matemáticas, algo similar ocurre con el proceso interactivo que permite gestionar las condiciones de aprendizaje, esto es, si hablamos del aprendizaje (y de la enseñanza) de un saber matemático y si consideramos que al interior de la didáctica de las matemáticas existen por lo menos tres corpus teóricos desde los que se ha explicado la gestión de este proceso,²⁹ es discutible la idea de ubicarlos fuera de los saberes didácticos. Lo mismo puede decirse del estudio de los errores (en tareas matemáticas) o de la estructuración de escenas de clase para la enseñanza de las matemáticas.³⁰

Si bien hasta aquí se han caracterizado los saberes para la formación, una segunda tarea consiste en identificar las formas en las que se pueden «transmitir». Un aporte valioso en este sentido es la tipología de estrategias de formación. Para Kuzniak (1994) existen dos grupos de estrategias mediante las cuales los formadores intentan transmitir los saberes de formación. Las estrategias profesionales que conciben a la formación como una preparación profesional para el oficio de profesor entre las que se incluyen:

- Las basadas en el mostrar. Mediante la observación, ponen en contacto al estudiante con su futuro medio de trabajo, mostrándoles la práctica que deberán imitar, es la forma más natural y antigua de iniciación a las prácticas profesionales; y la lección modelo, su ejemplo más claro.
- Las basadas en la homología. Se fundan sobre un modelo de imitación, pero más complejo, se caracterizan por el hecho de que los formadores enseñan de la misma forma que desean el estudiante lo haga.

28. El «tercer saber» no es otro que el saber pedagógico.

29. En este caso nos referimos al proceso interactivo basado en la distinción de diferentes situaciones (o dialécticas) didácticas de la TSD, al proceso para dirigir el estudio que desde la TAD propone seis diferentes momentos y a la dialéctica herramienta-objeto propuesta por Duoady.

30. Sobre este respecto, Brousseau (1994a, pp. 56-57) señala que una función social de la didáctica de las matemáticas es la formación y que la enseñanza de la didáctica de las matemáticas a los profesores debe ayudar a adquirir conocimientos matemáticos particulares, presentaciones específicas de las matemáticas que deben enseñar y conocimientos de las condiciones didácticas para esas enseñanzas. De manera que, para Brousseau, estos dos últimos tipos de conocimientos son más bien didácticos y no pedagógicos.

- Las basadas en la transposición. Se oponen a las precedentes porque ponen el acento en el saber didáctico como saber de referencia, en este caso los formadores reflexionan sobre las nociones didácticas que deben transponer.

Las estrategias no profesionales entre las que se pueden enunciar:

- Las culturales. Se caracterizan por dar prioridad a la transmisión de un saber matemático sin referencia pedagógica alguna.³¹
- Las de investigación aplicativa. Apuntan hacia la formación para la investigación.
- Las basadas sobre la autonomía. Brindan total autonomía al estudiante para que busque el conocimiento por diferentes vías.³²

1.3.2. Aproximación basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas

El ejemplo más ilustrativo de este tipo de aproximación³³ es la obra de Portugais (1995), quien basa su estudio en ciertas analogías entre el sistema didáctico (M-A-S) y el sistema de formación. Portugais considera un sistema de formación constituido por el formado, el formador y el saber didáctico como un caso particular del sistema didáctico, en su opinión, el sistema de formación está sujeto a los mismos fenómenos, regularidades y funcionamientos que la teoría didáctica ha encontrado en el sistema didáctico dado que «...el sistema didáctico *stricto sensu* (maestro/alumno/saber) no difiere fundamentalmente de un sistema de formación teniendo entre otras finalidades la enseñanza de la didáctica de las matemáticas» (Portugais, 1995, p. 64).

Bajo esta consideración, asume que la didáctica debe tomar a su cargo lo

31. Para Houdement (1995), las estrategias culturales también pueden considerarse profesionales puesto que en ocasiones permiten transmitir algunos saberes pedagógicos ligados a la enseñanza de contenidos matemáticos, esto sucede, señala, cuando durante el despliegue de esta estrategia los formadores se dedican a dar consejos «pedagógicos» sobre la enseñanza de los contenidos matemáticos.

32. En la óptica de Houdement y Kuzniak (1996), las estrategias de investigación aplicativa y las basadas en la autonomía son marginales en la formación de profesores.

33. En la perspectiva de Houdement y Kuzniak (1996), el trabajo de Portugais se distingue por su polarización sobre la triplete didáctica de formación, también señalan otras aproximaciones que se polarizan sobre algún tipo de saber, por ejemplo las tesis de Pezard (1985) y Neyret (1995) se polarizan sobre el saber matemático, aunque existen otras que se polarizan sobre algunos componentes del «tercer saber», sin embargo, en su opinión, éstas últimas se han realizado (al igual que en México) desde perspectivas psicológicas y sociológicas. Una excepción en esta última categoría sería la tesis de Huraux-Masselot (2000), quien analiza los efectos de una formación didáctica en las prácticas de los profesores en formación.

que concierne a su propia enseñanza, por esa razón, analiza las cuestiones relativas a la formación inicial en la didáctica de las matemáticas tomando como referente algunos conceptos que la teoría didáctica ha pensado para el sistema didáctico en el sentido estricto. La enseñanza a partir de problemas, de situaciones, de contratos, de transposiciones, de esquemas, etc., constituyen el entramado conceptual para su estudio. No obstante las similitudes supuestas entre los dos sistemas, lo relevante son algunos aspectos particulares del sistema de formación que este autor plantea respecto de los tipos de conocimientos.

A decir de Portugais (1995), el formado ocupa una doble posición en el sistema de formación, la de futuro profesor y la de alumno. Cuando ocupa el lugar del alumno, la relación con el formador está mediada por la intención de aprender a enseñar, pero cuando juega el rol de enseñante, la relación está mediada por su intención de enseñar matemáticas. El formado ocupa estas dos posiciones en un mismo tiempo, es por ello que se habla de la dualidad del profesor en formación.

Como señala Portugais (1995), esta dualidad tiene sus efectos en el proceso de formación, dado que lo que le dice o transmite el formador será reflexionado y representado por el formado a partir de su posición de *futuro enseñante*, pero sin poder sustraerse a su posición de *enseñado*. Eso implica que el análisis y desarrollo de cualquier proceso de formación debe tomar en cuenta los dos sistemas donde se ubica el formado, el sistema didáctico (stricto sensu) y el sistema de formación.³⁴

La aceptación de un doble sistema implica aceptar también que existen dos saberes distintos en la formación, Portugais señala que el saber que se pone en juego dentro del sistema de formación no es el saber matemático y que cuando se requiere especificar cierto saber didáctico sobre las matemáticas, se adquiere la obligación de especificar también un determinado saber matemático, dado que no se puede analizar, transmitir o aprender un saber didáctico sin referencia específica a saber matemático.

Para poner en marcha el sistema de formación, se debe incorporar un contenido matemático (saber 1)³⁵ y un saber didáctico (saber 2), sin embargo, la

34. Cuando Portugais menciona al sistema de formación, no se refiere al contexto global en el que se desarrolla la formación de profesores sino a las relaciones entre el formador y el formado que son mediadas por un determinado saber didáctico.

35. En su estudio, Portugais tiene por objetivo experimentar un dispositivo de formación, «el saber 1» son las operaciones aritméticas básicas con sus respectivos algoritmos. El «saber 2» son los errores de los alumnos de escuela elemental.

inclusión de estos saberes sólo toma en cuenta una de las posiciones del formado, la de alumno. Para tomar en cuenta la posición de *futuro profesor* que no es abarcada por los saberes 1 y 2, es necesario hablar de otro saber (de nivel 3) que alude a los conocimientos que el formado construye a partir de su experiencia, éstos son distintos a los saberes matemático y didáctico, son un saber de la experiencia que concierne al trabajo didáctico y que integra a los saberes matemático y didáctico en una situación de enseñanza.

Para Portugais (1995), aceptar la existencia de dos sistemas implica aceptar que existen dos contratos didácticos distintos; un contrato didáctico y un contrato de formación, se puede suponer que existe un contrato didáctico funcionando en el sistema didáctico *stricto sensu*, en el que el formado ocupa la posición de alumno y se puede suponer que existe un contrato de formación donde el formado ocupa la posición de eventual profesor.

1.3.3. Las praxeologías del profesor

Otra perspectiva desde la que se asume a la formación de profesores como objeto de la didáctica de las matemáticas está representada por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En el seno de ésta Chevallard (1994) asume que la «clase» ha sido el objeto de estudio privilegiado por la didáctica de las matemáticas pero que el conjunto de instituciones donde aparece una intención didáctica relativa a lo matemático debe ser también un objeto de estudio de esta disciplina, en su decir, la formación ha sido un objeto olvidado por los didactas, entre otras razones porque se ha pensado que la relación entre formado y matemáticas no es lo fundamental en la formación de profesores, sin embargo, afirma, cuando surge un sistema didáctico en la formación sus relaciones deben ser estudiadas para establecer leyes de funcionamiento o para crear sistemas didácticos nuevos. Bajo esta lógica puede admitirse que en las instituciones donde se forma a los profesores se instala un sistema didáctico susceptible de ser estudiado por la didáctica de las matemáticas. Aunque, como veremos enseguida, el «estudio» es una noción que, en la TAD, cobra un sentido particular.

El «estudio» como objeto de la didáctica

Si se considera que una institución es formadora por su intencionalidad didáctica, es necesario precisar que, desde la TAD, lo didáctico siempre remite al estudio, esto es, «lo didáctico se identifica con el simple hecho de que *alguien* (*x*)

estudie alguna cosa (o). En otros términos, lo didáctico es consustancial al estudio. Existe *lo didáctico* porque existe el estudio...» (Chevallard, 1997c, p. 19), un contrato didáctico por ejemplo, es un contrato relativo al estudio de un objeto que se realiza a través de diferentes tipos de situaciones didácticas, es por ello que puede considerarse a la didáctica como la ciencia del estudio del objeto.

Si al estudio del objeto (o) se añade un estudiante (x) que puede ser un alumno de cualquier nivel escolar o un investigador, se forma el sistema didáctico $S(x;o)$ en el que caben por lo menos dos posibilidades. Cuando X es un investigador por lo general su objeto de su estudio es una pregunta abierta en la comunidad «sabia» donde él se sitúa. Una segunda posibilidad es que X sea un alumno de cualquier nivel escolar, en este caso el objeto de estudio tiende a presentarse *a priori* como una «respuesta» previamente elaborada para una cierta tarea problemática (Chevallard, 1998b, p. 1). En este segundo caso puede aparecer otro elemento del sistema didáctico, el director de la investigación o el profesor (y). Con la inclusión de este elemento se forma un *sistema didáctico de ayuda*, $S(x; y;o)$ en el que Y, en tanto profesor de matemáticas, ayuda al alumno a estudiar el objeto.

En su función de *director de estudio*, un profesor podrá revelarse «adecuado», «eficaz» o puede parecer «disfuncional», no por sus características individuales, sino por la formación objetiva que ha recibido, esto significa que desde la TAD los profesores no son sujetos de estudio como personas, sino como representantes de las prácticas institucionales que desarrollan. Puede decirse entonces que «hay un proceso didáctico (relativo a las matemáticas) cada vez que alguien estudia matemáticas o cada vez que alguien ayuda a otro u otros a estudiar matemáticas» (Chevallard et al, 1998, p. 57, en Aguayo, 2005) y cuando surge un sistema didáctico en el que se incluye un sujeto, un profesor y un objeto matemático, el didacta puede y debe estudiarlo para establecer sus leyes de funcionamiento o para crear sistemas didácticos nuevos.

Sin embargo, es necesario aclarar que tanto en el caso de un alumno como en el de investigador, la palabra «estudio» se utiliza en un sentido muy amplio, engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje, es decir, aquí la enseñanza aparece como un medio, como una ayuda para el estudio de un determinado objeto matemático. En términos más generales, el «estudio» se refiere a todo lo que se hace en una institución para resolver las tareas matemáticas problemáticas que se plantean, sin importar que el estudio se desarrolle en el ámbito escolar

o en cualquier otra institución social, dado que como lo señala Bosch «... hay estudio en todas las instituciones de la sociedad cuando se manipula un saber establecido o en vías de establecerse». (*et al*, 2003, p. 84)

En el caso de los alumnos, el estudio alude a todas las acciones que hacen para cumplir con las tareas matemáticas que se les plantean, mientras que en el caso del investigador, es todo aquello que hace para aportar respuestas a las preguntas que se plantean en el campo científico donde se ubica. De la misma manera, un profesor en formación estudia un objeto didáctico cuando intenta establecer respuestas para ciertas tareas didácticas que se le plantean, mientras que el investigador en didáctica estudia dicho objeto cuando realiza acciones que le permitan responder a cuestiones didácticas para las que no hay una respuesta disponible. En otros términos, las investigaciones que se hacen en el seno de la didáctica son procesos de estudio que realizan los investigadores sobre un objeto didáctico y la formación de profesores es un proceso de ayuda al estudio de dicho objeto didáctico.

Por otra parte, en el caso de la enseñanza de las matemáticas el estudio aparece como una noción integradora que permite analizar bajo una misma mirada tanto el trabajo del profesor cuando enseña matemáticas como el del alumno cuando las aprende,³⁶ dado que por lo general en la escuela (aunque también en la investigación) el estudio casi siempre es una actividad colectiva que precisa la ayuda de uno o varios directores —el profesor— y de un programa de estudio. Si se acepta que la formación de profesores está sujeta también al proceso de estudio, el formador se convierte en un director dentro de un sistema en el que el objeto es el saber didáctico referido a las matemáticas, el formado por su parte tiende a estudiar las respuestas previamente elaboradas a la pregunta: ¿cómo enseñar matemáticas? Sin embargo y no obstante la relación entre el estudio y la formación, queda una pregunta crucial para responder: si en el caso del sistema didáctico la naturaleza del objeto es poco discutible puesto que se refiere al saber matemático, en el sistema de formación ¿cuál es la naturaleza del objeto a estudiar?

36. En esta perspectiva también se piensa que con la noción de «estudio» se produce un cambio fundamental en la visión sobre los roles del alumno y el profesor, puesto que no se considera al profesor sólo como el enseñante ni a los alumnos como meros sujetos de un proceso de aprendizaje. La actividad matemática, que adquiere una importancia relevante, ya no aparece como dependiente de la voluntad del profesor, sino que su desarrollo adquiere condicionantes independientes de los actores. (Chevallard et al, 1998, p. 202, en Aguayo, 2005, p. 64)

La formación, entre los saberes y las praxeologías

Como se ha mencionado en apartados anteriores, para Chevallard (2001), las escuelas para alumnos y para profesores tienen algo en común; son escuelas que crean y difunden normas para la vida (incluyendo las matemáticas) en el primer caso y normas didácticas en el segundo caso. Estas normas, se dice, toman la forma de praxeologías, de organizaciones praxeológicas o simplemente de organizaciones (matemáticas y didácticas según sea el caso). Tomar a las normas como praxeologías y no como saberes, tiene que ver con la idea asumida en la TAD de que no es posible decidir a priori lo que sería un saber, dado que el proceso de canonización de los saberes es desigual y prolongado en el tiempo, de ahí que desde un punto de vista antropológico, más que describir los saberes lo importante es describir las invariantes de las prácticas humanas (praxeologías) que se realizan en distintas instituciones, sin analizar las características individuales de los sujetos, esta idea reposa sobre un postulado fundamental de esta teoría:

toda acción humana procede de una praxeología, admitiendo que esta praxeología pueda estar en curso de elaboración, o también, que su construcción se haya detenido –puede estar a la escala de una vida humana o institucional, en un estado de incompletud o de desigual desarrollo.... (Chevallard, 1997, p. 6, en Aguayo, 2005, p. 65).

Dicho postulado subraya la relación entre las prácticas humanas (praxeologías) y el saber, dado que, si aún la más sencilla acción es cumplida, es porque se ha puesto en marcha una praxeología y si en ésta se reconoce aunque sea mínimamente la presencia de un saber, puede concluirse que toda acción procede de un saber, lo que nos lleva a concluir que los saberes, en tanto praxeologías, estarían siempre guiando y dando forma a todos los actos de los individuos. Ahora bien, para reconocer la presencia de un saber en una praxeología debe considerarse que en el origen de ésta, siempre se encuentra una o varias preguntas que son su razón de ser, esto es, toda organización praxeológica es la respuesta que se despliega frente a una pregunta que por lo general se expresa mediante formulaciones del tipo: ¿cómo hacer para...?

Al seguir el sentido de esta idea, puede decirse que cuando un profesor selecciona y realiza una actividad que le permita responder a la pregunta ¿cómo

hacer para enseñar un contenido matemático?, ha puesto en marcha una praxeología didáctica y cuando esta acción ha sido cumplida podemos presumir que el sujeto tiene un saber. En otras palabras, una «praxeología debe permitirnos cumplir cierta tarea t de un cierto tipo de tareas T , procurando una técnica τ ...» (Chevallard, 1997, p. 5, en Aguayo, 2005, p. 65). Por ejemplo, cuando un profesor en formación se pregunta ¿cómo identificar los saberes que tiene un alumno sobre las fracciones?, se ha planteado una razón de ser para una praxeología didáctica y lo que se observa en dicha pregunta es la necesidad de resolver una tarea específica (t) que pertenece a un cierto tipo de tareas T (identificar los saberes matemáticos de los alumnos) mediante una técnica apropiada τ , que puede ser por ejemplo una entrevista de tipo clínico o el análisis de las tareas que los alumnos han realizado.

Pero si para dar respuesta a esa tarea sólo se considera el tipo de tareas y la técnica, $[T/\tau]$, se obtiene un saber-hacer mediante el que se puede cumplir la tarea pero no justificar la técnica empleada ni interpretarla a la luz del problema que intenta resolver, en este caso el saber-hacer es una organización praxeológica incompleta dado que si hay una presunción de saber, debe aceptarse que toda técnica utilizada debe aparecer como resultado de una cierta tecnología, (θ), es decir, de un discurso razonado, de un conjunto de descripciones y explicaciones que se elaboran para hacer inteligibles y justificar las técnicas. Además, debe aparecer otro elemento, la teoría, que da sentido a los problemas planteados, que permite interpretar las técnicas y fundamentar, esclarecer y justificar el discurso tecnológico.

Con la unión de los cuatro elementos se forma una organización praxeológica que puede expresarse formalmente mediante el sistema $[T/\tau/\theta/\Theta]$ donde puede observarse un «bloque» práctico-técnico $[T/\tau]$ que responde a la presunción del saber-hacer y uno tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ que responde a la presunción del saber. Una organización praxeológica «completa» resulta entonces de la asociación de un «saber-hacer» y de un «saber», de la asociación de la praxis y el logos, lo que permite asumir, como lo hace Chevallard (1997, en Aguayo, 2005), que siempre que presumimos la presencia de un saber, se alude ordinariamente y por metonimia a una organización praxeológica «completa», a pesar de que comúnmente y por un reduccionismo cultural, cuando se habla del *saber*, se alude solamente al saber olvidando el *saber-hacer*.

Organizaciones matemáticas y organizaciones didácticas

Un principio básico de la TAD sostiene la dualidad del conocimiento matemático, esto es, el saber matemático se construye (o se estudia) para dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas,³⁷ pero también es el producto del proceso de estudio que forma parte de la actividad matemática, de manera que existe una estrecha relación entre la actividad matemática (proceso de estudio) y el saber matemático (producto). Por esta razón, desde la TAD se asume que las matemáticas son al mismo tiempo una actividad y un producto de dicha actividad, esto es, son objetos contruidos y actividades institucionales de manipulación de dichos objetos.

Así, cuando el trabajo del investigador ha concluido, el conocimiento matemático es un producto estructurado en un doble nivel: el de la *praxis* que incluye los diferentes *tipos de tareas* problemáticas y las técnicas que permiten resolverlas; y el del *logos* que incluye los argumentos (tecnologías) que justifican la validez de las técnicas sugeridas y los elementos teóricos que dan sentido a las tareas planteadas. Estos dos niveles forman lo que Chevallard (2000) llama *praxeología*, *organización praxeológica* o simplemente *organización matemática* (OM) y como se ha señalado, su diferencia respecto de la «simple» práctica estriba en que la *praxeología* integra al «saber hacer» (*praxis*) con el «saber» (*logos*), por esta razón, señala este autor, lo que comúnmente se designa como «saber matemático» no es otra cosa que una praxeología o una organización matemática.

Al considerar la noción de praxeología, podemos decir que, hacer matemáticas consiste en utilizar una praxeología matemática para resolver ciertas tareas y estudiar matemáticas consiste en construir (en el caso del matemático) o reconstruir (en el caso del alumno) ciertos elementos de una praxeología matemática que permitan dar respuesta a una tarea para la que no existe o no está disponible una praxeología. Empero, una organización matemática no surge de manera instantánea ni acabada de una vez y para siempre, es el resultado de un largo y complejo proceso en el que se incluyen dos aspectos del trabajo matemático; el proceso de estudio y la praxeología matemática. Ambos son inseparables porque una OM no puede existir sin un proceso de estudio que la genere, pero el proceso de estudio tampoco puede existir sin una OM en construcción y lo más importante de este proceso es que en su dinámica de funcionamiento,

37. Desde esta postura hacer matemáticas no siempre es resolver problemas, por ejemplo «se pueden usar matemáticas de manera rutinaria sin que aparezca problematicidad o estudio...» (Bosch et al, 2003, p. 84)

existen acciones que permanecen más allá de factores temporales, culturales, sociales, o individuales.

Estas acciones invariantes permiten construir un modelo del proceso de estudio que se basa en la noción de *momento didáctico*, no tiene una connotación cronológica, alude más bien a las dimensiones del proceso dado que dichos momentos no configuran una secuencia fija ni se desarrollan de manera aislada, cada uno puede ser planteado en distintas intensidades, tiempos, ocasiones o de manera simultánea. En la perspectiva de Chevallard (1999), existen seis momentos didácticos que modelizan todo proceso de estudio, a saber:

- *El momento del estudio.* Es el primer encuentro (o rencuentro) con la organización O que está en juego. Puede tener varias maneras, una consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas T_i , constitutivas de O .
- *El momento de la exploración* de tipos de tareas T_i y de la elaboración de una técnica τ_i relativa a este tipo de tareas.
- *El momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico* relativo a τ_i . Este momento está en relación estrecha con cada uno de los otros, por ejemplo desde el primer encuentro se establece una relación con este entorno ya elaborado aunque en las estrategias tradicionales se le ubica como primer momento.
- *El trabajo de la técnica.* En este momento se debe mejorar la técnica volviéndola más eficaz y fiable y acrecentar la maestría que se tiene de ella.
- *Momento de la institucionalización.* tiene por objeto precisar lo que es «exactamente» la OM elaborada, distinguiendo los elementos que no le hayan sido integrados y aquellos que entran definitivamente en la OM considerada.
- *Momento de la evaluación.* Se articula con el de institucionalización y en él se verifica lo que vale, lo que se ha aprendido (Chevallard, 1998a, pp. 48-50).

Entonces, el estudio puede ser redefinido a partir de la noción de momento didáctico, *estudiar matemáticas* consistiría en «vivir» los diferentes momentos didácticos o *ayudar* a los alumnos (en el caso del profesor) a «vivir» esos momen-

tos, lo que significa que en el proceso de construcción matemática, aparecen dos prácticas humanas o dos praxeologías, una matemática (hacer matemáticas) y una de estudio o didáctica (estudiar matemáticas). Así, cuando un investigador o un alumno estudian una praxeología matemática, o cuando un profesor ayuda a otra persona a estudiarla, utilizan una praxeología didáctica, la del alumno será una praxeología didáctica «discente» y la del profesor una praxeología didáctica «docente».

Toda praxeología se estructura en dos niveles: el técnico-práctico formado por los tipos de tareas y técnicas (didácticas); y el tecnológico-teórico formado por las tecnologías y teorías (didácticas), sin embargo no tienen una existencia independiente, toda praxeología didáctica contiene al menos una praxeología matemática, y a su vez, toda praxeología matemática está contenida en al menos una didáctica, esta codeterminación entre ambas praxeologías es acotada de la siguiente manera:

las organizaciones «transmisoras», es decir, didácticas, se configuran de una manera vinculada a la estructura que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas dependen fuertemente de las OM por enseñar, por esta razón, la enseñanza de las OD debe tomar en cuenta su relación con las organizaciones matemáticas (Chevallard, 2001, p. 3).

En términos de las praxeologías, podemos decir que una praxeología didáctica puede construirse (en el caso del investigador) o reconstruirse (en el caso de un alumno que estudia didáctica) y podemos decir que en este proceso aparecen dos aspectos de la actividad didáctica, un proceso de estudio y un producto de dicho proceso, hacer didáctica consistiría en utilizar una praxeología didáctica para dar respuesta a una cuestión (didáctica) y estudiar didáctica consistiría en reconstruir uno o varios elementos de una praxeología didáctica con el fin de resolver una tarea que resulta importante para una institución determinada.

De lo anterior podemos deducir que las praxeologías didácticas del profesor (docentes) son el «saber didáctico» principal en la formación de profesores, también que el estudiante hace didáctica cuando utiliza una OD ya elaborada y estudia didáctica cuando reconstruye una OD bajo la dirección del formador. Pero si se advierte que en el sistema de formación el *director de estudio* no hace las veces de profesor de matemáticas sino de director del estudio de praxeologías

didácticas, tenemos una práctica humana (la del formador) que en términos de las praxeologías podemos llamar *praxeología de formación*, ésta también se estructura mediante el bloque técnico-práctico, donde se incluyen las tareas y las técnicas (de formación), y el tecnológico- teórico con sus discursos tecnológicos y teóricos (de formación).

Las praxeologías docentes o los diferentes tipos de tareas para el profesor

Al igual que en toda institución, señala Chevallard (1999), las praxeologías de la profesión de enseñante son construcciones históricas y el producto de normatividades institucionales múltiples. Una primera fuente de praxeologías para el enseñante es el proceso normalizador que se ejerce desde el sistema escolar, las escuelas normales son otra fuente praxeológica dado que es en esta institución donde se enseña «a enseñar» y donde se reinterpretan las praxeologías de la profesión que ha puesto a circular el sistema escolar. Una tercera fuente de praxeologías se puede ubicar en la actividad de los profesores innovadores, quienes existen para tratar de imponer normas opuestas a las del sistema escolar y a las de las escuelas normales.

Finalmente, una cuarta fuente de praxeologías para el enseñante está constituida por la investigación educativa o particularmente en didáctica.³⁸ Las normas o praxeologías que surgen de esta última fuente son las que particularmente nos interesan, de ahí que una pregunta esencial sea ¿cuáles son los tipos de tareas que desde la institución didáctica definen la praxeología del profesor?

Sobre este respecto, Chevallard (1994) señala que la presión de los cambios políticos, económicos, sociales, culturales, epistemológicos, formativos y didácticos ha obligado a que el sistema de tareas del profesor esté en constante evolución, de ahí que en su opinión, deba ser reinventado periódicamente. No obstante estos cambios, considera que en una primera aproximación puede verse que el sistema de tareas del profesor se organiza en torno de dos categorías dependientes una de la otra.

En la primera categoría se contemplan los siguientes tipos de tareas:

- Tareas relativas a la concepción de los dispositivos de estudio

38. A decir de Chevallard (1999, p. 5), en la investigación comúnmente se refugian los transfugos de la enseñanza, por esta razón, señala, es usual observar en los investigadores una actitud poco crítica respecto de las praxeologías que surgen de otras fuentes.

- Tareas relativas a la organización de los dispositivos de estudio³⁹ y,
- Tareas relativas a la gestión de sus respectivos entornos.

En la segunda categoría se incluyen:

- Tareas de ayuda al estudio y,
- Tareas de dirección de estudio y de enseñanza.⁴⁰

En correspondencia con estas categorías, la primera tarea que debe cumplir el profesor, consiste en determinar las praxeologías matemáticas escolares a partir de las indicaciones del programa de estudios oficial, precisando el contenido y el conjunto de tipos de tareas matemáticas que contiene cada una, así como la profundidad que debe darse a los componentes técnico, tecnológico y teórico. La segunda tarea consiste en dirigir el estudio de una praxeología matemática determinada, es decir, conducir la reconstrucción o transposición de esta praxeología en una clase concreta gestionando los seis momentos didácticos que constituyen un proceso de estudio.

Sin embargo, los tipos de tareas descritos caracterizan la praxeología de un profesor, pero no necesariamente son idénticos a los que debe resolver un profesor en formación dado que en este caso se busca que el futuro enseñante construya técnicas adecuadas que le permitan resolver dichos tipos de tareas durante el ejercicio de su profesión, en este sentido, Butlen y Peltier (1994, p. 15) sugieren que los tipos de tareas propios de la formación deben ser los siguientes:⁴¹

1. Las reorganizaciones de conocimientos matemáticos, eventualmente el aprendizaje de nuevos saberes y la reflexión epistemológica sobre esos conocimientos y su funcionamiento.
2. Las comparaciones entre diferentes formas de enseñanza de la escuela elemental, las presentaciones de ingenierías, las explicaciones de los

39. En esta perspectiva se toma como dispositivo a la componente material de una técnica por oposición a su componente práctica. (Chevallard, 1994, p. 42)

40. En la perspectiva de la TAD, estos dos tipos de tareas deben cruzarse con la estructura tricotómica del territorio del profesor, tríada formada por el territorio (sistema escolar), terreno (escuela) y el terruño (la clase).

41. En Artigue (1995) pueden observarse también ciertos tipos de tareas similares que se desarrollan en la formación de profesores de secundaria.

- obstáculos encontradas en la enseñanza de un campo conceptual y el estudio de las regularidades que conciernen a los aprendizajes.
3. Los análisis de documentos pedagógicos y de los materiales escolares.
 4. Los análisis más puntuales de secuencias de enseñanza y los estudios a priori de situaciones.
 5. Los análisis de prácticas profesionales basadas sobre la observación directa de clases.
 6. El diseño y construcción de secuencias de clase en el contexto de la práctica profesional dirigida por el tutor o bajo la guía de «autoobservaciones» o «autoanálisis».

Ahora bien, la especificidad y generalidad de estos tipos de tareas deben ser comprendidas a la luz de otros desarrollos de la TAD (Chevallard 2002b y 2002c) en los que se postula que las praxeologías didácticas comportan diferentes niveles de especificación, por ejemplo hay praxeologías didácticas en un nivel muy general (pedagógico) que responden a la pregunta ¿cómo enseñar? Pero también las hay en el nivel disciplinar (matemático) cuya razón de ser es la pregunta ¿cómo enseñar matemáticas? Otro nivel es el de las áreas (la aritmética), los sectores (los números racionales), los temas (las fracciones) y las cuestiones puntuales (la fracción como cociente).⁴²

Praxeologías docentes, formación y transposición

Como se ha señalado en los primeros apartados de este capítulo, el problema de la relación entre didáctica y formación tiene que ver con la dificultad de seleccionar los saberes que pudieran constituir una «didáctica para principiante», esta idea es sostenida por la aproximación «cognitiva» y por la mayoría de las posturas al interior de la «aproximación epistemológica», en esta última por ejemplo son claros los esfuerzos de Kuzniak y Houdement por analizar los saberes pertinentes para la formación.

En contraste con estas posturas, la TAD toma el objeto original de la «aproximación epistemológica» (la actividad matemática) para construir la noción

42. En cada uno de los niveles, además de existir praxeologías didácticas también existen praxeologías matemáticas. Es por la dualidad de cada nivel que se habla de la codeterminación matemático-didáctica entre las OD y las OM y es también por esta razón que para Chevallard resulta imposible la reconstrucción de praxeologías didácticas sin referencia a las praxeologías matemáticas. En otros términos, no es posible encontrar tipos de tareas del profesor que no contengan una referencia a lo matemático.

de praxeología, lo que le permite modificar la pregunta fundamental sobre la formación de profesores. Desde esta perspectiva, cuando se habla de lo matemático, se alude a una actividad y a un producto de la actividad, esto es, a un saber estructurado que es resultado de dicha actividad. De manera que la unión de la actividad con el producto resultante forma una praxeología, una práctica humana que incluye un logos que la torna comprensible y justificable. Por esta razón, las escuelas no deben transmitir –del modo que sea– sólo el saber matemático ya estructurado, deben enseñar –si eso es posible– las prácticas humanas (praxeologías) ligadas históricamente a la producción de ese saber.

Al seguir esta misma idea, respecto de la formación de profesores puede decirse que existe un número importante de saberes sobre la enseñanza de las matemáticas que han sido contruidos dentro del campo de la didáctica de las matemáticas y lo importante no es transmitir dichos saberes sino enseñar a los futuros profesores a realizar las prácticas humanas que han permitido la generación de dichos saberes, en otros términos, la pregunta: ¿qué saberes o conocimientos es necesario transmitir a los profesores en formación? es sustituida por la pregunta sobre las prácticas, o en su sentido más profundo, sobre las praxeologías que un profesor en formación debe reconstruir.

Así, en lugar de preguntarse sobre los conocimientos ideales y sobre las estrategias adecuadas para su transmisión, la TAD se pregunta ¿cuáles son las praxeologías que han permitido generar determinado saber sobre la enseñanza de las matemáticas, sobre la enseñanza de determinada área, tema o cuestión puntual? Si son identificadas estas praxeologías, serán al mismo tiempo la estrategia de formación y el «saber a enseñar», en otros términos, en determinada praxeología seleccionada se incluirán al mismo tiempo los componentes práctico-técnicos y los relativos al logos. De este modo, la actividad que permitió generar un determinado saber y el saber mismo son partes de una misma práctica razonada y comprensible, es decir, de una praxeología.

Por esta conjunción entre la actividad y el saber estructurado, se puede hablar de una codeterminación entre lo didáctico (el proceso de estudio) y lo matemático (el saber estructurado), codeterminación que plantea la necesidad de seleccionar ciertas praxeologías para la formación que sean coherentes con las praxeologías didácticas y matemáticas ya elaboradas, esto es, las praxeologías de formación seleccionadas deben tener una relación estrecha con el objeto matemático que se desea reconstruir, esta misma necesidad se ve reflejada en el

nivel de especificidad, si lo que se desea es reconstruir una cuestión matemática puntual, la praxeología didáctica seleccionada deberá tener un mayor nivel de especificidad que si se desea reconstruir un tema matemático o un área de la matemática.

En síntesis, la perspectiva que toma a las praxeologías como elementos para la formación de profesores sostiene por un lado la necesidad de que las praxeologías que se incluyen en la formación sean prácticas humanas ligadas a la actividad matemática, y por el otro que su especificidad sea coherente con el objeto matemático al que se refieren y fundamentalmente, en el caso de las praxeologías docentes, es necesario que se considere la naturaleza de la praxeologías de estudio y la especificidad del objeto matemático al que se refieren.

Una vez subrayada la diferencia entre la perspectiva de Chevallard y aquella que priorizan las nociones de saberes o conocimientos, sólo resta contestar una pregunta ¿en tanto prácticas, las praxeologías son susceptibles de transmitirse, de enseñarse o de transponerse?, en otros términos, ¿existe alguna relación entre las praxeologías y la transposición didáctica?

Si hay una postura contraria a la idea de transposición didáctica, señala Chevallard (1997a), es la que postula el problema de la formación como una simple transmisión de saberes dado que cuando se habla de la transmisión, se piensa que un saber es un objeto enteramente material o simbólico que puede ser «transportado» de un lugar a otro.⁴³ Contra, la TAD niega la posibilidad de transmitir una praxeología y al contrario de esto, designa la reconstrucción, la recreación de una praxeología en un ambiente nuevo en el que la ecología puede ser muy diferente.

Cuando se habla de la transposición de una praxeología docente se alude a la reconstrucción de dicha praxeología en las diferentes instituciones formadoras, por ejemplo, en la esfera «sabia» se trataría de generar praxeologías que permitan producir un saber estructurado sobre la enseñanza de las matemáticas; la modelación del rol del profesor y los estudios que exploran las praxeologías espontáneas de los profesores serían ejemplos de dichas praxeologías. En el ámbito noosférico se trataría de seleccionar las praxeologías más adecuadas para un momento histórico particular y para las condiciones institucionales, políticas,

43. Este supuesto, afirma Chevallard (1997a) es el síntoma por excelencia de la reducción pedagógica de lo didáctico, puesto que desde la perspectiva pedagógica, el destino del saber no es más que una preocupación tangencial.

económicas, etc., existentes. En el ámbito de los formadores la función transpositiva consistiría en reconstruir dentro del salón de clases, las praxeologías propuestas en el «texto del saber», para ello el formador debe considerar las condiciones de sus alumnos y la naturaleza de los objetos matemáticos de referencia.

1.4. FORMACIÓN DE PROFESORES Y PRAXELOGÍAS

A partir del 2012 en la formación inicial de profesores en México se puso en marcha un plan de estudios basado en el llamado «enfoque por competencias», esta cultura escolar constituye lo que Gascón y Bosch (2007) denominan «generalismo pedagógico» que se caracteriza por eliminar lo que es específico de cada disciplina, diluyendo el conocimiento en un conjunto de competencias genéricas ajenas a toda disciplina. Estas competencias representaban un conocimiento de base para la formación y en los programas es segmentado en seis ámbitos: la planeación del aprendizaje; organización del ambiente del aula; evaluación educativa; promoción del aprendizaje de todos los alumnos; compromiso y responsabilidad con la profesión y vinculación con la institución y el entorno. (SEP, 2011). Esta visión generalista muestra que «la contraposición entre aprender conocimientos y adquirir competencias no es más que una nueva versión de la falacia que contrapone aprender conocimientos a aprender a aprender» (Gascón y Bosch, 2007, p. 206) y suele olvidar que los saberes disciplinares tienen rasgos específicos equivalentes a una actividad humana en particular.

Para el caso de la formación de profesores de educación primaria, esta situación resulta más compleja, puesto que los estudiantes deben «dominar» un gran número de saberes disciplinares –vistos como competencias–, para conjuntarlos con saberes pedagógicos, psicológicos, sociológicos, entre otros.

1.4.1. La formación del profesor. Restricciones o necesidades

Para el caso de la formación del profesorado, la separación entre hacer y enseñar matemáticas amplía la distancia entre el sujeto que enseña matemáticas y el que las produce y aplica. Esta disociación, señalan Gascón y Bosch (2007), se refuerza por una epistemología ingenua de las matemáticas que alimenta el mito de la separación entre el contenido de la enseñanza y la manera en que se organiza su estudio.

Desde esta lógica, la formación de profesores tendría que sustentarse en principios generales independientes de lo que se pretende enseñar, así, se le

confía al profesor la responsabilidad de especificar los criterios generales del contenido que ha de enseñar porque se considera que lo que realmente importa no es enseñar matemáticas sino «enseñar a aprender». Sin embargo, el enfoque basado en competencias sólo permite formarse como educadores «integrales» disminuyendo su capacidad educativa como profesor de matemáticas. Tal planteamiento subyace en el plan y programas de educación normal donde se señala que, al adquirir los conocimientos disciplinarios, los estudiantes deberán asociarlos con las necesidades, procesos y formas de aprendizaje de sus futuros alumnos, mediante actividades didácticas específicas y recursos para la enseñanza (SEP, 2012a).

Empero, resulta iluso pensar que pueden desarrollarse competencias ligadas a la formación de profesores sin pensar en el saber disciplinar, porque tanto en las cuestiones específicas como genéricas inciden en las restricciones de los niveles de codeterminación didáctica, algunas son subrayadas por Gascón y Bosch (2007):

- La invisibilidad social de las matemáticas. Existe la consideración social de las matemáticas como un artefacto didáctico, como si la única razón para aprender matemáticas fuera que se enseñan en la escuela. Se reduce su valor social a un simple valor escolar que convierte la enseñanza de las matemáticas en un fin en sí mismo.
- El rechazo cada vez más generalizado para pasar de la certeza a la duda cognitiva. Cuando el rechazo conlleva a un desinterés, una persona no puede aprender porque no puede dudar y no tiene derecho a no saber.

Ante estas restricciones, no basta una formación que desarrolle competencias porque las dificultades se profundizan sobre todo en la educación superior donde los saberes disciplinares son más específicos y numerosos. Pensar que «la formación inicial tiene que integrar los conocimientos académicos, las concepciones personales y el conocimiento práctico» (Mellado, 2003, p. 353), resulta fundamental si se quiere modificar las prácticas. Así pues, la dificultad en la formación de profesores radica en que no se sabe cuáles son las competencias que debería tener un profesor que enseña matemáticas, éste es un criterio muy abierto y ambiguo. A decir de Gascón y Bosch (2007), los intentos de utilizar las competencias para elaborar un programa de formación no hacen sino negar

el problema de formación dando por resuelto con anticipación, el problema didáctico.

1.4.2. El problema praxeológico del profesor

Una vez abordadas las necesidades y restricciones en la formación del profesor, es necesario subrayar las problemáticas que enfrentan los estudiantes normalistas cuando se encuentran en situaciones reales de enseñanza. Si se toma la idea de que la formación ha evolucionado de saberes a praxeologías, se estaría hablando de subrayar el problema praxeológico del profesor en formación.

El «saber sabio», que Chevallard había planteado en las primeras teorizaciones de la TAD desaparece y en su lugar aparece la transposición de praxeologías. En este sentido y siguiendo a Wozniak (2010) uno de los problemas praxeológicos del maestro es preparar su curso antes de ser «enseñado», es decir, ¿cómo organizar el estudio de un objeto (matemático) para y en el salón de clases?, para dar respuesta a esta cuestión el profesor lleva a cabo un proceso de transposición didáctica que corresponde a una institución específica y una Organización Matemática (OM) determinada. En estos casos se habla del diseño de un proceso de estudio basado en un modelo de problemas que se manifiesta mediante la reconstrucción de una organización praxeológica. En este proceso se hace necesario identificar el tipo de tareas T ; construir una técnica τ para resolver la tarea y producir un discurso tecnológico θ que justifique la técnica, además de seleccionar una teoría que le dé sentido a todos los componentes.

Dentro de ese recorrido praxeológico un profesor en formación observará inicialmente las respuestas presentes en la cultura escolar, es decir, en textos, en conversaciones con otros colegas, etc., después hará un análisis sobre el conjunto de respuestas que han sido construidas por otros, con ello favorece una evaluación que se vuelve indispensable para el desarrollo de una respuesta a la pregunta inicial. A decir de Chevallard (1997b), este proceso termina con la producción de la respuesta, la cual denomina O «obra» entendida como cualquier producción humana que da respuesta a preguntas «teóricas» o «prácticas» (Q) y que son las razones de la obra. La planificación anual, semanal o hasta de una sesión de enseñanza no es sino, la reconstrucción de praxeologías matemáticas locales y regionales, la obra del profesor que constituye la respuesta al problema praxeológico que le compete (Wozniak, 2010).

1.4.3. La formación de profesores a través de organizaciones praxeológicas

Cirade (2006, en Ruiz y García, 2007) señala que para la formación del profesor son necesarios tres tipos de matemáticas: matemáticas a enseñar, matemáticas para el enseñante y matemáticas para la enseñanza. Las primeras se incluyen en un programa oficial o currículum escolar de matemáticas; las segundas son las que un profesor debe conocer para comprender los contenidos y propuestas de enseñanza (técnicas, tecnologías y teorías del programa) y; las matemáticas para la enseñanza son aquellas que se ponen en juego en la clase y son Organizaciones Matemáticas designadas para enseñar. En su caso, los profesores en formación empiezan a construir esas matemáticas cuando se preguntan sobre las razones de ser de una noción, de una propiedad, de un teorema o de una técnica expresada en el currículum escolar.

Para ilustrar como se asume la formación de profesores desde la TAD, Artaud (2006) señala que para modelar una secuencia de enseñanza mediante una praxeología matemática y una didáctica, primero se establecen los tipos de tareas, las técnicas, la tecnología y la teoría; el segundo momento es la segmentación de la materia a estudiar, es decir, el estudio de un tema se relaciona con el sector y la zona en la que se encuentra inmersa, incluso con la disciplina en su conjunto y también con sus relaciones con los sujetos; para el tercer momento, a partir de las respuestas existentes que se observan, analizan y evalúan, se producen las respuestas a la pregunta planteada, las cuales son validadas para difundir y justificar el trabajo.

Así, la cuestión fundamental en la formación de profesores es identificar el equipamiento praxeológico que requiere un profesor para desarrollar una enseñanza eficaz y una cuestión derivada es ¿qué se puede hacer desde la formación de profesores para que se apropien de tal equipamiento? En este sentido puede preguntarse sobre:

- ¿Cuáles son las tareas y técnicas que el profesor debe llevar a cabo?
- ¿De qué tipo serían, cómo surgen, cómo se desarrollan?
- ¿Cuál es discurso tecnológico-teórico que utilizan los profesores para describir, justificar y hacer evolucionar las técnicas?
- ¿Cuál es el origen y evolución de tales discursos?
- ¿Cómo establecer la conexión entre el bloque práctico y el bloque teórico?

- ¿Pueden las praxeologías docentes evolucionar sólo con el desarrollo de las técnicas y los discursos tecnológico-teóricos espontáneos?
- ¿Se requiere de una elaboración más sistemática para desarrollar la profesión? y,
- ¿Cuál es la incidencia que tienen sobre las tareas y técnicas docentes los discursos tecnológico-teóricos que aporta la didáctica de las matemáticas o aquellos más generalistas propios de la pedagogía o psicología educativa? (Bosch y Gascón, 2009).

Más que la unión entre teoría y práctica, la praxeología permite entender el saber a través del hacer, por ello es necesario delimitar las praxeologías didácticas y matemáticas para la formación de profesores. Es aquí donde puede aparecer la denominada pedagogía del «monumentalismo» cuando se antepone el estudio de determinadas construcciones praxeológicas existentes al estudio de las cuestiones o problemáticas vivas en la formación (Gascón y Bosch, 2007). De tal monumentalismo se desprende el riesgo de formar a los estudiantes normalistas no a partir de las necesidades praxeológicas propias de la docencia sino de equipamientos praxeológicos ya establecidos que sólo deben ser aplicados.

Contra la idea anterior, en la formación es conveniente centrar las cuestiones o dificultades a las que se debe dar respuesta más allá de un equipamiento preestablecido. De esta manera «el problema de la descripción de las praxeologías didácticas con las que el profesor se tiene que equipar se convierte en el problema de determinar las cuestiones que están en el origen de estas praxeologías» (Bosch y Gascón, 2009, p. 95). Si se considera que los «saberes a enseñar» son también «saberes a hacer» y que ambos muestran un componente tanto teórico como práctico, entonces la formación alude a praxeologías, a diferencia de otras nociones como saber, conocimiento, competencia, reflexión, creencia, entre otros.

1.4.4. El sistema de tareas del profesor

Diversas posturas plantean que el profesor no sólo debe tener el dominio de las disciplinas que enseña sino también del proceso de adquisición de conocimientos, de los métodos de trabajo en el grupo, del sistema educativo y del contexto social. Se podrían multiplicar más las tareas que se imponen al sistema del docente (Chevallard, 1997c), sin embargo desde la TAD se intenta especificar cuáles son las tareas que competen al profesor en la enseñanza de las matemáticas.

En el texto *Normas Profesionales para las Matemáticas Escolares*, publicadas en 1991 por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos, las tareas asignadas a un profesor de matemáticas se dividen en cuatro áreas:

- El establecimiento de objetivos y seleccionar o crear tareas matemáticas para ayudar a que los estudiantes logren alcanzar las metas de tesis;
- Estimular y gestionar el discurso del aula de manera que tanto para los alumnos y el profesor sea más claro lo que se aprende;
- La creación de un ambiente en el aula para apoyar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas;
- Analizar el aprendizaje del estudiante, las tareas matemáticas, y los entornos con el fin de tomar decisiones sobre la instrucción en curso (Simon, 1995, p. 119).

A pesar de que la cita anterior tiene más de 20 años, en las tareas enunciadas ya se incluye, de modo implícito, la importancia del análisis praxeológico en el diseño y análisis de tareas matemáticas y aunque queda diluido el componente didáctico, en la actualidad este vacío se llena con ciertos planteamientos propios de la TAD, sobre todo el que señala que toda acción humana se deriva de una praxeología.

Por otra parte, toda institución formadora se distingue por su intencionalidad didáctica y desde la TAD lo didáctico siempre lleva al estudio, en el sentido de que alguien estudie cierto objeto. En este sentido el objetivo de la didáctica de las matemáticas «es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio –o procesos didácticos– de cara a proponer explicaciones [...] a las dificultades con que se encuentran todos aquellos [...] que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a otros a estudiar matemáticas» (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 60).

La didáctica entonces no se reduce al análisis de la enseñanza de las matemáticas, sino que representa un medio para el estudio porque el aprendizaje se hace posible a través del proceso de estudio o proceso didáctico. Ambos, enseñanza y aprendizaje, son aspectos particulares del proceso de estudio de las matemáticas, entendiendo el estudio en un sentido amplio, que engloba tanto el trabajo matemático del alumno como el del matemático profesional que también estudia problemas de matemáticas (Chevallard, *et al.*, 1997).

En este proceso, en tanto director de estudio, el profesor es el representante de las prácticas institucionales que desarrolla, lo que le permite expresarse en términos

de tipos de tareas o de praxeologías. La formación de profesores se circunscribe también a un proceso de estudio, al apoyar al estudiante en el estudio del objeto (matemático-didáctico) el formador estructura un sistema didáctico de ayuda.

Como se ha mencionado, el sistema de tareas de profesor revela dos grandes componentes (Chevallard, 2002a), la primera incluye las tareas de diseño y organización de los dispositivos de estudio y la gestión de sus entornos; la segunda incluye el apoyo para el estudio de la gestión y de la educación. En términos praxeológicos, una de las primeras tareas a las que se enfrenta el profesor es determinar, a partir de la información del programa de estudios, ¿cuáles son las organizaciones matemáticas a estudiar?, puntualizando el contenido y los tipos de tareas matemáticas, así como el grado de desarrollo para proporcionar componentes técnicos, tecnológicos y teóricos (Chevallard, 1997c).

El segundo tipo de tareas para el profesor tiene que ver con dirigir el estudio de una praxeología específica, lo que implica su reconstrucción en la clase. Empero, independientes a la trayectoria que tome el estudio, existen ciertos tipos de situaciones que se harán presentes y determinarán los momentos de estudio y los tiempos de la enseñanza, en éstas aparece un monitoreo del progreso logrado que sirve para modificar los elementos que se han construido hasta el momento, lo que constituye la evaluación.

Formación de profesores e instituciones institucionalizantes

La dimensión institucional juega un papel relevante en la formación inicial de profesores pues éstos se encuentran «sujetos» a las normas de una institución, a las restricciones, condiciones y recursos que se ponen en juego para la actividad matemático-didáctica. En un estudio antropológico se pretende analizar lo que ocurre con la actividad humana de esa institución, es decir, se observa qué pasa, cómo pasa y cuáles son las restricciones de tal actividad, pero no se estudia la institución para sugerir cómo debería ser esa actividad.⁴⁴

Una institución (*I*) se determina por el tiempo y las sujeciones que impone a las tareas que el profesor deberá desarrollar. Chevallard (1994) considera que una misma praxeología puede generar una multiplicidad de fenómenos en diversas instituciones porque el proceso de transposición institucional

44. Desde este punto de vista puede considerarse que los dispositivos de estudio como el REI o el REI-FP constituyen una contradicción con la intención del análisis antropológico puesto que a través de éstos se intenta establecer una manera idónea de estudiar un cierto objeto.

no necesariamente va a producir versiones modificadas de las organizaciones praxeológicas sino que enriquece socialmente las praxeologías disponibles para adaptarlas a las nuevas condiciones institucionales. Por otro lado, la institución no sólo produce una praxeología, también debe generar condiciones para su reconstrucción en otras instituciones pasando por un proceso de «purificación» donde se elimina todo lo que cae dentro de los posibles usos específicos de la misma en una *I*. El objetivo es facilitar en otras instituciones la apropiación de la praxeología (Romo, 2009).

Empero, para analizar los diferentes procesos de transposición y flujos interinstitucionales, debe considerarse el sometimiento institucional que determina ciertas reglas y restricciones. En otras palabras, la institución matemática es vista como un entramado de sub-instituciones, integrado por diversas organizaciones matemáticas de diferentes niveles: específico, local, regional y global. La inscripción de una praxeología en un área restringida y las herramientas disponibles determinan las posibilidades para desarrollar una técnica. A la inversa, los niveles más altos proporcionan recursos a los niveles inferiores para producir y justificar los elementos praxeológicos (Romo, 2009).

Los dispositivos de formación desde la TAD

La TAD ha retomado la noción de dispositivos de formación para superar la idea de estrategias y precisar una visión más específica en cuanto a la formación de profesores. La acepción más generalizada del término dispositivo es aquella que proviene «... del latín (...) mecanismo o artificio dispuesto para obtener un resultado automático» (Souto, 1999. p. 6). Buscando mayor especificidad, se podría decir que los dispositivos se identifican con modelos de interacción entre el saber y el hacer del profesor e integran situaciones que intentan generar, movilizar y poner en acción los saberes contruidos por formadores y estudiantes. Así pues, un dispositivo de formación se orienta a la producción y transformación del sujeto mediante la experiencia de formación, construyendo saberes en la acción (Olbrich, 2011).

Para establecer dispositivos de formación es necesario conocer los problemas didácticos que constituyen el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas. Gascón y Bosch (2007) señalan que todo problema didáctico se ubica en función de una praxeología matemático-didáctica suficientemente amplia y en su formulación contiene todas las etapas de la transposición didáctica de

tal praxeología. Esto significa que un problema didáctico no puede abordarse exclusivamente desde una praxeología puntual.

Si, por ejemplo, queremos estudiar lo que algunos autores llaman el «razonamiento proporcional» de los estudiantes y los fenómenos asociados, es imprescindible partir de un análisis de la proporcionalidad tal como es enseñada en la institución docente en cuestión. Este análisis, que dependerá en gran medida de la manera de interpretar la «proporcionalidad» en dicha institución, es completamente insuficiente. Será necesario, además situar, la proporcionalidad en una OM local relativamente completa (que, a su vez deberá integrarse en una OM regional) y, sobre todo, analizar los fenómenos transpositivos, en todas y cada una de sus etapas, que han dado como resultado dichas organizaciones matemáticas escolares. Además, dada la codeterminación entre lo matemático y lo didáctico, es imprescindible asimismo tomar en consideración la forma particular de organizar el estudio de la proporcionalidad en la institución en cuestión (Gascón y Bosch, 2007, p. 234).

Ahora bien, para plantear y abordar un problema didáctico y diseñar un dispositivo de formación, es necesario establecer un modelo epistemológico de las matemáticas como sistema de referencia, en términos de la TAD, un «Modelo Epistemológico de Referencia» (MER)⁴⁵. Este modelo de las relaciones naturales entre los objetos matemáticos es siempre provisional, pero desde ahí se pueden «deconstruir» y/o «reconstruir» las praxeologías cuya difusión se pretende analizar (Sierra, 2006).

Desde la TAD se asume la inexistencia de un sistema de referencia privilegiado con el que se pueda observar, analizar y juzgar los saberes, es por ello que sugiere el empleo de sistemas de referencia relativos que puedan adecuarse a un determinado problema o situación (Gascón, 2011). En otros términos, un MER es un modelo de las relaciones matemáticas entre las tareas y las técnicas que se utilizan para resolverlas, un análisis histórico de la evolución de las tareas matemáticas permite reconocer la manera en que las técnicas ligadas a ellas fueron evolucionando. El producto de este doble análisis (evolución de las tareas y de las técnicas) es un MER que permite diseñar un proceso de estudio de determinada praxeología y que resulta imprescindible para analizar cómo se interpreta

45. Una explicación más amplia acerca de lo que es el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) aparece en el siguiente capítulo.

el saber matemático en las instituciones donde se transpone y para describir e interpretar los fenómenos transpositivos.

Análogamente, y dado que todo problema didáctico hace referencia necesariamente a una manera concreta de organizar el estudio de cierto saber matemático, esto es, a un modelo docente que suele estar sustentado por el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la institución, el investigador requerirá instrumentos para describir y analizar dicho modelo docente y las consecuencias de éste sobre los fenómenos que estudia. Estas herramientas se las proporcionará un modelo de referencia de los modelos docentes (o tipos de OD ideales) posibles que, de nuevo, el didacta debe asumir de manera más o menos explícita. Se trata de un modelo de referencia que incluye en cierto sentido al MER puesto que debe incluir la relación de cada tipo de OD ideal posible en una institución determinada con el modelo epistemológico de las matemáticas que lo sustenta (Gascón y Bosch, 2007, p. 236).

El MER no es otra cosa que el modelo de las relaciones matemáticas entre diferentes tareas y técnicas y es necesario explicitarse cuando se le emplea en una investigación didáctica puesto que condicionará:

- a) Los fenómenos didácticos que serán «visibles» para el investigador.
- b) La manera de describir dichos fenómenos.
- c) Las explicaciones tentativas que se podrán proponer (Gascón y Bosch, 2007).

Análisis ecológico en la formación de profesores

Desde la TAD todo problema didáctico es un problema de «ecología praxeológica», «podría decirse que la dimensión ecológica de un problema didáctico contiene las cuestiones que giran en torno a la pregunta: ¿por qué las cosas (las OM y las OD) son como son en la contingencia institucional y qué condiciones se requerirían para que fuesen de otra forma dentro del universo de lo posible?» (Gascón, 2011, p. 217).

En este sentido, es preciso considerar las restricciones y las condiciones impuestas sobre las OM y las OD en los niveles de determinación didáctica. A decir de Gascón (2011), cada nivel influye en la determinación de la ecología institucional, es decir, la interpretación y estructuración de las OM en cada

nivel condicionan el modo de organizar su estudio y a su vez, la naturaleza y funciones de los dispositivos didácticos propios de cada nivel determinan el tipo de OM que podrá reconstruirse.

Tomar en cuenta la jerarquía de niveles permite que la ecología de los saberes se vuelva más precisa porque las praxeologías se describen de modo más detallado que los saberes, además las restricciones son más explícitas en los niveles de codeterminación didáctica. Según Gascón (2001) la dimensión ecológica de un problema didáctico abarca cuestiones que pretenden indagar las restricciones y el nivel de procedencia, lo que resulta crucial para la ecología de las praxeologías matemáticas y didácticas, esto se identifica en los siguientes planteamientos:

- a) ¿Cuáles son las condiciones que permiten dar cuenta del estado actual de las OM y de la OD asociadas a una institución determinada?
- b) ¿Qué restricciones dificultan o impiden que ciertas características de las OM y de las OD se desarrollen en una institución?
- c) ¿Qué condiciones se deberían instaurar, y en qué niveles jerárquicos para que sea posible la vida de las OM y OD con ciertas características?
- d) El modelo epistemológico específico de un ámbito de la actividad dominante en una institución I , ¿cómo condiciona la forma de organizar el estudio de dicho ámbito en la I ?

Las restricciones que determinan las características praxeológicas de una institución, generalmente son independientes a la voluntad de los sujetos, lo que no significa que sean inamovibles ni que los sujetos no tengan alguna responsabilidad, al contrario, es posible la existencia de ciertas restricciones que pueden modificarse. Los dispositivos y estrategias de formación, permiten dar cuenta de los problemas didácticos, caracterizando en primera instancia el objeto de estudio que le compete desde una perspectiva epistemológica y de modo particular desde el punto de vista de la TAD. En este caso, el dispositivo utilizado es un Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores cuyas especificidades se describen capítulos más adelante.

II. LA PROPORCIONALIDAD

DE LA ORGANIZACIÓN CLÁSICA A LA ORGANIZACIÓN FUNCIONAL

El conocimiento de la proporcionalidad es fundamental tanto para la vida cotidiana como para su aplicación en diversas disciplinas dado que pone en juego un gran número de saberes aritméticos (fracciones, porcentajes, números decimales, medida, operaciones básicas, razón y proporción) que ayudan a resolver distintas situaciones problemáticas. No obstante su importancia, numerosas investigaciones señalan las dificultades que tanto estudiantes como profesores manifiestan en situaciones que implican la puesta en práctica del razonamiento proporcional (Ruiz, 2007; Rivas, Godino y Castro, 2012; y Perry, Guacaneme, Andrade y Fernández, 2003). Tales dificultades, afirman esos estudios, derivan de un bajo nivel de comprensión del «paquete» de conocimientos de este concepto matemático y de la utilización deficiente de las técnicas y propiedades que le subyacen.

El razonamiento proporcional requiere de un pensamiento que incluya inferencias y predicciones de otros conceptos y aunque no se trata de un conjunto de ideas que se acumulan unas sobre otras, la proporcionalidad es considerada como base fundamental del pensamiento aritmético que permite la construcción del pensamiento algebraico, a decir de Skemp (1976, en Pugalee, 2010) los niveles de razonamiento proporcional se vuelven más complejos y requieren la comprensión de diferentes conceptos.

Ahora bien, la elaboración de análisis epistemológicos o la construcción de modelos epistemológicos de referencia (MER), tarea a la que nos dedicamos en este capítulo, permiten identificar la naturaleza del objeto matemático y reconocer los fenómenos matemáticos y didácticos que éste produce, también se favorece la interpretación de la historia del concepto lo que permite replantearlo en la actividad matemática y didáctica.

Desde la perspectiva de la TAD, los estudios praxeológicos no pueden deslindarse de la revisión de modelos epistemológicos ya construidos. En el caso de la proporcionalidad los principales estudios praxeológicos corresponden a los

modelos propuestos por Bosch (1994) y Bolea (2002) quienes revisan la llamada organización clásica de la proporcionalidad desde la Teoría de las Razones y Proporciones y el de García (2005), que hace una «extensión» del modelo clásico para orientarlo hacia la modelización funcional.¹

Precisamente, el presente capítulo se propone esa tarea, analizar desde la organización clásica la conceptualización de la proporcionalidad, su interrelación con otros conceptos matemáticos y su transición desde la aritmética hacia el álgebra, lo que constituiría un modelo epistemológico de referencia para este trabajo.

2.1. LA ORGANIZACIÓN CLÁSICA

De acuerdo con Bosch (1994), fue hasta después de mediados del siglo XX que se incluyeron las razones y proporciones en los niveles de educación primaria y secundaria para constituir la base fundamental del estudio de la proporcionalidad. En este primer momento, es en la aritmética donde tal noción encuentra su principal espacio, especialmente en la enseñanza secundaria se estudió la proporcionalidad desde un paradigma centrado en las relaciones funcionales entre dos variables. No obstante, la reducción a la aritmética, autores como Postigo (1954, en Bosch, 1994) y Dalmau (1938, en Bosch, 1994) señalaron que existían otros tipos de relaciones entre variables más allá de la proporcionalidad directa e inversa, las relaciones funcionales desde el Álgebra. Por esta razón se podría decir que la proporcionalidad entre magnitudes constituyó la primera aproximación sistematizada de la funcionalidad.

Con esta forma particular de relación funcional, la aritmética enseñada edificó todo un edificio –que llamaremos la organización clásica– que se mantuvo estable durante un largo periodo de tiempo: desde el primer tercio del siglo XIX hasta mediados del siglo XX (cuando explota la revolución de las «matemáticas modernas»²). Sin embargo, los elementos que la componían nacieron de desarrollos anteriores de las matemáticas sabias que se abandonaron a finales del siglo XVIII (Bosch, 1994, p. 166).

1. En correspondencia con esta idea, el Modelo Epistemológico que aquí se presenta está basado fundamentalmente en los de Bosch, Bolea y García.

2. La matemática moderna ubicó en primer plano el estudio de estructuras algebraicas abstractas, acentuando los aspectos lógicos sobre los aspectos prácticos, los ejercicios formales en detrimento de los problemas prácticos, produciendo un crecimiento en el estudio de las nociones algebraicas y de la teoría de conjuntos en detrimento de la geometría elemental y la intuición espacial (Ferrer, 2000).

Con la llegada de las matemáticas modernas se sustituyen las razones y proporciones por las funciones, con ello se inició la reorganización de la proporcionalidad, principalmente: a) desaparece la terminología de las razones y proporciones; b) se resalta la idea de dependencia funcional para estudiar diversos tipos de relaciones entre magnitudes para favorecer una idea más amplia de dependencia; c) se introducen las tablas de variación que se convierten en un recurso privilegiado para la resolución de problemas y para la vinculación de la proporcionalidad con la noción de función (Balderas, Block y Guerra, 2014).

La organización clásica relativa a los problemas de proporcionalidad es un universo de objetos y prácticas que tiene por emblemas principales las «razones y proporciones», las «magnitudes proporcionales», las técnicas llamadas «regla de tres» (directa, inversa, simple y compuesta) y el inmenso campo de problemas que estas técnicas permitían estudiar (que abarca desde los problemas llamados «de proporcionalidad», hasta sus aplicaciones a cuestiones comerciales, como «reglas de compañías», «intereses», «repartos proporcionales», etc.) (Bosch, 1994, pp. 166-167).

Fundamentalmente, las técnicas que permiten resolver dichos problemas son: el método de reducción a la unidad, el método de las proporciones, el de la regla de tres, el método gráfico y la regla de las causas y efectos. Estas técnicas se fundamentan en la Teoría de las Razones y Proporciones o la Teoría de las Magnitudes Proporcionales (Bolea, 2002), y en términos praxeológicos podríamos decir que son su discurso tecnológico teórico.

2.1.1. La razón: acepciones y principio base de la proporcionalidad

Históricamente y según el contexto, la razón se define como representación o como objeto conceptual, lo que coincide con la tradición geométrica griega que incluye formulaciones de razones entre cantidades de la misma magnitud. Siguiendo esta idea Fiol y Fortuny (1990, en Valverde, 2012) señalan que la razón es parte de los números racionales positivos porque toda razón entre magnitudes designa una proporcionalidad entre cantidades que poseen la misma magnitud. Esta postura, al igual que la anterior se inscribe en el contexto geométrico.

Si bien desde hace ya mucho tiempo la razón entre dos cantidades (a , b) y el número que la expresa (a/b) tienden a confundirse (la justificación de esta fusión se

halla en la evolución del conocimiento matemático mismo). Los sabios matemáticos de la antigua Grecia no consideraban números más que a los naturales. Los números que hoy conocemos como los racionales positivos, eran expresados como razones de números enteros (por ejemplo $3/5$ era expresado como tres es a cinco). Los números irracionales, como $\sqrt{2}$ fueron contruidos varios siglos más tarde. Sin embargo, los sabios griegos fueron capaces de identificar razones de cantidades de magnitud a las que corresponden valores irracionales, como la razón que guarda la circunferencia con el radio (π). En estos casos se comprende que las razones hayan sido muy necesarias. Pero conforme se fueron construyendo nuevos conjuntos numéricos las razones tendieron a perder su razón de ser (Block, Mendoza y Ramírez, 2010, p. 71).

Una perspectiva diferente señala que «la razón es la cuantificación de una relación multiplicativa que se puede calcular dividiendo (o multiplicando) una cantidad por otra» (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012, p. 25 en Valverde, 2012, p. 108). Una definición asociada a la anterior es la de Ceballos (2012) quien señala como razón de dos números enteros al cociente de la división del primero (dividendo) por un segundo (divisor). Un ejemplo de ello es la razón que se establece entre 28 a 7 donde 28 es dividido entre 7 y representado como $28/7=4$ o bien la razón de 5 a 25 es $5/25=1/5$.

Por su parte Llinares y Sánchez (1988) establecen la razón como una relación que deriva de los significados de las fracciones: parte-todo, cociente, operador y razón. El significado razón alude a la comparación entre dos cantidades de igual o diferente magnitud, se puede decir que no existe de modo natural una unidad o un todo, sin embargo no hay que olvidar que, al pertenecer a uno de los significados de las fracciones, constituyen un par ordenado de números enteros que representan una relación todo-todo o bien parte-parte. Un ejemplo de la primera relación (todo-todo) sería:



A



B

La relación entre A y B es de $3/5$ o $3:5$ y la relación entre B y A es de $5/3$ o $5:3$.

Un ejemplo de la relación parte-parte se daría en el siguiente ejemplo:



En este caso la relación (razón) entre círculos negros y blancos es de $3/5$ o bien $3:5$.

Block (2010) señala la importancia de distinguir la razón desde esta perspectiva porque constituye un valioso aprendizaje de las fracciones por ejemplo, cuando el valor de la razón «dos por cada tres» ($2/3$ o 0.66) no es comprendido claramente en términos numéricos, pero se sabe que \$2 de impuesto por cada \$3 es equivalente a \$4 de impuesto por cada \$6 y que eso es más que \$2 de impuesto por cada \$10, desconocer el número que expresa la razón no impide trabajar con la misma, es decir el trabajo con razones del tipo, «por cada dos, tres» constituye un antecedente importante para comprender las fracciones del tipo « $2/3$ de».

A diferencia de Llinares y Sánchez (1988), Godino, Batanero y Font (2003) afirman que la razón no siempre es sinónimo de fracción dado que las fracciones pueden ser cualquier par ordenado de números enteros cuyo segundo componente es diferente a cero, mientras que la razón constituye un par ordenado de cantidades de magnitudes que se expresan a través de un número real y una unidad de medida. De ahí que señale explícitamente una serie de diferencias entre razón y fracción:

- Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones comparan el mismo tipo de objetos, por ejemplo «dos de tres partes» que se indica con $2/3$. La razón 3 jamones/145 euros no es una fracción.
- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado.
- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como $4:7$, o $4 \Rightarrow 7$.
- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser $10:5$, pero también se puede decir que puede ser $10:0$, si todos son verdes.
- Las razones no siempre son números racionales. Por ejemplo, la razón

de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número p , que sabemos no es racional.

- En general, las operaciones con razones no se realizan de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una «suma» de razones del siguiente modo. $2:5+3:7=5:12$. Esta suma no es la misma que la suma de fracciones (Godino, et-al, p. 420-421).

En la escuela es común que la razón represente una división indicada, un cociente exacto o un operador multiplicativo (Perry, et-al, 2003), sin embargo en los tres casos se identifica con un número y por ello se trabaja desde la perspectiva de números fraccionarios y la proporcionalidad como una igualdad entre fraccionarios. A diferencia de esta postura, la naturaleza de ambos conceptos radica en la estructuración de relaciones: una razón será considerada como relación entre dos números, entre dos cantidades o entre un número y una cantidad, por lo que no puede ser simplemente un número aislado.

Otros autores como Busquets (s.f. en Bosch, 1994) conciben la razón como el resultado de la comparación de dos números y distinguen dos clases de razones: por diferencia o aritmética (9-6, donde 9 es el antecedente y 6 es el consecuente) y razón por cociente o geométrica (7/3, donde 7 es el antecedente y 3 es el consecuente), para el caso de la primera se busca cuánto excede una cantidad a la otra, restándolas, para el caso de la segunda se busca cuántas veces contiene una a la otra, es decir se dividen.³ También incorporan los términos antecedente, consecuente y exponente, señalando que una razón es la relación entre dos cantidades y el número que se desprende de esa relación, por ejemplo 4/8, se llama valor de la razón; antiguamente se llamaba exponente de la razón (Dalmau, 1938, en Bosch, 1994). Se podría representar una razón de ambas formas: $6:3=2$, o bien $6/3$ y los dos puntos, que significan «es a», se mantuvieron en los manuales de aritmética hasta principios del siglo XX. Un ejemplo derivado de esta conceptualización surge en las situaciones del tipo: *Si las edades de Sandra y Perla son 6 y 3 años, entonces la razón entre sus edades es 6/3.*

3. En este trabajo se hará referencia sólo a la razón y proporción geométrica a las que se denominará simplemente razón y proporción.

Si bien este autor usa representaciones de la razón como $6/3$, sostiene la diferencia entre razón y número fraccionario dado que la razón se ve como exponente de una razón, esta identificación entre razón y su exponente permite entender que las razones guardan un comportamiento numérico en tanto se multiplican y dividen por números y también se multiplican y dividen entre ellas (Bosch, 1994). Un ejemplo de la igualdad entre razones se observa cuando se dan iguales exponentes (resultado o razón), por ejemplo en el caso siguiente el 5 es el exponente en cada una de las razones e indica las veces que el consecuente está contenido en el antecedente.

25:5; 60:12; 400:80; 5000:1000; etc.

Como se observa, las razones tienen un comportamiento similar al número sin serlo como tal, es decir se multiplican y dividen por números y se multiplican y dividen entre ellas.

- Una razón se multiplica por un número, multiplicando por este número su antecedente o partiendo por el mismo consecuente (...).
- Una razón se divide por un número, partiendo por este número su antecedente o multiplicando por este número su consecuente.
- Una razón no altera, multiplicando o partiendo ambos términos por un mismo número (...).
- Para multiplicar una razón por otra, se multiplican entre sí los antecedentes y su producto se divide por el producto de los consecuentes.
- Para dividir una razón por otra, se multiplica el antecedente de la razón dividiendo por el consecuente de la razón divisor; el consecuente de la razón dividiendo por el antecedente de la razón divisor y se divide el primer producto por el segundo (...) (Dalmau, 1938, en Bosch, 1994, p. 186).

Entonces, una razón es aquello que se puede manipular cuando, dados dos números, existe un objeto denominado razón de estos números que permite establecer relaciones como $5:6$, cuyo funcionamiento con otra razón se podría establecer como $(5:6) (7:8) = 35:48$.

Así, «las razones se situarán [...] en un nivel más elevado dentro de la jerarquía de los objetos matemáticos: tienen que ver con los números –de los

que heredan las propiedades y a los que permanecen vinculadas a través de su exponente- pero no se van a manipular exactamente como si fueran números» (Bosch, 1994, p. 187). Por ejemplo, dada la razón $2:3/5$ no puede manipularse como división donde el 2 se divide entre $3/5$ y se establece la multiplicación «en cruz» $(2 \cdot 5) / 3 = 10/3$, en este ejemplo Dalmau (1938, en Bosch, 1994) señala a la razón como algo propio de una razón compuesta, como una transformación distinta a lo que indicaría el manejo numérico. Siguiendo el mismo ejemplo en la razón $2:3/5$, se puede hacer una transformación $2:3/5 = 2(5) : (3 \cdot 5) / 5 = 10:3$ que si bien parece un resultado equivalente su significado es diferente, en tanto que la primera alude a una división de fracciones y la segunda a una serie de razones.

Por otro lado, la razón es considerada como relación de equivalencia entre un conjunto de pares ordenados cuando aparece una función de un par ordenado ($7 \text{ a } 3 = 7/3$), para justificarla se hace referencia al estatuto lógico de razón que describe Freudenthal (1983) cuando señala que «el significado propio de la razón es hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón, ser capaz de decir con sentido a es a b como c es a d , sin anticipar que a es a b , puede reducirse a un número o valor de magnitud a/b de modo que entonces dado que c es a d es lo mismo $a/b = c/d$ » (p.3). Esta definición se formaliza al establecer la relación de equivalencia entre dos pares (a, b) y (c, d) , lo que alude primero a una igualdad de las razones o relación de equivalencia de a a b y de c a d , esta relación vista desde la matematización clásica corresponde a la noción de proporción, por lo que no se podría formalizar la razón sin definir la proporción de donde deriva (Bosch, 1994).

Se podría decir entonces que en la organización clásica la noción de razón de magnitudes y de números aparece como noción primitiva otorgada culturalmente, esto es, aunque no exista una necesidad matemática para la introducción de la noción de razón en el texto de enseñanza clásico, existe una legitimidad cultural que lo justifica en la escuela.

2.1.2. La proporción

El término proporción proviene del latín *proportionem* que constituye una contracción de *proportione*, significa «según la parte», en el contexto de la Didáctica de las Matemáticas se define como igualdad de dos razones, Fernández (2001) señala que cuando dos razones son equivalentes se pueden igualar los cocientes indicados por éstas y obtener una relación entre las medidas de cuatro o más cantida-

des que se vuelven homogéneas dos a dos, si $a/b=x$ y $c/d=x$ entonces la igualdad puede expresarse como $a/b=c/d$, lo que indica una proporción, cuyos términos extremos y medios quedan representados como $a:b::c:d$, se lee « a es a b como c es a d ». En este caso aparece una propiedad de la proporción, la suma de antecedentes dividida por la suma de consecuentes es igual a las razones de tal proporción.

Fiol y Fortuny (1990, en Valverde, 2012) definen la proporción mediante la razón entre dos cantidades, la proporción significa cociente de las medidas de las cantidades, la razón y la proporción se toman como sinónimos dado que, señalan, la proporción de dos magnitudes es la razón entre la mayor y la menor. Por su parte Godino (2004) afirma que cuando en una situación intervienen dos pares de números que se corresponden se establece una proporción que representa un caso particular de la proporcionalidad directa, por ejemplo, si a 21 le corresponde 6 y a 28, 8, se representa $6=21(2/7)$ y $8=28(2/7)$, 21----6 y 28----8 forman una proporción que se aprecia como una igualdad de razones.

A decir de Postigo (1958), Busquets (s.f) y Dalmau (1938) (en Bosch, 1994) la formulación clásica de proporción la define como igualdad de dos razones geométricas, llamada también equicociente, igualdad fraccionaria o proporción. Desde esta perspectiva, cuatro números colocados en un orden definido forman una proporción si la razón de los dos primeros es igual a la de los dos últimos. Dalmau (1938) distingue dos formas de escribir una proporción en las que la igualdad es una condición:

- a) Proporción discreta: se escribe primero una razón, luego los cuatro puntos y después otra razón igual a la primera. Sus cuatro términos son diferentes o sus medios no son iguales. Por ejemplo: $a/b=c/d$ o bien $500\text{Km}/50\text{Km} = 200\text{Km}/20\text{Km}$. Los cuatro elementos se denominan cuarta proporcional y cada término representa una cuarta proporcional de los otros tres.
- b) Proporción continua: se escribe un número como primero y segundo término, un múltiplo o submúltiplo del primero como tercero y el mismo múltiplo o submúltiplo del tercero como cuarto término $a/b=b/c$. Los términos medios o términos extremos son iguales $1/3=3/9$, se denomina tercera proporcional a cada uno de los términos que no son iguales y media proporcional o geométrica al término que se repite (en Bosch, 1994).

En el paradigma clásico, la igualdad $1/3=3/9$ representa la igualdad de los exponentes de las razones en juego, posteriormente cuando se distinguió una razón de su exponente, se sustituye la relación de la proporción $a:b::c:d$ por la de la igualdad numérica $b/a=d/c$ y ambas representaciones fueron consideradas equivalentes (Bosch, 1994). De tal equivalencia se deriva la Propiedad fundamental de las proporciones ($a/b=c/d$ si y sólo si $ad=bc$). De esta propiedad se deriva que, si el producto de los medios es igual al producto de los extremos, es posible calcular cualquier término de una proporción al conocer el valor de los otros tres.

Una segunda propiedad afirma que en toda proporción la suma o la diferencia de antecedentes es la suma o diferencia de consecuentes, como un antecedente es a su consecuente, esto es, $a/b=c/d=(a \pm c)/(b \pm d)$, en términos numéricos $6/12=2/4$ se tiene $(6+2)/(12+4)=8/16$ o bien $6/12=2/4=(6-2)/(12-4)=4/8$. De aquí se desprenden los corolarios de las proporciones, el primero señala que, en toda proporción, un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo, es decir $a/b=c/d$, $a=(b \cdot c)/d$. El segundo corolario afirma que en toda proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio, o sea $a/b=c/d$, $b=(a \cdot d)/c$. Estas propiedades amplían el número de operaciones con las cuales manipular los términos de una proporción.

La igualdad $a/b=c/d$ es ciertamente un modelo escrito que puede provenir del modelo discursivo inicial «a es a b como c es a d»; pero este modelo proporcional fraccionario es semióticamente distinto de la escritura $a:b::c:d$ (que llamaremos modelo proporcional clásico). [...] Con la desaparición tardía del paradigma clásico, [...] se acabará llamando proporción a la igualdad de fracciones, es decir a lo que clásicamente no era más que una condición para la formación de una proporción. [...] El modelo clásico podrá ser dominante y el fraccionario auxiliar (Bosch, 1994, p. 200).

En esta misma perspectiva Dalmau (1938) afirma que cuatro números colocados en un orden determinado, forman una proporción siempre y cuando verifiquen que la razón de los dos primeros sea igual a la de los dos últimos. Así pues, una proporción se conforma por cuatro términos a partir de dos razones donde cada una tiene su antecedente y su consecuente, el primero y el tercer término representan los antecedentes de la proporción mientras que los otros dos representan los consecuentes.

De esta manera se establece la escritura clásica de la proporción, diferente a la forma fraccionaria en la que terminará transformándose, la nomenclatura lineal $a:b::c:d$ se mantendrá pero dejará de ser transparente cuando se imponga el modelo fraccionario $a/b=c/d$, lo que permitiría posteriormente a Dalmau (1938), definir la regla de tres como «la que nos enseña a resolver los problemas que dependen de una o más proporciones» (en Bosch, 1994, p. 170).

2.1.3. La proporcionalidad

La proporcionalidad aparece en diversas situaciones, se vincula con nociones matemáticas como las conversiones de unidades, figuras a escala, semejanza, trigonometría, funciones, porcentajes, razón y la relación entre estas nociones sirve para identificar las relaciones que competen tanto a la proporcionalidad como a otras nociones involucradas (Balderas, Block y Guerra, 2011).

Sin embargo, es importante distinguir entre proporcionalidad y razonamiento proporcional, «el razonamiento proporcional [...] es un prerrequisito para comprender contextos y aplicaciones basados en la proporcionalidad» (Lamon, 2005, p.3), mientras que la proporcionalidad desempeña un rol en las aplicaciones dominadas por los principios físicos como la mecánica, la fuerza, la óptica, la acústica entre otros, implica una relación entre dos variables o dos secuencias de números que se relacionan unas con otras y cualquier combinación lineal de los valores de una corresponde a la misma combinación lineal de los valores que corresponden a la otra (Géron, Stegen y Daro, 2005). En este sentido la proporcionalidad sería una propiedad de las magnitudes cuando su cociente (directa) o su producto (inversa) es constante. Para Bkouche (s.f.), la proporcionalidad es una relación de igualdad, una correspondencia proporcional entre dos tipos de cantidad de A y B, es una correspondencia que asocia cada valor «a» con un tipo de cantidad A y cada valor «b» con un tipo de cantidad B.

Se puede afirmar entonces que, en una relación de magnitudes cuando aparece un número que indica una correspondencia proporcional, alude al factor o constante de proporcionalidad, por ejemplo la relación entre precio por litro de agua y cantidad de litros utilizados son cantidades proporcionales. En el caso siguiente el factor constante de proporcionalidad es 8 pesos.

Litros de agua	1	2	3	4
Precio en pesos	8	16	24	32

Tabla 1. Factor constante de proporcionalidad (Elaboración Propia).

Ahora, el factor constante de proporcionalidad no siempre guarda las mismas relaciones entre magnitudes, Block, et-al., (2010) distinguen esas relaciones en situaciones como las siguientes:

Caso 1	Tiempo	3 h	6 h	9 h
X 70 Km/h	Distancia	210 Km	420 Km	630 Km

Tabla 2. Magnitudes de distinta naturaleza (Block, et-al., 2010, p. 33).

En la situación anterior hay una relación entre dos magnitudes de distinta naturaleza, a cada número de horas le corresponde una distancia y el factor constante de proporcionalidad 70 Km/h constituye un número con unidad, es decir con dimensión, puesto que al tener un movimiento uniforme, la unidad kilómetros por hora (70 Km/h) se convierte en la medida de la velocidad como tercera magnitud.

En el caso 2 la relación entre dos magnitudes es de la misma naturaleza, longitudes, aunque las unidades son distintas (millas y kilómetros), existe dimensión y en tal caso el factor de proporcionalidad se llama factor de conversión.

Caso 2	Kilómetros	1	15	12
X 0.62 millas/Km.	Millas	0.62	9.3	7.44

Tabla 3. Magnitudes de la misma naturaleza y unidades distintas (Block, et-al., 2010, p. 33).

En el caso 3 la relación entre dos magnitudes es de la misma naturaleza y además las unidades son iguales, centímetros. El factor de proporcionalidad no tiene dimensión, la relación se manifiesta al aumentar cuatro veces el tamaño original. En este último caso es posible observar que el factor de proporcionalidad permite la expresión de las relaciones enunciadas con una fórmula, lo que mostraría cierta evolución de la organización clásica, por ejemplo las medidas de la figura B=4x medidas de la figura A.

Caso 3	Figura A	4 cm	5 cm	7 cm
X 4	Figura B	16 cm	20 cm	28 cm

Tabla 4. Magnitudes de la misma naturaleza y unidades iguales (Block, *et-al.*, 2010, p. 33).

Ahora bien, la relación que se establece entre las magnitudes permite ubicar cada situación en determinado campo conceptual de la proporcionalidad, de ahí que se puedan identificar situaciones donde las magnitudes se vinculan de modo proporcional ya sea de modo directo, inverso o compuesto. La situación más común, de proporcionalidad directa, se establece cuando en una relación de dos magnitudes, ambas se multiplican o dividen por el mismo número. Sin embargo, Oller (2012) desarrolla diversas caracterizaciones para presentar la relación directamente proporcional de magnitudes:

1. Por razones internas. Dos magnitudes son directamente proporcionales si la razón entre dos cantidades de una es la misma que la razón entre las dos cantidades de la otra.
2. Por razones externas (o por conservación de un cociente). Dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente entre pares de cantidades correspondientes permanece constante.
3. Multiplicativa. Dos magnitudes serán directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una cantidad de la primera por dos, tres, cuatro, etc., la segunda magnitud también se multiplique o divida por dos, tres, cuatro, etc.
4. Por aumentos o disminuciones. Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye en la misma proporción. Esta caracterización ha sido señalada también como incorrecta dado que no siempre las relaciones entre magnitudes son de proporcionalidad.
5. Caracterización explícitamente funcional. Dos magnitudes son directamente proporcionales si están relacionadas a través de una función lineal $y=kx$ (o análoga).
6. Implícitamente funcional. Existen dos versiones:

- a) Dos magnitudes son directamente proporcionales si están relacionadas mediante una función $y=f(x)$ tal que $f(ax)=af(x)$.
- b) Dos magnitudes son directamente proporcionales si se corresponden en igualdad y, en suma, si están relacionadas mediante una función: $y=f(x)$ tal que $f(a+b)=f(a)+f(b)$.

Para el caso de la proporcionalidad directa, la constante de proporcionalidad cuantifica la regularidad de las cantidades involucradas, por ejemplo la expresión *3 páginas se leen en 6 minutos*, indica una regularidad entre el número de páginas que se leen y el tiempo. Así, la constante de proporcionalidad es $6/3$, minutos/número de páginas, lo que indica que cada página se lee en $6/3=2$ minutos.

Al igual que la directa, la proporcionalidad inversa suele manejarse señalando que dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número. En el mismo sentido Oller (2012) señala que es muy frecuente que las caracterizaciones de una y otra proporcionalidad se encuentren emparejadas de la misma manera, así para la proporcionalidad inversa se encuentran las siguientes:

1. Por razones internas. Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando la razón entre dos cantidades de una de ellas es la razón inversa de la razón entre las dos cantidades que corresponden a la otra.
2. Por conservación de un producto. Dos magnitudes serán inversamente proporcionales si los productos de cantidades correspondientes a las dos magnitudes son constantes.
3. Multiplicativa. Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una cantidad de la primera magnitud por números enteros la cantidad de la segunda magnitud queda dividida o multiplicada por tales números.
4. Por aumentos y disminuciones. Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando aumenta o disminuye una de ellas y la otra lo hace también en la misma proporción.
5. Explícitamente funcional. Dos magnitudes serán inversamente proporcionales si están relacionadas a través de una función $y=k/x$.

6. Implícitamente funcional. Se aplica si al multiplicar una cantidad de la primera magnitud por un número, la cantidad correspondiente a la segunda cantidad queda dividida por el mismo número. Están relacionadas mediante una función del tipo $y=f(x)$ tal que $f(ax)=f(x)/a$.

En este tipo de proporcionalidad, se precisa una cantidad constante, sin posibilidades de modificarse e independiente de la condición de regularidad, por ejemplo: *Para llenar un depósito de agua 3 llaves tardan 12 horas, si se abren 5 llaves ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el depósito?* El problema tiene la condición de regularidad, todas las llaves vierten la misma cantidad de agua por hora, también existe una constante de proporcionalidad, la capacidad del depósito no varía y es la misma condición para ambas situaciones (3 llaves y 5 llaves). Al no variar la cantidad del depósito se identifica como proporcionalidad inversa en la que se busca la cantidad desconocida a través del valor unitario. Así, una sola llave tardará $12 \cdot 3 = 36$ horas y, abriendo las 5 llaves se tardará $36/5 = 7.2$ horas.

2.1.4. Implicaciones de la Organización Clásica

Desde la perspectiva de Bosch (1994), la aritmética ha representado el entorno primordial de la proporcionalidad al plantear la relación funcional entre dos variables, sin embargo, afirma, este reduccionismo llevó en un momento dado a que Postigo (1954, en Bosch, 1994) ampliara esta visión al considerar que las cantidades variables dependientes entre sí, pueden relacionarse de formas desiguales lo que conduciría necesariamente a una diversidad de sistemas, entre las que se encuentran los sistemas directamente proporcionales y los inversamente proporcionales o recíprocamente proporcionales.

Por lo general, en los problemas de proporcionalidad se parte de sistemas con dos magnitudes que aparentemente son proporcionales, por ejemplo: cantidad de mercancía y precio, cantidad de trabajo y número de obreros, de modo tal que la noción de proporcionalidad se vincula con esos sistemas que, para la organización clásica, representan el primer modelo de la relación de proporcionalidad. La existencia de la proporcionalidad entonces se basa en que la relación entre magnitudes cumpla con algunas condiciones para establecer su proporcionalidad. Al seguir esta idea, Comin (2000, en García, 2005) propone tres tipos de razones para justificar la proporcionalidad del sistema:

- *Una ley física.* El sistema puede inducir la ley, por ejemplo en el sistema formado por el número de hojas de papel en un paquete y su grosor, aparecen restricciones del propio sistema, que las hojas sean siempre del mismo tipo. La ley física aparece al establecer que el grosor de n hojas de papel es n veces el grosor de una hoja.
- *Necesidad matemática o lógica.* Un ejemplo, los alumnos deberán construir un rompecabezas ampliado tomando en cuenta que un segmento de 4 centímetros del rompecabezas original medirá ahora 7 centímetros, la necesidad lógica estipula que las piezas encajen perfectamente, con ello se justificaría la relación del sistema.
- *Convención social.* Es una acción del entorno sobre el sistema mediante una convención social que podría modificarse si existiera una variante a la relación entre magnitudes algo como «compre tres y pague dos».

A decir de Bolea (2002), en un problema de proporcionalidad simple hay cuatro cantidades a, b, c, x , las dos primeras se asocian a una magnitud M mientras que las segundas a una magnitud M' , la correspondencia entre una y otra vincula a con c y b con x que resulta desconocida⁴.

La organización clásica propone un modelo de la relación entre ambas magnitudes en función de las cantidades a, b, c y la x . Tal relación pudiera ser directa o inversa lo que se traduciría en una ecuación proporcional, $a/b=c/x$ en la proporcionalidad directa y $a/b=x/c$ en la proporcionalidad inversa. En estos casos la técnica para resolver la ecuación proporcional se justifica con el sistema técnico-tecnológico de la Teoría de las Razones y Proporciones donde se expresan las siguientes reglas que a la vez son técnicas de resolución:

- a) Si x constituye un extremo, entonces se multiplican los medios y se divide por el otro extremo, es decir $x=bc/a$, este caso resulta en una situación directa.

~~~~~  
4. Esta situación corresponde al campo conceptual de las estructuras multiplicativas en donde todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los que es necesaria una multiplicación, una división o bien la combinación de ambas. Diversos conceptos matemáticos se encuentran involucrados en las situaciones derivadas de las estructuras multiplicativas, entre éstos están el de función lineal, no lineal, espacio vectorial, análisis dimensional, fracción, razón, número racional, multiplicación y división (Vergnaud, 1990).



- b) Si  $x$  es un medio, entonces se multiplican los extremos y se divide entre el otro medio,  $x=ac/b$ , donde se tiene una situación inversa.

Estas técnicas resultan eficientes para resolver los problemas de proporcionalidad simple característicos de la organización clásica, no obstante sus limitaciones se encuentran en el nivel tecnológico-teórico. En la primera situación la Teoría de las Razones y Proporciones se utiliza para particularizar un tipo de relación entre magnitudes, pero con nuevas herramientas algebraicas y funcionales se podría trabajar este mismo tipo de problemas en otros ámbitos: economía, estadística, ingeniería, medicina, geología, química y física, entre otros. En la segunda situación, el discurso que justifica la regla de tres se basa en evidencias culturales asociadas con la manipulación de magnitudes, lo que no permite proponer una tecnología con posibilidades de explicar las variaciones técnicas de la regla de tres inversa y compuesta. Sin esta tecnología, el uso de esas técnicas en la práctica, limitan a los problemas de proporcionalidad inversa y compuesta a problemas de proporcionalidad simple entre una magnitud y la inversa de otra o entre una magnitud y el producto de otras (Bolea, 2002).

#### 2.1.5. *Los sistemas proporcionales*

Los problemas de proporcionalidad de la aritmética clásica pueden describirse de la siguiente manera: «Consideremos un sistema caracterizado por dos variables reales ( $u$ ,  $v$ ) tales que  $v=f(u)$ , donde  $f$  es una función lineal de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . Se supone que  $f$  viene determinada por un par de valores ( $a$ ,  $c$ ) con  $c=f(a)$ . Dado un valor  $b$  de la variable  $u$ , se trata de determinar el valor correspondiente de la variable  $v$  (es decir de  $f(b)$ )» (Bosch, 1994, p. 211).

Entonces los sistemas proporcionales se caracterizan por dos variables definidas por uno de sus estados ( $a$ ,  $c$ ) y se trata de determinar el otro estado ( $b$ ,  $x$ ) donde se conoce el valor de  $b$ . Este tipo de sistemas se denominan «directamente proporcionales», de ellos se desprenden los problemas de proporcionalidad simple y directa, mientras que la proporcionalidad inversa se caracteriza mediante una función «hiperbólica» donde  $f(u)=k/u$  para cierta constante  $k \neq 0$ , se hace referencia a los sistemas inversamente proporcionales. Son estos tipos de problemas los que justifica la Teoría de las Razones y Proporciones, también donde las ecuaciones proporcionales fungen como modelos de estos sistemas que permiten la producción de conocimientos sobre los sistemas en la búsqueda de  $x$ .

Desde otra perspectiva Busquets (s.f., en Bosch, 1994), afirma que un sistema proporcional es un sistema de dos variables modelizable por una proporción, dos magnitudes variables que se relacionan entre sí de modo tal que una de ellas dependa de la otra serán proporcionales, es decir, si entre dos valores de la primera y los correspondientes con la segunda se establece una proporción. Tales criterios son los que definen si un sistema es proporcional o no y se pueden distinguir diversos tipos de tareas (T) que aluden a una relación de proporcionalidad:

*a) Tareas del valor faltante.*

Son situaciones que se resuelven con una multiplicación o una división, se identifican porque se conocen tres términos y se desconoce uno (Block, 2010). Una tarea típica del valor faltante es: *si se pagan \$18 pesos por 2 kilos de naranja, ¿cuánto se pagará por 5 kilos?* En esta tarea se plantea una relación de dos magnitudes proporcionales que pueden representarse de la siguiente manera:

| Peso en Kg. | Costo en pesos |
|-------------|----------------|
| 2           | 18             |
| 5           | ?              |

No se especifica cuánto cuesta 1 kilo de naranja, a este valor se denomina valor unitario dado que designa el valor de una magnitud que corresponde a una unidad de la otra magnitud. En toda relación entre dos magnitudes existen dos valores unitarios, en el ejemplo el segundo valor unitario es la cantidad de naranjas que se daría por un peso.

Block (2010) ilustra otros tipos de situaciones que corresponden al valor unitario, por ejemplo cuando el valor unitario no es un número entero y la razón interna sí lo es: *Si 4 canicas cuestan 3 pesos, ¿cuánto costarán 12 canicas?* El valor unitario de cada canica es de \$0.75, la razón interna es un número entero, tres porque 12 canicas constituyen el triple de cuatro canicas. En otros casos la razón interna no es entera, por ejemplo: *Si se dan 4 saltos y se avanzan 6 metros en total, al dar 6 saltos ¿cuántos metros se avanza?*, el valor unitario no es entero, un salto corresponde con  $1\frac{1}{2}$ ; la razón interna no es entera, es  $\frac{4}{6}$ , lo que llevaría a un procedimiento multiplicativo para su resolución. Cuestiones como la anterior permiten comprender que el valor unitario y el factor de proporcionalidad

lidad son diferentes, el valor unitario remite a una relación entre dos cantidades mientras que el factor de proporcionalidad es un número jugando el papel de multiplicador: X3.

#### *b) Tareas de comparación*

Las tareas de comparación son tareas donde la razón es el objeto mismo de la pregunta a través de una cualidad (Block, et-al., 2010), por ejemplo cuando se compara el sabor de una limonada éste no depende exclusivamente de los vasos de jugo, también de la cantidad de vasos de agua, es decir hay una relación entre ambas cantidades que puede plantearse como: *Tres vasos de agua por dos vasos de jugo o cinco vasos de agua por dos de jugo*. El porcentaje también es propio de algunas tareas de proporcionalidad, calcular el porcentaje de una cantidad determinada equivale a resolver una actividad relacionada con magnitudes directamente proporcionales.

Otras tareas relacionadas con la proporcionalidad son aquellas donde se aplican de manera sucesiva dos o más factores de proporcionalidad  $m$  y  $n$ , que equivale a aplicar el factor  $(m \cdot n)$  (Block, et-al., 2010), ejemplo de este tipo de tareas son las situaciones de escala: la figura Y es una ampliación de la figura X, los lados de la figura Y miden el doble de los lados de la figura X mientras que los lados de la figura Z miden el triple de los lados de la figura B.

La proporcionalidad múltiple también constituye un tipo de problemas de este campo y se caracterizan porque una magnitud es proporcional a otras dos o más, Block (2010) lo ejemplifica así: *Para calcular la cantidad de agua que se necesitará en una excursión, se estima que por cada tres días y por cada cinco niños se requieren 20 litros, ¿cuántos litros se necesitarán si la excursión tendrá una duración de 15 días y se tendrá una asistencia de 20 niños?*, en esta tarea los litros de agua son proporcionales a dos magnitudes, el número de niños (siendo constante el número de días) y el número de días que dura la excursión (siendo constante el número de niños), en esta situación tanto la magnitud número de niños como número de días no son interdependientes. Este problema es de proporcionalidad compuesta porque la relación se establece entre más de dos magnitudes y dicha relación que puede ser directa o inversamente proporcional.

Una definición más elaborada señala que «Una magnitud es proporcional (de forma compuesta) a otras varias cuando es proporcional (directa o inversamente) a cada una de ellas al permanecer fijas las restantes» (Oller, 2012, p.

86). Un ejemplo sería: *Seis albañiles construyen 36 metros cuadrados en 12 días, ¿cuántos metros cuadrados construirán 8 albañiles en 16 días?* En este problema hay tres magnitudes: número de albañiles, metros cuadrados construidos y días trabajados. El resultado que se pide son metros cuadrados construidos, por lo que es necesario ver la relación que tienen las otras dos magnitudes respecto a la variable resultado:

- Albañiles y metros construidos: relación directamente proporcional.
- Días y metros construidos: relación directamente proporcional.

Se puede apreciar que cuando hay una relación directa entre magnitudes, la razón de las cantidades de la primera magnitud multiplicada por la razón de las cantidades de la segunda magnitud es igual a la razón de las dos cantidades de la tercera magnitud.

#### *2.1.6. Las técnicas en la Organización Clásica*

En el tenor de Bosch (1994), se puede decir que la organización clásica y sus situaciones de proporcionalidad son un conglomerado de objetos y prácticas adyacentes a las razones y proporciones constituido por: a) las magnitudes proporcionales, b) las técnicas y, c) el conjunto de tareas que permiten resolver. Por ello, resulta relevante identificar el tratamiento que la organización clásica da a la proporcionalidad destacando las técnicas que propone para la resolución de los problemas, de igual forma es importante revisar otras técnicas que pudieran no ser parte de la organización clásica pero que posibilitarán identificar los límites teóricos sobre el tratamiento clásico de las situaciones de proporcionalidad, estos aspectos serán abordados a partir del análisis de los sistemas proporcionales, su caracterización, composición y funcionalidad.

#### *La regla de tres*

En la organización clásica, la técnica más asociada con los problemas de proporcionalidad es la regla de tres, un estereotipo claro con una funcionalidad evidente que no se cuestiona porque se supone que puede establecerse en un conjunto de instituciones cuando es aceptable en ese medio institucional, si ocurre lo contrario la institución cuestiona su pertinencia y eventualmente puede rechazarla. La «regla de tres» ha sido descrita como:

Un procedimiento aplicable a la resolución de aquellas cuestiones en que, conociéndose valores simultáneos de dos o más magnitudes directa o inversamente proporcionales, deba averiguarse el valor que a una de ellas corresponda al dar un nuevo valor a la otra u otras (Busquets, s.f. en Bosch, 1994, p. 225).

Por ello resulta útil en un sistema aparentemente proporcional donde existen tres números conocidos y se pide encontrar el valor de un cuarto «x» denominado cuarta proporcional. El procedimiento a seguir sería multiplicar el tercer número por el segundo y dividir el resultado por el primero. No obstante su sencillez «... esta técnica primitiva se volvió no evidente, poco comprensible e incluso inaceptable [...] acabó pareciendo puramente mecánica» (Bosch, 1994, p. 225) por esta razón, nos dice esta autora, en el contexto de la organización clásica se buscó legitimarla epistemológicamente promoviendo una ejecución rápida y fiable, capaz de superar dificultades como el manejo de los números fraccionarios, el trabajo con magnitudes inversamente proporcionales y con más de dos magnitudes proporcionales. Al parecer esta legitimidad garantizó su presencia en la matemática escolar, pero cuando la organización clásica evoluciona, se modernizan las técnicas y surgen unas nuevas que coexisten con la regla de tres.

#### b) *La reducción a la unidad*

En los sistemas de proporcionalidad directa también se usaba el método de reducción a la unidad que puede ser considerado como la técnica primitiva cuya evolución y desarrollo permitió el origen de la organización clásica. Un ejemplo derivado de esta técnica se encuentra con Leyssenne (1878, en Bosch, 1994) quien plantea un problema similar al siguiente: *Cinco metros de tela cuestan 20 pesos. ¿Cuánto cuestan 3 metros de la misma tela?*

Para solucionarlo se determina el carácter directo o inverso del sistema y se crea un modelo tabular clásico en el que se asume que los metros y los pesos son directamente proporcionales, de esta manera incluye los datos sobre líneas horizontales señalando como X a la incógnita:

|          |          |
|----------|----------|
| 5 metros | 20 pesos |
| 3 metros | X pesos  |

El modelo tabular permite comprender que, si 5 metros cuestan 20 pesos, 1 metro costará 5 veces menos o, 3 metros costarán 3 veces menos o  $(20 \cdot 3)/5$ . Al realizar la operación se tiene que:

$$X = (20 \cdot 3)/5 = 12 \text{ pesos}$$

Cuando se afirma «veces menos» o «veces más», se establece la linealidad de la función y se señala la operación que deberá desarrollarse, de esta manera el método de reducción a la unidad se justifica a sí mismo con el simple hecho de llevarse a cabo, es decir, en tanto que los elementos trabajados en la resolución son parte del enunciado del problema, esto los hace objetos culturalmente familiares y sus propiedades no son cuestionadas. Busquets (s.f., en Bosch, 1994), denominaría procedimiento práctico al proceso de deducción a través de la comparación de los valores conocidos de una magnitud, si el valor de la incógnita es mayor o menor que el término homogéneo con ella, en el ejemplo anterior el término homogéneo a X es 3m y se identifica que se está multiplicando dicho término por el mayor (20 pesos) y dividiéndolo por el menor de los de la otra magnitud (5 metros), o procediendo de modo inverso.

La tecnología que justifica esta técnica sólo demanda al conjunto de conocimientos que la misma cultura ha designado a los sistemas estudiados. No obstante, este soporte tecnológico también se constituye como una restricción para la resolución de otros tipos de problemas, sobre todo aquellos en los que la reducción a la unidad lleva a razones cuyo exponente carece de un valor numérico susceptible de ser interpretado en términos del sistema, un ejemplo es el siguiente: *Si para elaborar 73 ladrillos se requieren 6 albañiles, para elaborar un ladrillo ¿cuántos albañiles se necesitan?* Como puede apreciarse, esta situación se torna irreal en el sistema planteado y aunque pueda resolverse exitosamente mediante la reducción a la unidad o la regla de tres, el resultado resulta absurdo, lo que significa que el sentido del problema no obedece al tipo de técnica empleada sino a la naturaleza del planteamiento.

De acuerdo con Bosch (1994) en esta situación se aprecia un ejemplo del trabajo institucional sobre una técnica, es decir, se cumple con un mecanismo previamente dominado que aparentemente se adapta a cualquier tarea de proporcionalidad, sin embargo el proceso de fragmentación institucional de las técnicas genera dificultades semánticas y sintácticas, porque las diferentes ver-

siones de una misma técnica suelen provocar obstáculos en la comprensión de las prácticas realizadas en diversas instituciones, es decir, si una técnica ha sido instaurada en una institución como verdadera, los contextos deberán ajustarse a dichas técnicas para resultar compatibles.

Ahora bien, la permanencia de las organizaciones clásicas de la proporcionalidad en las instituciones educativas se asocia con el tipo de representaciones que se utilizan y el tipo de cuestiones en las que se inscribe la modelización funcional. Esto significa que si de lo que se trata es de resolver problemas de proporcionalidad simple, las técnicas justificadas por la Teoría de las Razones y las Proporciones no se comparan con las funcionales en términos de sencillez y facilidad. En este mismo sentido, para Bolea (2002) la organización clásica puede ser eficiente en su ámbito particular, aunque sus limitaciones se ubican en el nivel tecnológico-teórico y afectan tanto la función de descripción de la organización como la de justificación de las técnicas.

Finalmente, debe resaltarse que la organización clásica de la proporcionalidad, en tanto marco centrado en la Teoría de las Razones y las Proporciones, tuvo como principal objetivo permitir la resolución de problemas de proporcionalidad y una transición hacia otro tipo de organización, la modelización funcional.

## 2.2. SISTEMAS PROPORCIONALES Y MODELIZACIÓN FUNCIONAL

Las organizaciones matemáticas determinan los tipos de tareas y las técnicas que se han enseñado en las instituciones escolares, si el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) de Bosch (1994) y Bolea (2002) se inscribe en el enfoque clásico de la proporcionalidad, el de García (2005) se inserta en la reformulación de los procesos de estudio e investigación de las relaciones funcionales entre magnitudes, con lo que establece una actualización al modelo clásico.

La diferencia fundamental es que García (2005) desarrolla su modelo (funcional) con la intención de que los alumnos realicen la modelización matemática y el recorrido que propone intenta cubrir tres niveles de algebrización de la proporcionalidad, mientras que Bosch (1994) y Bolea (2002) intentan más bien la construcción de un modelo que se circunscribe al concepto de proporcionalidad.

La relación entre dos conjuntos que manejan cantidades es proporcional si hay un número que al multiplicarlo por cualquier valor de un conjunto se obtiene el valor que le corresponde en el otro conjunto, por tanto si los valores de un conjunto se representan con la letra  $x$ ; los del otro conjunto con la letra

y; y la constante de proporcionalidad con la letra  $k$ , la fórmula de una relación de proporcionalidad es:  $y=kx$ , lo que indica una función lineal. Un ejemplo de las afirmaciones anteriores se observa en una tarea donde se debe completar una tabla como la siguiente:

| $x$ | $y$  |
|-----|------|
| 2.5 | 7.5  |
| 3.3 | 9.9  |
| 4.2 |      |
|     | 17.4 |
| 6.8 |      |

La relación entre las magnitudes  $x$  e  $y$  (tres veces  $x$ ) es el valor de  $y$ , la constante de proporcionalidad se encuentra dividiendo  $y/x$ ,  $k=3$ , es una relación proporcional directa o una función lineal en tanto que se relacionan dos magnitudes directamente proporcionales y se puede expresar como  $y=kx$  o bien  $f(x)=kx$ . A decir de Block (et-al, 2010) «...el paso de la proporcionalidad a la función lineal implica un cambio de estatuto de la constante de proporcionalidad [...] se debe pasar de la razón [...] a la cuantificación de la razón con un número [...] y al factor sin dimensión» (p. 108). Esto indica que la transición de una a otra radica en que la proporcionalidad plantea una relación entre dos conjuntos de magnitudes mientras que la función establece una relación entre dos conjuntos de números. Dicha transición implica el dominio de nociones como la variación y dependencia.

Por otra parte, la proporcionalidad alude a tareas en las que existe una relación invariante especial (constante) entre dos magnitudes covariantes, es decir las cantidades de ambas se relacionan y cambian simultáneamente. Tal modelo matemático en las relaciones directamente proporcionales se vincula con la función lineal de la forma  $y=kx$ . Así,  $y$  es un múltiplo de  $x$ . Dos cantidades serán proporcionales cuando varían de modo que mantienen una razón constante  $y/x=k$ . Dichos modelos tienen una estructura semántica entre función y proporcionalidad, la tarea influye en cómo deben ser consideradas, sin embargo la diferencia entre ambos tiene una fuerte carga tecnológica y teórica. La constante de proporcionalidad cambia en cada contexto y representación



de las situaciones proporcionales y no aparece de forma explícita, sino que se conforma como un elemento estructural que deberá ser descubierto mediante la interpretación del resto de la información planteada en la situación problemática (Valverde, 2012). Este tipo de modelización se caracteriza por integrar a la proporcionalidad en un marco más amplio, el de las relaciones funcionales entre magnitudes<sup>5</sup> y parte del siguiente modelo mediante el cual se encontrará la solución con la expresión  $x = bc/a$

$$f(a) = c$$

$$f(b) = x$$

$$f \text{ lineal}$$

Cabe destacar que la modificación en la representación de los sistemas de variación, como la que se presenta, permite la generación de nuevas técnicas de solución que representaron una evolución de las modelizaciones ligadas a las técnicas clásicas.

### 2.2.1. La algebrización de la proporcionalidad

Para comprender el proceso que llevó a la proporcionalidad hacia la algebrización, García (2005) construye un modelo epistemológico de referencia (MER) para los sistemas de variación entre magnitudes, para ello recupera el trabajo de Bolea, Bosch y Gascón (2001) en el que se describe un proceso de algebrización hipotético de los sistemas proporcionales.

El punto de partida de García (2005) es la descripción de la organización matemática clásica propuesta por Bosch (1994) en la que surge el estudio de las tareas de proporcionalidad estereotipadas. El marco tecnológico-teórico es la Teoría Clásica de las Razones y las Proporciones y desde esta perspectiva lo proporcional del sistema está dado de antemano sin cuestionarse por que en el marco tecnológico-teórico no hay herramientas para distinguir si un sistema es o no proporcional. Más adelante tal organización matemática (clásica) se amplía con la incorporación de problemas de proporcionalidad compuesta, repartos proporcionales, interés simple, entre otros.

5. Si bien existen diferentes relaciones funcionales entre magnitudes que no se circunscriben a la proporcionalidad y que por ello no son parte de las praxeologías matemáticas en la escuela primaria que es el contexto en el que de algún modo se desarrolla la presente investigación, se considera que su análisis permite una comprensión más amplia de los sistemas proporcionales.

Luego de este análisis, García (2005) examina tres niveles de algebrización de la modelización algebraica y, si bien el primer nivel corresponde con el punto de partida de la modelización, se queda en el universo clásico sólo como una actualización ostensiva con los recursos del álgebra, es decir mediante la noción de ecuación se actualiza la proporcionalidad del modelo clásico.

*a) Primer nivel de algebrización*

En este nivel la intención es modelizar los tipos de proporcionalidad a través de ecuaciones, surge entonces la intención de describir la relación entre magnitudes, la evolución de las técnicas «clásicas» (regla de tres y reducción a la unidad) y la tecnología de la organización clásica (Teoría de las Razones y Proporciones). La relación de proporcionalidad deja de caracterizarse por proporciones (como igualdad de razones homogéneas) para expresarse por medio de ecuaciones:

Dos magnitudes  $x$  e  $y$  son directamente proporcionales cuando se puede establecer una correspondencia entre ellas de tal forma que, entre una cantidad cualquiera  $x$  de  $X$  y su correspondiente  $y$  de  $Y$  se cumpla la relación  $y=k \cdot x$  para un determinado valor constante (Bolea, 2002, p. 206).

De esta perspectiva emerge el coeficiente de proporcionalidad, la constante de proporcionalidad o el factor de conversión  $k$ , cuyo valor depende de las unidades con las que se expresa  $x$  e  $y$ . La proporcionalidad simple inversa se expresa a través de la ecuación  $x \cdot y = k$ , o bien,  $y = k/x = k \cdot x^{-1}$  y, como puede apreciarse, en esta perspectiva se unifican los problemas de proporcionalidad directa e inversa y los de proporcionalidad compuesta. «En el caso de la proporcionalidad compuesta, se dirá que  $y$  es directamente proporcional a  $X_1, X_2, \dots, X_i$  e inversamente proporcional a  $X_{i+1}, \dots, X_n$  (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, p. 276, en García 2005, p. 196).

La modelización de la relación a través de una ecuación implica la evolución e integración de las técnicas clásicas (reducción a la unidad, regla de tres directa, inversa y compuesta, etc.) aunque en este nivel no se amplía el tipo de problemas propios de la organización clásica, pero se dejan de lado las proporciones entre magnitudes y se introducen las ecuaciones entre medidas de cantidades de magnitud, aquí surge una diferencia en el nivel tecnológico-teórico, porque la relación de proporcionalidad entre magnitudes se convierte en rela-

ción de proporcionalidad entre variables numéricas que representan medidas de cantidades de magnitud (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, en García, 2005).

*b) Segundo nivel de algebrización*

En este nivel se integran todas las posibles relaciones proporcionales del primer nivel para incluirse en un modelo unificado a través de una ecuación algebraica y se consideran todas las relaciones de proporcionalidad como casos particulares de una función  $f$ . Este modelo se muestra a partir de diversas variables reales, homogénea de grado  $\pm 1$  con respecto a cada una de ellas a través de la expresión siguiente (García, 2005, p. 196):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k \cdot x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \quad e_i = \pm 1$$

Donde  $x_i$  representa a las cantidades de una magnitud  $X_i$ , en relación directa o inversamente proporcional con las otras cantidades de magnitud  $Y$ , por su parte  $k$  representa la constante de proporcionalidad. Para interpretar esta expresión y los problemas clásicos de la proporcionalidad es necesario un cambio en el marco tecnológico-teórico de esta organización matemática, dado que se requiere de una tecnología matemática que, a diferencia de la teoría de las razones y proporciones, justifique los productos y cocientes de magnitudes. La inexistencia de esta tecnología, menciona García (2005) da cuenta de por qué este segundo nivel de algebrización se encuentra ausente en la organización matemática escolar (clásica) cuya fundamentación en la teoría cultural de las magnitudes no incluía la mayor parte de los productos ni de los cocientes de magnitudes.

*c) Tercer nivel de algebrización*

En un tercer nivel de algebrización que corresponde al momento en que el trabajo matemático «sabio» superó la necesidad de expresar toda relación entre magnitudes mediante proporciones, afirma García (2005), se puede prescindir de la Teoría de las magnitudes como componente tecnológico y adoptar la Teoría algebraica de funciones reales de variable real, en tanto que es una teoría matemática rigurosa de los números reales sobre medidas de magnitudes continuas involucradas en aquello que se esté estudiando.

Desde esta perspectiva «la relación de proporcionalidad se establece como una relación muy particular al lado de muchas otras posibles: relaciones cuadrá-

ticas, polinómicas, irracionales, etc.» (Bolea, 2002, p. 209), así pues, en este nivel se manifiesta una transformación respecto al trabajo de modelización dado que en lugar de cuestionar si los pares de magnitudes (compuestas) son proporcionales se cuestiona el tipo de relación que se puede dar entre dos magnitudes dadas.

### 2.2.2. Los sistemas modelizables

Como se puede observar, el modelo epistemológico de García (2005) representa la ampliación de los sistemas modelizables, porque va más allá de los sistemas de proporcionalidad y se extiende a los tipos particulares de relaciones funcionales entre magnitudes (tercer nivel de algebrización). Algunas de sus aportaciones resultan de interés para este trabajo al dilucidar ciertas técnicas y tecnologías propias al campo de la proporcionalidad cuando plantea la construcción de diferentes modelizaciones de los sistemas lineales<sup>6</sup> y equitativos<sup>7</sup> estructurando cuatro organizaciones matemáticas (García, 2005):

- Una organización discursiva y/o tabular, cercana a la descripción del tipo de variación que caracteriza al sistema. La actividad matemática posible resulta muy limitada, esto significa la construcción de algunos nuevos estados a partir de uno o varios conocidos.
- Una organización caracterizada por las relaciones entre estados a través de razones y proporciones homogéneas, pero no cada estado de modo independiente. La actividad matemática se restringe a la determinación de nuevos estados.
- Una tercera organización donde la posibilidad de caracterizar la relación entre estados a través de razones heterogéneas y proporciones favorece su evolución en la caracterización de cada estado por medio de una ecuación. Esta organización permite además calcular nuevos estados, caracterizar la relación (a través de una constante) y plantear

6. Los sistemas lineales son considerados también como sistemas proporcionales directos y a la relación que se da entre las cantidades de las dos magnitudes se le denomina relación de proporcionalidad. Pueden ser considerados como aquellos cuyos estados evolucionan en una condición de linealidad. Al corresponderse con situaciones donde la relación entre magnitudes es proporcional directa, los tipos de problemas corresponden al cálculo de la cuarta proporcional (García, 2005).

7. La condición de que para todo  $k \in M$ , existe un único  $k' \in M'$  tal que, si  $a_{i+1} = a_i + k$ , entonces  $a'_{i+1} = a'_i + k'$ , «[...] es cierta para cualquier subconjunto de cantidades de la magnitud  $M$ , sea éste finito o no, o bien entre conjuntos numéricos formados por medidas de estas cantidades de magnitud, fijadas sendas unidades en  $M$  y en  $M'$  » (García, 2005, p. 203). Esto es considerado como una clase de sistemas denominados equitativos.

ciertas cuestiones en el nivel tecnológico, lo que corresponde al primer nivel de algebrización.

- Una cuarta organización donde los objetos ostensivos se modifican poco respecto a la anterior, sólo se introduce un cambio en el marco teórico para favorecer la interpretación de la relación entre las magnitudes del sistema como una relación funcional entre los conjuntos (numéricos) de las medidas de las cantidades de magnitud relacionadas entre sí, lo que compete al segundo nivel de algebrización.

### 2.2.3. Técnicas de modelización o modelizaciones «algebroides»

Si bien el método de reducción a la unidad se constituye como una versión elemental de la proporcionalidad clásica propia de la aritmética, en el momento que se pretende la manipulación de proporciones a través de la ecuación, se establece una transición hacia el álgebra elemental donde el modelo principal del sistema de estudio ya no es un discurso como tal, sino una ecuación proporcional, es decir un ostensivo<sup>8</sup> escrito que se manipula para establecer un modelo que lo resuelve. Esta modificación generó un nuevo tipo de técnicas de modelización denominadas «algebroides», al inicio parecía que sólo transformaban el tipo de representación, sin embargo a esta modificación le siguieron cambios semióticos e instrumentales que se visualizan en el siguiente ejemplo: *Si 8 paquetes de lápices cuestan 160 pesos, ¿cuánto cuestan 50 paquetes de lápices?* (Bosch, 1994).

El problema quedaría representado con la ecuación  $8/50=160/x$ , simplificando se puede obtener la ecuación  $4/25=160/x$ . Entonces se aplica la propiedad fundamental de las proporciones geométricas, que indica que el valor de  $x$  (extremo) es igual al producto de los medios (25 y 160) producto que se divide por el otro extremo (4). Se tiene entonces que la expresión desarrollada sería  $x=(25 \cdot 160)/4=1000$ .

A diferencia de la notación clásica, donde no era evidente el trabajo con los medios y los extremos, la igualdad fraccionaria propia del ejemplo anterior permite observar la posición bidimensional de los números tal y como se aprecia en

8. A decir de Bosch (1994), los objetos ostensivos son aquellos con una naturaleza sensible, con una materialidad que puede mostrarse como una realidad perceptible y se caracterizan por ser concretamente manipulables por el sujeto. Un objeto ostensivo puede ser cualquier objeto material como los sonidos, los grafismos y los gestos. En otros términos, los ostensivos son aquellos medios en los que se puede «mostrar» u «ostentar» determinado objeto matemático.

el modelo tabular y facilita además la transición desde la tabla de números hasta la ecuación proporcional. Dicha transición se representa de la siguiente manera:

|          | <i>Cantidades principales</i> | <i>Cantidades relativas</i> |                            |
|----------|-------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| Supuesto | 8 paquetes                    | 160 pesos                   | $\rightarrow 8/50 = 160/x$ |
| Pregunta | 50 paquetes                   | x pesos                     |                            |

Tabla 5. De la tabla de números a la ecuación proporcional (Bosch, 1994).

A decir de Bosch (1994), en esta esquematización las dos notaciones no son semiótica e instrumentalmente iguales, con la notación fraccionaria se pierde la fuerza de la notación proporcional respecto a la manipulación de razones entre números fraccionarios, para observar dicha situación se modifican los datos de números enteros a números fraccionarios por ejemplo  $2/3$  de metro y 5 de metro en lugar de 8 y 50 paquetes para cambiar las condiciones de trabajo sobre el modelo proporcional. Esta modificación permite el paso hacia la algebrización y el uso de técnicas algebraicas no consideradas en los sistemas proporcionales clásicos, pero las técnicas algebraicas no se quedaron en la proporcionalidad, sólo fueron una actualización ostensiva.

Para esquematizar la descripción de las técnicas propias de la organización clásica veamos lo que plantea García (2005). Para él, las técnicas propias de la organización clásica son las siguientes:

- *Modelizaciones verbales (MRU)*. Suponen la activación de técnicas discursivas a partir de los datos del sistema, pueden estar apoyadas o no en registros escritos. La forma estandarizada de este trabajo es conocida como método de reducción a la unidad.
- *Modelización proporcional clásica (MPC)*. corresponde a la modelización en términos de razones y proporciones.
- *Modelización algebroide (MA)*. Constituye una modernización ostensiva de la modelización proporcional clásica dado que cambia el discurso tecnológico, al plantear un esquema algebraico que justifica la manipulación de los ostensivos pero se mantiene el marco teórico de las razones y las proporciones.

Al seguir a García (2005) la actualización que desde el modelo funcional se hace a las diferentes formas de modelizar los sistemas de variación entre magnitudes se muestra en la siguiente descripción:

|             |               |                                                                        |
|-------------|---------------|------------------------------------------------------------------------|
| $f(a) = c$  | $\rightarrow$ |                                                                        |
| $f(b) = x$  | Trabajo       | $f(a) = ka = c \Rightarrow k = c/a \Rightarrow x = f(b) = kb = (c/a)b$ |
| $f(u) = ku$ | del modelo    |                                                                        |

Tabla 6. La Modelización funcional analítica (modernización del MRU) (García, 2005, p. 125).

Esta técnica de modelización no sólo es una evolución de la regla de tres clásica, sino que replantea la tecnología clásica de las magnitudes proporcionales y por ende a los sistemas proporcionales. Es de comprender que estos sistemas se conforman por dos variables reales que se encuentran vinculadas por una función lineal  $f$ . La técnica determina la expresión analítica de la función  $f$  a partir de su valor en un punto:  $f(u)=c/a(u)$ , donde la constante  $k$  denominada constante de proporcionalidad puede contener una interpretación cultural del sistema del tipo «precio por unidad de producto», «distancia recorrida por unidad de tiempo», etc. (Bosch, 1994).

|             |               |                 |             |
|-------------|---------------|-----------------|-------------|
| $f(a) = c$  | $\rightarrow$ |                 |             |
| $f(b) = x$  | Trabajo       | $f(a) = ka = c$ | $a/b = c/x$ |
| $f(u) = ku$ | del modelo    | $f(b) = kb = x$ |             |

Tabla 7. La Modelización funcional analítica (modernización de la MPC) (García, 2005, p. 125).

La modelización anterior se aproxima a las modelizaciones con proporciones por lo que se puede hablar de una modernización de la MPC en su tecnología, en tanto que la variación de su trabajo técnico es más económica en virtud de la determinación del coeficiente  $k$ .

|                 |               |                                  |
|-----------------|---------------|----------------------------------|
| $f(a) = c$      | $\rightarrow$ |                                  |
| $f(b) = x$      | Trabajo       | $x = f(b) = b/a \ f(a) = (b/a)c$ |
| $f(au) = af(u)$ | del modelo    |                                  |

Tabla 8. Modelización funcional sintética (García, 2005, p. 125).

Con estos ejemplos se observa que el MER de García (2005), constituye una ampliación y complementación praxeológica de los modelos propuestos por Bosch (1994) y Bolea (2002). De tal ampliación se deriva la caracterización de los distintos tipos de relación entre variaciones de dos magnitudes relacionadas unívocamente, para ello se propusieron diferentes condiciones de variación entre dos magnitudes, tales como las condiciones de linealidad, de equidad, de diferencias constantes de orden  $(n)$ , de razones constantes y de linealidad inversa. Con ello se propone una evolución de las organizaciones matemáticas respecto a su nivel de algebrización, es decir, proporcionales, ecuacionales y funcionales.

Tal modelo amplía las modelizaciones proporcionales para caracterizar situaciones donde la relación entre la variación de dos magnitudes es equitativa, además se manifiestan las restricciones y limitaciones del marco tecnológico-teórico de las razones y las proporciones para modelizar otros tipos de relaciones y con ello dar preámbulo a una organización matemática regional sustentada en la Teoría de las Funciones Reales de Variable Real.



### III. PROPORCIONALIDAD, INSTITUCIÓN Y TEXTO DEL SABER

En la propuesta oficial de las escuelas normales de México para la formación de profesores se plantea como propósito que al finalizar sus estudios los alumnos manejen praxeologías relacionadas con diversos campos del saber, tanto de las áreas disciplinares como de la didáctica y que se reflejen en las escuelas primarias, por esta razón durante el proceso de formación se enfrentan a tareas en diferentes contextos y distinto nivel de complejidad.

En el caso de las matemáticas, además del contexto numérico existen otras variables que determinan la técnica a utilizar en la solución de las tareas, dependiendo del nivel educativo en el que vayan a trabajar los profesores en formación será el tipo de tareas, técnicas y conceptos que se estudien en la institución, esto incluye desde luego los principios y propiedades del concepto matemático que será «enseñado» pero también los enfoques oficiales para la enseñanza y las orientaciones didácticas para su estudio.

La evolución del concepto de proporcionalidad también se ha dado a la par con los avances de la investigación en el campo de la educación matemática. Actualmente, el enfoque basado en la resolución de problemas de los planes de estudio en educación básica y normal ocupa un lugar central en el diseño de situaciones didácticas en México. La idea de aprender matemáticas al resolver problemas tiene el propósito de que los estudiantes se enfrenten a situaciones donde pongan en juego los saberes con los que cuentan para confrontarlos, validarlos y reformularlos hasta llegar a una clara comprensión de las técnicas convencionales y al dominio de los lenguajes y modelos que mejor se adapten al nivel de resolución. Sin embargo, estas orientaciones curriculares deben ser coherentes con las tareas incluidas en el «texto del saber»<sup>1</sup>.

Las investigaciones sobre la enseñanza de la proporcionalidad han tenido un fuerte desarrollo en los últimos años, actualmente no se plantea enseñar una

---

1. En correspondencia con las nociones de la Transposición didáctica, llamamos «texto de saber» al conjunto de materiales curriculares (programas de estudio, libros de maestro o libros del alumno) en los que se incluyen los saberes «a enseñar».

sola técnica de cálculo (por ejemplo regla de tres), la atención se centra en la relación entre dos magnitudes, en la estructura y las tareas que hacen posible la incorporación de los modelos de resolución. Algunas investigaciones (Boisnard, Houdebine, Julo y Kerboeuf, 1994) señalan que el aprendizaje memorístico de la regla de tres, de la representación del concepto, de los métodos que lo conforman así como de las propiedades que se designan bajo los términos de la proporcionalidad y otro tipo de reglas, no es suficiente para un verdadero conocimiento al respecto. Aunque tal afirmación puede ser polémica porque en algunas instituciones precisamente esas técnicas constituyen el «saber a enseñar».

Autores como Géron, Segen y Daro (2005) destacan que la proporcionalidad constituye un tema fundamental para la vida cotidiana así como para la resolución de tareas en diversas áreas de las matemáticas por lo que se requiere un buen dominio conceptual y procedimental, que si bien puede estar presente en diversas circunstancias no se aprende naturalmente, dado que en el momento de la transición entre la primaria y la secundaria se pasa de la modelización aritmética hacia la modelización funcional. Respecto de la formación de profesores subrayan la relevancia de considerar la fusión entre lo matemático y lo didáctico, es decir entre las Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Didácticas (OD).

Para explorar la posible fusión de ambas organizaciones praxeológicas incluidas en los materiales de estudio de las escuelas normales de México, en este capítulo se analizará la inclusión y articulación de las OM y OD en dichos materiales, el análisis se focaliza en los programas oficiales y materiales de estudio donde fue posible identificar un MER que permitiera establecer una posición para analizar las tareas, técnicas, tecnologías y posibles teorías inscritas en una institución educativa en particular, dicho modelo lo constituyó, la Organización Clásica de la Proporcionalidad y la Modelización Funcional.

### 3.1. LA PROPORCIONALIDAD EN LAS ESCUELAS NORMALES.

#### UN ANÁLISIS «ECONÓMICO»

A decir de Barquero, Bosch y Gascón (2013), el profesor se enfrenta a ciertos problemas docentes asociados a la enseñanza de un tema matemático específico, tales problemas se formulan empleando generalmente, sin cuestionarlas, las nociones disponibles de la cultura escolar incluidas en los documentos curriculares, pero no sólo se toman las nociones sino las ideas dominantes que pertenecen a tal cultura escolar, para ejemplificar esta práctica los autores toman el caso par-

ticular de la Modelización Matemática (MM) cuyo problema docente se expresa mediante la pregunta: ¿Qué tengo que enseñar a mis alumnos respecto a la MM y cómo tengo que enseñarlo?

Una vez que se enseñan los contenidos matemáticos básicos, ¿cómo lograr que las matemáticas se enseñen como una herramienta de modelización?, es decir cómo hacer para que la enseñanza no se organice siguiendo sólo la lógica de los contenidos explicitados curricularmente sino con base en los problemas que se deben resolver y los proyectos que los estudiantes deberán realizar (Barquero, Bosch, Gascón, 2011).

Desde la perspectiva de los autores, para formular un problema de investigación didáctica desde la TAD, debe cuestionarse la forma de interpretar la MM desde el modelo epistemológico que le subyace, aquel que predomina no sólo en las instituciones escolares sino también en la noosfera<sup>2</sup>. Sin la intención de dar respuesta a los cuestionamientos enunciados con anterioridad, se puede decir que para el objeto que aquí se estudia, la Organización Clásica de la Proporcionalidad constituye, desde la noosfera, el principal referente que, suponemos, se verá inscrito en el análisis del texto del saber.

La revisión del «saber a enseñar» que se presenta intenta poner en evidencia la «textualización del saber» propia del currículo de las Escuelas Normales y su posible relación con los modelos epistemológicos de la actividad matemática. También se pretende revisar la pertinencia de la lógica institucional respecto del saber matemático y didáctico, dado que: «en la formulación de un problema didáctico cualquiera el didacta siempre utiliza [...] una descripción y una interpretación [...] del ámbito matemático que está en juego. La TAD ha subrayado desde el principio la necesidad de explicitar dicho modelo y utilizarlo como referencia para analizar los hechos didáctico-matemáticos» (Barquero, Bosch y Gascón, 2013, pp. 4-5).

Desde la perspectiva anterior el MER constituye un instrumento que permite al didacta construir y reconstruir las praxeologías que de modo intra e interinstitucional se busca analizar, así pues, permitirá conocer el modo en que

---

2. La noosfera constituye una instancia esencial para el funcionamiento didáctico, es el verdadero tamiz por donde opera la interacción entre el sistema de enseñanza y el entorno social. Allí se encuentran todos aquellos que ocupan puestos del funcionamiento didáctico y se enfrentan con los problemas que surgen del encuentro con la sociedad y sus exigencias, en ese lugar se desarrollan los conflictos, las negociaciones, las soluciones; representa la esfera donde se piensa el funcionamiento didáctico a través del encuentro entre los representantes del sistema de enseñanza y los representantes de la sociedad (Chevallard, 1991).

las instituciones educativas comprenden y manipulan el saber matemático y didáctico. El MER analizado en el apartado anterior permite la comprensión de la proporcionalidad en tanto saber matemático. En lo que sigue se hará referencia a los puntos de análisis de la proporcionalidad en la escuela normal, sus conceptualizaciones, nociones, límites, representaciones y determinaciones, así como las diferentes tareas planteadas para la formación.

Desde la mirada de Barquero, Bosch y Gascón (2013), cuando se construye un problema didáctico desde la TAD, deben tomarse en cuenta tres dimensiones fundamentales: la epistemológica, la económica y la ecológica. El presente apartado hará alusión de modo particular a la dimensión económica inscrita en el currículo de las Escuelas Normales, sin embargo para tal efecto retomará la dimensión epistemológica plasmada sobre todo en la Organización Clásica de la Proporcionalidad.

Desde la TAD, la dimensión económica alude a la relación institucional que se establece con la actividad matemática, es decir el modo de interpretar la modelización matemática en la institución donde se realiza la transposición didáctica, para el caso de nuestro objeto de estudio la atención se centra en las actividades propuestas para la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en las instituciones formadoras de docentes. «Podríamos hablar de la economía de la MM en las instituciones en un sentido similar a como se habla de economía de un organismo (o de un sistema complejo cualquiera), para referirse a la coordinación de los componentes (o subsistemas) que intervienen en su funcionamiento» (Moliner, 2007, p. 1098 en Baquero, et al, 2013, p. 15). A diferencia de la MM esta coordinación se verá determinada por el MER retomado como referencia. Algunas cuestiones que corresponden a la dimensión económica del problema didáctico (Baquero, et al. 2013) y que se ajustarían a la proporcionalidad serían las siguientes:

- ¿Qué ámbito institucional debe considerarse para abordar el problema didáctico de la proporcionalidad: el aula, la escuela, el sistema de enseñanza de las matemáticas, la sociedad o incluso la civilización?
- ¿Cómo se considera, se describe y se interpreta la proporcionalidad en cada una de las instituciones propias de la transposición didáctica?
- ¿Qué tareas o técnicas derivadas del MER se corresponden actualmente en los sistemas de enseñanza de las Escuelas Normales?

- ¿Qué se entiende en las instituciones didácticas por «enseñanza de la proporcionalidad» o por «llevar a cabo tareas matemáticas y tareas didácticas de proporcionalidad»?

Tales cuestionamientos tienen relación con los niveles de codeterminación matemático didáctico planteados por Chevallard, que se estructuran desde lo más genérico hasta lo más específico, dicha sucesión de niveles se relaciona no sólo con las cuestiones a estudiar sino también con un momento histórico en particular y con la institución escolar en la que se ubica la investigación (García, 2005). Es por la razón anterior que el siguiente apartado se centra en la revisión de las áreas y los sectores de la proporcionalidad que se incluyen en el currículo de las Escuelas Normales.

En los planes de estudio se plantea que la proporcionalidad en la escuela primaria se habrá de articular con la noción de función lineal en la escuela secundaria (SEP, 2012b, SEP, 2012c). En correspondencia con esta articulación, en el primer curso sobre enseñanza de las matemáticas de la licenciatura en Educación Primaria (*Aritmética: su aprendizaje y enseñanza*) se incluye el desarrollo del razonamiento proporcional y en el segundo (*Álgebra: su aprendizaje y enseñanza*) se inicia el estudio de la función lineal mediante el manejo de patrones numéricos.

El análisis económico que aquí nos proponemos hacer se focaliza principalmente en el primer curso en virtud de que ahí se incluyen los aprendizajes aritméticos que el profesor en formación deberá desarrollar en la escuela primaria, sin embargo en menor medida se hará alusión al segundo curso, dado que consideramos necesario revisar la transición entre la aritmética y el álgebra que se plantea en estos materiales.

En la Unidad de Aprendizaje IV del curso *Aritmética: su enseñanza y su aprendizaje*, la desincretización<sup>3</sup> del texto divide al saber en cuatro elementos temáticos (SEP, 2012b) y cabe señalar que el tiempo didáctico asignado a tales

3. La desincretización del saber comprende un proceso que introduce una diferenciación entre lo que pertenece al campo delimitado (nociones matemáticas) y lo que está realmente presente, dicho proceso produce una distinción entre aquello que constituye el objeto de su discurso y aquello que aunque es necesario para la construcción del texto no es su objetivo. Se podría decir que la desincretización es una delimitación de saberes parciales, que se expresan en un discurso autónomo, esta delimitación produce «... la descontextualización del saber, su extracción de la red de problemáticas y de los problemas que le dan sentido completo, la ruptura del juego intersectorial constitutivo del saber en su movimiento de creación y de realización» (Chevallard, 1991, p. 60).

temáticas es menor en comparación con otras unidades del mismo curso, la causa, el número de conceptos de estudio, a saber:

- Análisis de los conceptos de razón y proporción a través de diversas situaciones.
- Estudio del concepto de porcentaje y su representación gráfica.
- Resolución de problemas que involucran el cálculo de porcentajes.
- El estudio de la variación proporcional directa.

Dichas temáticas profundizan en el razonamiento proporcional y el papel que éste juega en aspectos como el estudio de la variación y el uso de porcentajes al resolver problemas, con ello se establece la relación entre los elementos matemáticos, pedagógicos y didácticos en la formación. Esta correlación se observa en la imagen siguiente:

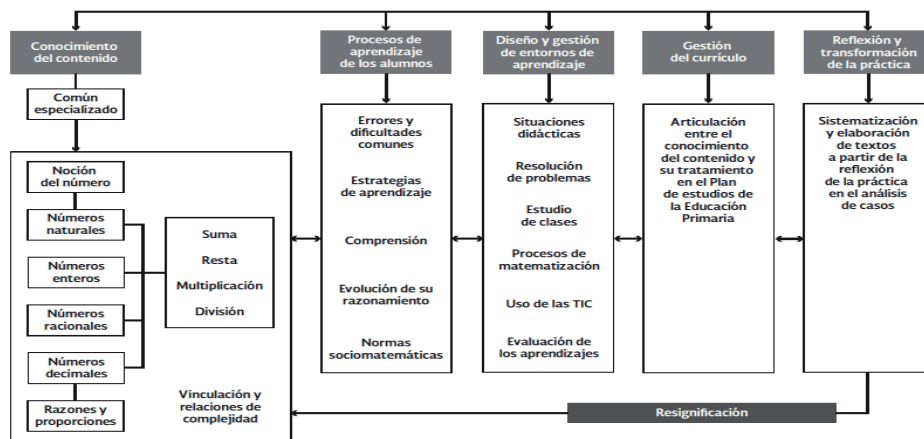


Imagen 1. Componentes de estudio (SEP, 2012a, p. 9).

Como se puede observar, el curso inicia con la noción de número y termina con el estudio de las razones y proporciones lo que representa una especie de recorrido por los contenidos de aritmética de la escuela primaria, que estudia el profesor en formación junto con aspectos asociados a los procesos de aprendizaje de los alumnos, los entornos de aprendizaje, la gestión del currículo y la reflexión sobre la transformación de la práctica, cabe señalar que más que

cuestiones didácticas se abordan aspectos generalistas que serán descritos en el análisis de las tareas didácticas.

El programa hace énfasis en la importancia de vincular el saber matemático con los contenidos temáticos de la escuela primaria y en el estudio de las relaciones y cálculos entre los campos numéricos a partir del significado de las fracciones; de su orden y su comparación y; de un número decimal y de un porcentaje. Por otra parte, se busca que los profesores en formación identifiquen las dificultades propias del manejo de la variación proporcional en la escuela primaria y la forma en que éstas pueden ser atendidas. Las tareas matemáticas y didácticas se estructuran con relación a ciertas competencias generalizadas que son aplicadas no sólo a la unidad sobre el desarrollo del razonamiento proporcional sino al resto de las unidades, a saber, el estudiante:

- Distingue las características de las propuestas teóricas metodológicas para la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria para aplicarlas críticamente en su práctica profesional.
- Identifica los principales obstáculos que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética y aplica este conocimiento en el diseño de ambientes de aprendizaje.
- Relaciona los saberes aritméticos formales con los contenidos del eje sentido numérico y pensamiento algebraico del plan y programas de estudio para diseñar ambientes de aprendizaje.
- Emplea la evaluación como instrumento para mejorar los niveles de desempeño de los alumnos en la resolución de problemas (SEP, 2012a. p. 50).

Como es de apreciarse, el profesor en formación juega diversos roles durante dicho proceso, por una parte, se ubica en una postura de «aprendiz» de matemáticas para relacionar los saberes aritméticos de la escuela normal con los de la escuela primaria cuando se enfrenta a tareas que le exigen reconstruir esas praxeologías matemáticas. Por otra parte, se ubica en posición de «profesor analista» cuando reflexiona sobre elementos propios de la enseñanza de la asignatura.

Con estas consideraciones y recuperando los elementos del MER descrito en el capítulo anterior, en lo que sigue se hará un análisis tanto de las tareas matemáticas como de las didácticas que se plantean en el currículo oficial de las

Escuelas Normales así como la programabilidad<sup>4</sup> que se establece en el texto del saber para el estudio de la proporcionalidad.

### 3.1.1. Razón y proporción. Praxeologías matemáticas

Desde la perspectiva de los planes y programas, el estudio de la razón inicia con el profesor en formación jugando el rol de «analista» y hasta un segundo momento ocupa la postura de «aprendiz» de matemáticas.

#### a) El profesor «analista»

En su papel de «analista», se pide que el estudiante analice una propuesta didáctica para el estudio de las razones y proporciones en la que las tareas planteadas retoman la comparación de cantidades basadas en un modelo tabular, para luego llegar a la razón como resultado de dividir la parte del total entre la cantidad total o bien el resultado de la cantidad que está siendo comparada entre la cantidad de referencia. Con ello se institucionaliza una concepción de razón como «número que permite comparar dos magnitudes mediante un cociente» (Isoda, Cedillo. 2012a, p. 58), dicha consideración alude precisamente al modelo clásico de la Teoría de las Razones y proporciones.

Cuando la fracción significa cociente, la razón recupera el manejo de los números decimales como resultado de esa «división», que es representada en una recta numérica para establecer la comparación entre dos magnitudes. Una vez modeladas las representaciones, el estudiante deberá resolver una serie de tareas del tipo:

- ¿Cuál es la razón de respuestas correctas a partir del total de problemas planteados?,
- ¿Cuál es la razón de tiros acertados respecto al total de tiros?
- ¿Cuál es la razón de alumnos de quinto grado, respecto al número total de niños que asisten a una fiesta?

Con esta situación se aprecia la lógica institucional, que el profesor en formación identifique la razón como comparación de magnitudes, puesto que se destaca que al inicio de este primer acercamiento la razón se presenta en si-

4. La textualización del saber establece una programación de los aprendizajes y de los controles, que se determinan en función de las secuencias razonadas que favorezcan la adquisición progresiva de los conocimientos expertos, la programación se considera una norma de progresión del conocimiento que enuncia un comienzo, un intermedio y un fin, es decir el texto procede por secuencias (Chevallard, 1991).



tuaciones donde una magnitud es parte de la otra, por ejemplo, la razón entre tiros lanzados y tiros encestandos es igual al número de tiros encestandos entre el número de tiros lanzados.

Luego se plantean tareas asociadas con la razón entre dos cantidades, es decir donde existe una cantidad que es comparada con una cantidad de referencia para adquirir una razón (calcular la razón entre la altura de un edificio A respecto a la altura de un edificio B). Una vez más, la representación gráfica en una recta numérica para la asociación con decimales y después la resolución de situaciones del mismo tipo.

En la misma postura, de profesor «analista», el estudiante revisa la relación entre la razón y la idea de «número de veces» en textos sugeridos en los que se establece que, al comparar dos cantidades, en ocasiones se toma una como «cantidad de referencia» para calcular la razón entre esas cantidades y cuando es mayor que uno, la razón indica el número de veces que una cantidad es mayor que la otra.

La idea de analizar el «número de veces» representa la transición hacia la representación de la razón como fracción, los materiales de estudio la ilustran con una imagen que indica la división de una cantidad que se compara con una cantidad de referencia para encontrar el número de veces, se señala que esto puede expresarse mediante una fracción, por ejemplo: *en una distancia promedio de 15 metros se recorre una distancia de 25 metros, ¿cuántas veces es esa distancia en comparación con la distancia recorrida?* Al expresar el resultado en la forma  $25 \div 15 = 25/15 = 5/3$  los estudiantes revisan la relación entre la cantidad de referencia multiplicada por la razón para encontrar la cantidad a comparar, con este ejemplo se retoma la idea de campo conceptual de las estructuras multiplicativas donde la aproximación a la proporcionalidad se resuelve con una división o una multiplicación. Esta situación confirma la hipótesis de Perry (2003) cuando señala que por lo general, en las instituciones educativas la razón se representa como una división indicada, un cociente o un operador multiplicativo y desde la perspectiva de los números fraccionarios.

Ahora bien, si la razón alude a un par ordenado de cantidades de magnitudes, es necesario considerar que existen diferencias entre razón y fracción, las razones comparan objetos distintos (5 dulces por 25 pesos) mientras que las fracciones comparan el mismo tipo de objetos (tres de cinco partes), así pues la razón  $5 \text{ dulces} \div 25 \text{ pesos}$  ( $5/25$ ) no constituye una fracción. Este aspecto no es aclarado en el texto del saber.

Luego, en la misma tarea, los estudiantes siguen revisando los textos intentando conceptualizar la proporción, para ello analizan situaciones de comparación (área de figuras, mezcla de sustancias, etc.) con representación gráfica, con ello se institucionaliza que «la razón entre el largo y ancho se expresa  $2/3$  y se lee «dos tercios», «2 entre 3» o «dos es a tres». Si una razón es equivalente a otra, por ejemplo a  $4/6$ , esta equivalencia se expresa como  $2/3=4/6$ . Esta expresión se lee «2 es a 3 como 4 es a 6». A esta igualdad se llama proporción» (Isoda, Cedillo. 2012b, p. 32). Este principio se asocia directamente con la organización clásica de la proporcionalidad, en la que se estipula que la igualdad de dos razones constituye una proporción cuando se pueden igualar los cocientes indicados por las razones equivalentes, en este sentido una razón  $a/b$  no se modifica si se multiplica o divide a y b por el mismo número.

Con la tarea anterior el estudiante termina su rol como «profesor analista»<sup>5</sup>. Al revisar los textos se supone, ha identificado la razón como comparación de magnitudes a partir de un cociente y comprendido la idea «número de veces», lo que le permite identificar a la razón como fracción. También, se supone, ha comprendido la proporción como una igualdad de razones mediante la visualización de razones equivalentes. No obstante, la actividad tiene ciertas restricciones, en los textos sugeridos se plantean cuestiones como: ¿Qué dificultades presentan las actividades planteadas?, ¿cuál es la diferencia entre una actividad y otra?, cuestiones que nos llevan a considerar que el papel de «analista» se restringe fundamentalmente al análisis de la praxeología matemática.

#### *b) El «aprendiz» de matemáticas*

En un segundo momento, situado en el rol de «aprendiz de matemáticas» los estudiantes deben resolver tareas matemáticas relacionadas con las razones y proporciones. El propósito de tales actividades tiene que ver con «ejercitar» las situaciones revisadas en la unidad anterior, es decir, se plantean situaciones problemáticas donde deben encontrar la razón entre magnitudes. Uno de estos planteamientos es el siguiente:

En una clase hay 28 alumnos, cuatro alumnos faltaron a clase.

---

5. Las tareas descritas se encuentran en los textos básicos del programa para las escuelas normales *Aritmética: su enseñanza y su aprendizaje*.

- a) Calcular la razón del número de alumnos que no asistieron a clase y expresarla como porcentaje en función al total del grupo.
- b) Calcular el porcentaje de los alumnos que asistieron respecto al total del grupo.

Al parecer, la intención de este tipo de tareas es retroalimentar los saberes adquiridos en el momento de «profesor analista» y emplear la técnica de la comparación de magnitudes a través de una razón, aunque también se observa la inclusión del concepto de porcentaje que, sin revisarse con antelación se vincula con la razón y la proporción. La solución de estas tareas exigirá al estudiante emplear una de las técnicas de la organización clásica más recurrente: la regla de tres. Así se abordan también situaciones para calcular un porcentaje mayor que 100%, comparar descuentos expresados como porcentaje y como dinero. Además, se resuelven situaciones problemáticas asociadas con la probabilidad en problemas como el siguiente:

Analizar dos loterías para identificar en cuál se tiene mayor oportunidad de ganar.

- a) Hay 16 boletos ganadores y participan 40 boletos.
- b) Hay 7 boletos ganadores y participan 20 boletos.

Siguiendo con el porcentaje, en una siguiente tarea los estudiantes deben identificar la razón y utilizarla para resolver problemas de porcentaje apoyándose en la siguiente representación tabular:

| Áreas de bosques tropicales (Una unidad de área son diez mil km <sup>2</sup> ) |      |      |                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------|------|------|-------------------------------------------------|
| Región                                                                         | Área |      | Razón (%) de disminución en los últimos 10 años |
|                                                                                | 1990 | 2000 |                                                 |
| África                                                                         | 687  | 634  |                                                 |
| Asia - Pacífico                                                                | 349  | 324  |                                                 |
| Latino América                                                                 | 957  | 913  |                                                 |
| Total                                                                          | 1993 | 1871 |                                                 |

Imagen 2. La razón como porcentaje (Isoda, Cedillo. 2012a, p. 72).

Aunque no aparezca la intención explícita, al parecer esta representación conduce a los estudiantes a aplicar la técnica de la regla de tres, en los textos se aprecia como la técnica más viable para este tipo de tareas. En otras tareas del mismo tipo se les pide graficar datos similares a los de la tabla anterior y comparar magnitudes como la razón entre niños y niñas que pertenecen a diferentes grados escolares.

Para cerrar con este bloque de tareas, nuevamente se plantean ejercicios relacionados con aspectos que revisaron en el momento del «profesor analista», para ello deben realizar tareas donde se les pide obtener la razón en situaciones de comparación entre cantidades, por ejemplo, aceite y vinagre, las longitudes de los lados AB y AC de un triángulo, encontrar razones equivalentes a una razón dada o bien encontrar el valor faltante en dos razones equivalentes:

3 Escribe los números correctos en los .

|                                      |                                       |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| ① $\frac{3}{5} = \frac{\text{}{10}$  | ② $\frac{7}{4} = \frac{35}{\text{}}$  |
| ③ $\frac{80}{\text{}} = \frac{5}{8}$ | ④ $\frac{\text{}}{125} = \frac{3}{5}$ |

Imagen 3. Valor faltante (Isoda, Cedillo, 2012a, p. 37).

En tanto que hasta ese momento sólo se ha explicitado que de la multiplicación o división de una razón por un mismo número resulta una razón equivalente, la imagen 3 es una muestra del uso no institucionalizado de la regla de tres. Además de los ejercicios anteriores, se plantean tareas en las que aplican razones equivalentes, el ejemplo más recurrente es el manejo de magnitudes en recetas de cocina.

La incógnita es también una variable muy utilizada en la resolución de problemas, es decir, se plantean actividades donde se muestra la razón y una de las cantidades para encontrar el valor de la cantidad a comparar, un ejemplo es cuando se juntan canicas de diferente color y se expresa la razón que existe entre ambos colores de canicas. Otro ejemplo empleado para las razones equivalentes es el uso de diagramas donde a partir de tres magnitudes conocidas deberá encontrarse una cuarta desconocida.

Una vez realizadas las tareas donde se incluye la razón como comparación

de cantidades, número de veces, razones equivalentes y porcentaje, los estudiantes vuelven al rol de «profesor analista» y a partir de las tareas ya resueltas reflexionan sobre la comparación aditiva (entre 15 y 5 la diferencia es de diez unidades) y la comparación multiplicativa (el 5 cabe 3 veces en el 15, es su cociente). Como se puede apreciar, desde la perspectiva del texto del saber, el concepto de razón puede definirse como una comparación multiplicativa entre dos cantidades mediante un cociente, en ese sentido la razón expresa la relación que existe entre la magnitud de dos cantidades, aunque no se expresen las magnitudes originales de tales cantidades. En un ejemplo, la razón de 12 y 3 es  $\frac{1}{4}$ , el cociente indica que 3 es la cuarta parte de 12, pero en  $\frac{1}{4}$ , no se observa que las cantidades que lo originaron fueron 3 y 12, podrían haber sido 25 y 100 (Cedillo, Isoda, Chalini, Cruz, Ramírez, y Vega, 2012).

### 3.1.2. Razón y proporción. Praxeologías didácticas

En lo que toca a las tareas didácticas, lo que se puede ver es que por lo general se plantean cuestionamientos a los profesores en formación sobre las tareas matemáticas que previamente realizaron o analizaron, véase el siguiente ejemplo:



**Actividades que se sugieren para los futuros docentes**

1. El concepto de razón es muy relevante en matemáticas, ¿estás de acuerdo en la forma que se aborda su estudio inicial en esta lección? Justifica ampliamente tu respuesta.
2. Compara el esquema parte -todo con las rectas numéricas que aparecen en esta lección, ¿qué similitudes y diferencias encuentras entre ellos? ¿qué propósitos didácticos y matemáticos cubren estas formas de representación?
3. Establece las similitudes y diferencias entre las razones parte-todo y parte-parte. Enuncia las posibles dificultades que podría enfrentar el alumno para la comprensión de cada una.

Imagen 4. Actividades de Razón y Proporción (Cedillo, et-al., 2012, p. 108).

Los planteamientos se refieren a un argumento propio de la Organización Clásica, las nociones de razón y proporción, a los que los estudiantes en formación se han acercado y que se explican en el MER. Resulta destacable la idea de afianzar la relación entre fracción y razón que se observa en la consigna 3 donde, en su papel de profesores, los estudiantes deben reflexionar sobre las dificultades de sus eventuales alumnos para distinguir similitudes y diferencias entre las «ra-

zones» como fracciones parte-todo y parte-parte. Lo anterior se ve reforzado cuando el texto oficial institucionaliza lo siguiente:

Las razones finalmente son números racionales, son fracciones. Por lo tanto, tienen sus propiedades y están sujetas a sus principios. Una cualidad fundamental de los números racionales es la de equivalencia. Dos números racionales  $A/B$  y  $P/Q$  son equivalentes si y solamente si  $A \times Q = P \times B$ . Los números racionales equivalentes se construyen así: Dado el número racional  $A/B$  y  $K$  cualquier número racional diferente de cero, entonces:  $(A \times K)/(B \times K)$  es otro número racional equivalente a  $A/B$  (Cedillo. T. *et al.* 2012, p. 106).

Esta afirmación establece la igualdad entre razón y números racionales, hecho que ha sido debatido, no obstante que existe una relación entre ambos elementos, resulta necesario establecer esa diferencia con el planteamiento de tareas matemáticas y didácticas que permitan esclarecer tal distinción. Con este saber institucionalizado se cierra al trabajo con la razón y la proporción para dar paso al estudio del concepto de porcentaje y su representación gráfica como una extensión de la razón.

### 3.1.3. El porcentaje. Praxeologías matemáticas

Al igual que en la temática anterior, el estudio del porcentaje como parte de la razón comienza con el estudiante en el rol de «analista». Se inicia con el análisis de una situación donde se expresa una razón utilizando al 100 como cantidad de referencia, que en los materiales se le denomina porcentaje, el número decimal (0.01) se emplea como una razón a la que se le llama 1 por ciento o 1% (SEP, 2012a).

Un ejemplo del tipo de tareas que se le plantean es el siguiente: *En un autobús de 25 asientos van 20 pasajeros, ¿cuál es el grado de aglomeración del autobús?* En este caso el estudiante debe encontrar el resultado de  $20 \div 25 = ?$ , después transformar esa razón a una equivalente cuya cantidad de referencia sea 100 es decir  $20 \div 25 = ?$  multiplicado por 100, de esta manera encontrará que el grado de aglomeración del autobús es del 80%.

Otra tarea matemática que se convierte en actividad de análisis es la expresión de razones en porcentajes (35%, 12%, 80%) y la expresión de éstos en números decimales (0.50, 0.6, 0.325), con ello se pretende identificar al porcentaje como una razón que puede ser expresada y manipulada en términos numéricos

o mediante una gráfica en la que manifiesta la relación parte-todo cuando el todo se vuelve 100. También se analizan razones mayores que 100 (con la situación del autobús), *si se considera que se tiene un cupo para 25 pasajeros y se suben 30, el grado de aglomeración quedaría expresado como  $30 \div 25(100) = ?$ .*

Para concluir el estudio de esta temática, el estudiante analiza situaciones donde es necesario identificar diversos tipos de gráficas, la idea es hacer énfasis en la comparación de cantidades. En estas tareas se destaca la gráfica de banda que asocia el área de los rectángulos con cada una de las razones involucradas y la gráfica circular que permite visualizar con mayor facilidad la distribución porcentual de los datos. En estas últimas tareas está inmersa la noción de porcentaje dado que es ésta la que permite comprender la representación gráfica.

Una vez que los estudiantes han analizado las tareas matemáticas planteadas en los textos oficiales, se les pide que reflexionen sobre cuestiones como: *el porcentaje establece una comparación de una cantidad respecto a 100*, determinando así el tanto por ciento; al comparar una cantidad con otra no necesariamente la segunda es 100; para representar un porcentaje mediante una razón se requiere que la cantidad de referencia en la comparación sea 100; la razón  $\frac{3}{4}$  puede representarse como  $75/100$  lo que indica 75 de cada 100 que al multiplicarse por 100 lleva al 75%, esta situación también se puede realizar al multiplicar por 100 una expresión decimal de la razón, es decir  $0.75 \times 100$  equivale a 75% (Cedillo.T. et-al. 2012).

#### 3.1.4. El porcentaje. Praxeologías didácticas

En las tareas didácticas ligadas al porcentaje, planteadas en los materiales educativos, por lo general las consignas no se modifican de tarea a tarea, generalmente en todas las tareas se plantean preguntas similares a las que se pueden ver en la siguiente imagen y que dan cuenta del tipo de cuestiones didácticas planteadas:

##### Actividades que se sugieren para los futuros docentes

1. ¿A qué crees que se deba la introducción del tema de porcentajes enseguida del de razón? Explica con claridad.
2. ¿Consideras conveniente la forma en que se introduce el estudio de los porcentajes? Justifica tu respuesta.
3. ¿Coincide la forma en que tú calculas porcentajes con la forma en que se muestra en la lección? ¿Qué diferencias y similitudes encuentras? ¿Cuáles son las bases matemáticas de tu estrategia para calcular porcentajes? ¿Cuáles son las que se aplican en el método que presenta la lección?
4. Resuelve los problemas que se proponen en las páginas 63 a 65 e identifica qué posibles dificultades pueden tener los alumnos con ellos.

Imagen 5. Actividades sobre el porcentaje (Cedillo. T. et-al., 2012, p. 109).

En la imagen anterior puede observarse que en las primeras tres preguntas se pide analizar las OM y OD, es decir se plantean cuestiones sobre la relación entre conceptos matemáticos, pero también se pide reflexionar sobre la forma en que éstos se introducen en la escuela. La tarea 4 coloca al estudiante como «aprendiz de matemáticas» y como «analista» porque debe resolver problemas e identificar las dificultades que pudieran tener los niños de la escuela primaria para resolverlas, cabe destacar que las actividades son semejantes a las que ya analizó el estudiante en el primer momento de estudio del porcentaje, son situaciones del tipo: *En un área de 24 m<sup>2</sup>, expresa el 25% como número decimal*, donde el 24 es la cantidad de referencia que se multiplica por 0.25 (la razón) para encontrar la cantidad comparada.

Al parecer, la intención es que el alumno transite de la razón como número decimal a la expresión de un porcentaje y que identifique la relación entre razones y porcentaje, la manera de calcularlo y las representaciones gráficas que le subyacen. Después de esta tarea los estudiantes deberán presentar los procesos matemáticos que se desarrollan para resolver tareas que involucren el cálculo de porcentajes.

Una vez que los estudiantes han transitado sobre esta temática como «aprendices de matemáticas», culminan el proceso de estudio como «diseñadores» de situaciones que involucren el cálculo de porcentajes, aunque también ocupan una postura de «experimentadores» cuando se les da la consigna de ponerlos en práctica con alumnos de educación básica y reflexionar sobre los resultados obtenidos a través de registros de clase.

### *3.1.5. La variación proporcional directa. La continuidad del «aprendiz»*

Para iniciar el estudio de la variación proporcional directa nuevamente se ubica al estudiante como «profesor analista» y se le pide analizar la propuesta didáctica para la enseñanza de la variación proporcional directa, su representación gráfica y sus aplicaciones. Para ello revisa en los textos oficiales las situaciones en las que se relacionan dos magnitudes que cambian juntas.

Las primeras aproximaciones a la proporción se realizan mediante tareas que plantean la relación entre dos cualidades de los objetos: largo y ancho, agua y jugo, aceite y vinagre, etc. En este tipo de tareas se comparan dos cantidades, pero ahora la variación entre éstas se presenta de modo diferente, por ejemplo, se les pide identificar el número de hojas de papel en un paquete donde se trata de reconocer la relación entre la cantidad hojas y su peso para luego encontrar



el número de hojas en un paquete. Una variante es que se les pide identificar la relación entre el número de hojas y el grosor del paquete para encontrar el número de hojas existente. Para identificar las relaciones entre magnitudes se presenta una tabla en la que se puede observar la variación proporcional entre el número de hojas y el peso o el grosor.

En estas tareas, las cualidades representadas en las tablas dan la idea de que se pueden tomar en cuenta más valores y que dichas cualidades están relacionadas entre sí, por ejemplo, el peso depende del número de hojas y el grosor también, sin embargo debe considerarse el supuesto de que todas las hojas son iguales en forma y tamaño. En las tablas se registra la variación del número de hojas con relación a la variación del peso, de esta manera los datos de las columnas forman razones equivalentes y establecen proporciones.

Por otra parte, para identificar la proporcionalidad directa el estudiante analiza las tablas con cantidades preestablecidas en las que se puede observar que, si una cantidad aumenta 2, 3, 4 y 5 veces la otra cantidad lo hará en la misma proporción, luego se presentan varias tablas donde se relacionan dos magnitudes, en éstas el estudiante deberá identificar en cuál se presenta la misma relación que se observa en los primeros ejemplos. Previo a la conceptualización de la variación proporcional se muestra el siguiente modelo tabular (Isoda, Cedillo. 2012b):

**4** Estudiemos la relación que hay entre la longitud y el peso de un cable.

① Si la longitud del cable se incrementa en 2, 3, 4 y 5 veces, ¿cómo varía el peso?

|              |    |    |    |    |     |     |     |     |
|--------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| Longitud (m) | 1  | 2  | 3  | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   |
| Peso (g)     | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 |

Imagen 6. Variación proporcional directa (Isoda, Cedillo, 2012b, p. 48).

En la tarea de la imagen se pretende que el alumno comprenda que cuando se tienen dos magnitudes, si una aumenta la otra también lo hace y si una dismi-

nuye también lo hará la otra, así se podrá decir que esas magnitudes varían en forma directamente proporcional dado que al aumentar o disminuir 2, 3, 4 veces la otra se modifica en la misma forma. Para complejizar la situación se pide a los alumnos que en lugar de aumentar o disminuir las cantidades con números enteros lo resuelvan con aumentos (número de veces) decimales o fraccionarios por ejemplo, ¿cómo cambia su peso cuando su longitud disminuye a  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{1}{5}$ ?

Como se puede ver, en la tabla se muestra la variación del peso del alambre y la longitud, las columnas muestran razones equivalentes, es decir proporciones. Esta tabla, además de mostrar las cualidades del cable (peso y longitud) expresa las modificaciones (flechas curvas de color rojo), de esta manera, si se calculan las razones peso/longitud se obtendrá 20 en cualquier par de datos, en términos generales esto se puede representar mediante la expresión  $\text{peso} \div \text{longitud} = 20$ , donde 20 corresponde a la constante de proporcionalidad.

Una vez identificada la variación directamente proporcional, se pide a los estudiantes que analicen situaciones problemáticas que incluyen modelos tabulares, en éstas se puede apreciar que en algunos casos la relación entre una cantidad y otra no presenta esta misma cualidad, un ejemplo de ello se puede ver en la siguiente tabla:

|                     |   |   |   |    |    |    |    |
|---------------------|---|---|---|----|----|----|----|
| Volumen de agua (l) | 0 | 1 | 2 | 5  | 8  | 11 | 15 |
| Profundidad (cm)    | 0 | 2 | 4 | 10 | 16 | 22 | 30 |

Tabla 9. Variación proporcional (Isoda, Cedillo, 2012b).

En la tabla anterior se puede ver que profundidad y volumen no varían en forma directamente proporcional, lo que se pretende es que el estudiante identifique la forma como aumenta la profundidad cuando el volumen aumenta un litro. Cada vez que se agrega un litro de agua la profundidad aumenta en dos centímetros, en esta situación se intenta que el estudiante identifique la constante de proporcionalidad y la pertinencia de utilizar el valor unitario como técnica más eficiente.

Para cumplir con dicha tarea se busca el cociente entre profundidad y volumen para encontrar una cantidad constante que al multiplicarse por una cantidad variable (volumen del agua en litros) permite encontrar otra cantidad variable (profundidad del agua en centímetros). Una vez realizado el trabajo los alumnos deberán generar expresiones aritméticas que correspondan a casos

similares (peso  $\div$  longitud, distancia  $\div$  tiempo, costo  $\div$  longitud, peso  $\div$  número de hojas, etc.). En este caso se observa que dos variables son directamente proporcionales si el cociente entre los valores correspondientes a cada una de las variables se mantiene constante.

Luego de analizar la tabla se retoman ejemplos anteriores para identificar cómo se da la transición de un modelo tabular (tabla) hacia un modelo gráfico, una vez hecha la gráfica cartesiana se analiza comparando las líneas A y B que representan dos cables:

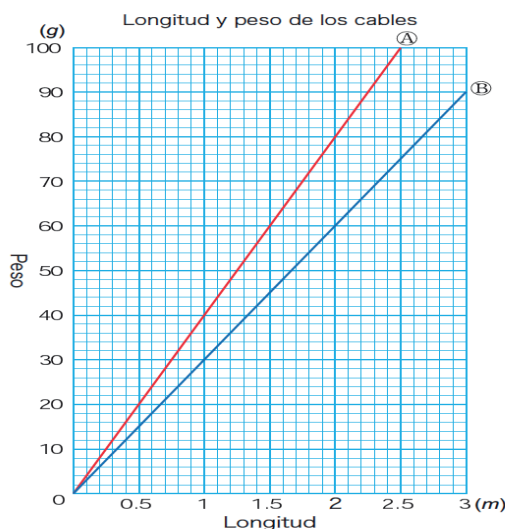


Imagen 7. Gráfica de variación proporcional (Isoda, Cedillo, 2012b, p. 54)

En esta gráfica se intenta distinguir cuál de los cables es más pesado, además se busca encontrar la longitud y/o peso, dada una de las cantidades. Con ello se establece que en la gráfica de una relación directamente proporcional se construye una línea recta que pasa por el punto  $(0, 0)$ , es decir la intersección de los ejes vertical y horizontal, además el cociente entre las dos magnitudes (peso y longitud) es constante. Con este tipo de tareas los estudiantes inician el estudio de situaciones para comprender la transición de un modelo aritmético a un modelo algebraico y la relación de las líneas rectas con la función lineal.

Como se puede observar, en su papel de «aprendices» de matemáticas los estudiantes resuelven tareas relacionadas con la variación proporcional directa,

de esta forma se busca que representen relaciones matemáticas en una tabla, que entiendan el concepto de proporcionalidad directa, que expresen con palabras una relación matemática, que construyan gráficas que representen relaciones y que resuelvan problemas de proporcionalidad directa.

En el último tema de estudio asociado a la variación proporcional directa, donde el estudiante funciona como «aprendiz», se propone una tarea relacionada con la proporcionalidad inversa, en ella realizan el mismo recorrido que en la directa, aunque con un menor número de tareas, un ejemplo de éstas, tomado de Isoda y Cedillo (2012b), es *establecer la relación entre el ancho y el largo de varios rectángulos cuya área sea  $24 \text{ m}^2$* .

Una vez identificadas las relaciones entre largo y ancho, se da el valor del «ancho» y se pide llenar una tabla con los datos faltantes que coinciden con el número de relaciones que se pueden establecer dada el área especificada, luego se pide identificar cómo cambia el «largo» de cada rectángulo cuando el ancho se duplica, triplica, etc. Con ello se instituye que «cuando dos cantidades cambian juntas y una de ellas disminuye a la mitad, la tercera parte y así sucesivamente, mientras la otra aumenta al doble, al triple y así sucesivamente, decimos que esas cantidades varían de forma inversamente proporcional» (Isoda, Cedillo, 2012b, p. 98).

Después de analizar y resolver la tabla se pide elaborar la gráfica, la intención es identificar que la proporcionalidad inversa no se representa mediante una línea recta sino una curva, situación que en la modelización funcional constituye el antecedente para abordar el trabajo de la inversa de una función y la función inversa. Para cerrar el estudio de la proporcionalidad, se plantean tareas para un «aprendiz de matemáticas», en este momento se pretende que «ejerciten» los aspectos trabajados durante el último tema de la unidad, podría decirse que con estas tareas (Ver imagen 8) se concluye el estudio de la proporcionalidad y el modelo aritmético.

Como se puede observar, con estas actividades se pretende cumplir un propósito, que los estudiantes adquieran el dominio matemático de la proporcionalidad mediante tareas enmarcadas en la organización clásica. Si bien en algunos momentos se coloca al estudiante en posición de «analista», en términos generales sus tareas tienen que ver con el «aprendiz» de matemáticas, no así en su rol de profesor.

### Actividades que se sugieren para los futuros docentes

1. El perímetro del círculo se calcula mediante la fórmula:  $P = 2\pi r$ , donde  $P$  representa al perímetro, la letra  $\pi$  representa al número 3.14 y la letra  $r$  al radio del círculo. Da los valores al radio para llenar la tabla

|           |   |  |  |  |  |  |  |
|-----------|---|--|--|--|--|--|--|
| Perímetro |   |  |  |  |  |  |  |
| Radio     | 0 |  |  |  |  |  |  |

- ¿El comportamiento del perímetro y el radio es directamente proporcional?
- En caso de contestar afirmativamente la pregunta anterior, responde: ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?
- Dibuja una gráfica cartesiana para los valores de la tabla.

2. El área del círculo se calcula mediante la fórmula:  $A = \pi r^2$ , donde  $A$  representa al área, la letra  $\pi$  representa al número 3.14 y la letra  $r$  al radio del círculo. Da los valores al radio para llenar la tabla

|       |   |  |  |  |  |  |  |
|-------|---|--|--|--|--|--|--|
| Área  |   |  |  |  |  |  |  |
| Radio | 0 |  |  |  |  |  |  |

- ¿El comportamiento del área y el radio es directamente proporcional?
- En caso de contestar afirmativamente la pregunta anterior, responder: ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?
- Dibuja una gráfica cartesiana para los valores de la tabla.

Imagen 8. Actividades de variación proporcional directa (Cedillo, et-al., 2012, p. 115).

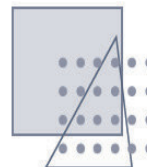
Por otra parte, las situaciones problemáticas planteadas dejan muy poco espacio para una institucionalización que permita a los estudiantes reconocer y nombrar los conceptos matemáticos implícitos en esos problemas y cuando se institucionaliza, es claro que se hace desde el soporte que brinda la organización clásica. Este desequilibrio entre problemas y conceptos es propio de las actividades para la escuela primaria pero también se hace presente en los programas para las escuelas normales, es relevante destacarlo porque en general, los profesores en formación resuelven tareas muy similares a las de la escuela primaria.

Para ilustrar el argumento anterior, en la última tarea planteada se sugiere la resolución de situaciones de variación proporcional directa, incluidas en el bloque 3 del texto «Del sentido numérico al pensamiento prealgebraico» (Cedillo y Cruz, 2012), dicho bloque se asocia con el trabajo de fracciones comunes y se incluye una hoja de trabajo denominada «Fracciones y razones» donde se incluyen tareas de «resolución de problemas» como la siguiente:

## Hoja de trabajo 25

### Fraciones y razones

Observa la figura de la derecha para contestar lo que se indica en cada inciso.



1. ¿Cuál fracción corresponde a la cantidad de puntos que están totalmente dentro del triángulo respecto al total de puntos que aparecen en la figura? \_\_\_\_\_
2. ¿Cuál fracción representa la cantidad de puntos que están dentro del cuadrado con respecto al total de puntos que hay en la figura? \_\_\_\_\_

Imagen 9. Actividades de cierre de la unidad de aprendizaje 4 (Cedillo y Cruz, 2012, p. 94).

La imagen 9 constituye un ejemplo del tipo de tareas con las que concluye el estudio de la variación proporcional, lo destacable es la ausencia de tareas didácticas dado que las únicas aproximaciones a tareas de este tipo aparecen en el estudio de la razón, la proporción y el porcentaje, no así en el estudio de la variación proporcional directa. Lo que esta ausencia indica es el desequilibrio entre las OM y las OD que influye de manera significativa en la praxeología didáctica del profesor en formación.

Cabe señalar que para estudiar las cuestiones didácticas se utiliza la «Guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética en las escuelas normales»<sup>6</sup> (Cedillo, et-al. 2012), en ésta se explicitan las tareas didácticas que se han enunciado porque su intención principal es mostrar a los alumnos ciertas cuestiones de las OD que pudieran ser empleadas para el diseño y experimentación de dispositivos didácticos en semestres posteriores, un ejemplo se muestra a continuación:

6. La «Guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética» se estructura en cinco partes: I). *La enseñanza de las matemáticas: el papel del análisis de videos y de los libros de texto*, dónde se hace énfasis en el Estudio de Clases como método de trabajo colaborativo entre maestros. II). *Aprendiendo a aprender matemáticas*, en el cual se destaca la importancia del estudio y desarrollo del conocimiento matemático. III). *Resolución de problemas: el gusto por las matemáticas*, donde se aborda la distinción entre una tarea y un problema, la importancia de la formulación de preguntas y las fases de enseñanza en la resolución de problemas. IV). *Análisis del tratamiento matemático-pedagógico de los temas de aritmética*, aquí se revisan los conceptos matemáticos abordados en todo el curso y se plantean «Actividades que se sugieren para los futuros docentes». V). *Orientaciones para el trabajo en la Licenciatura en Educación Preescolar*, similar a la parte cuatro, pero dirigida al preescolar.

## FASES DE ENSEÑANZA EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS.

Las fases de enseñanza en el marco de la resolución de los problemas pueden esquematizarse como sigue:

| Fase                                               | Participación del maestro                                         | Estatus de los alumnos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Presentación del problema                          | Presenta el problema sin hacer explícito el objetivo de la clase. | Abordan la tarea pero no necesariamente conocen el objetivo de la clase.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Planeación y predicción de la solución             | Guía a los alumnos para que reconozcan el objetivo.               | Tienen expectativas, conocen el objetivo de la clase, reconocen tanto los datos como las incógnitas, de qué se trata el problema y proponen ideas para abordarlo.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Resolución grupal /resolución independiente        | Apoya el trabajo individual.                                      | Tratan de resolver el problema con las ideas que compartieron. Establecen relaciones entre lo conocido y lo desconocido y tratan de representarlo en diferentes formas. Es suficiente si algunos alumnos proponen ideas, no debe esperarse hasta que todos los alumnos den respuestas correctas, porque responder correctamente no es el propósito principal de la clase. Si se dedica tiempo a esperar a todos, los alumnos pueden perder sus ideas y decrecerá su motivación para discutir las soluciones que se presenten. |
| Explicación y discusión / validación y comparación | Guía la discusión con base en el objetivo de la clase.            | Explican cada acercamiento y los comparan relacionando lo conocido con lo desconocido. Se comunican para entender las ideas de los demás considerando sus acercamientos. Valoran el esfuerzo de los demás y reconocen que es una meta a lograr mediante el trabajo en grupo.                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Resumen/aplicación y posteriores desarrollos       | Guía la reflexión de los alumnos                                  | Reorganizan lo que aprendieron durante la clase; valoran sus logros, formas de razonamiento e ideas.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

Imagen 10. Fases de enseñanza con la resolución de problemas (Cedillo, *et. al.* 2012, p. 24).

En la imagen se puede ver la semejanza entre la secuencia planteada y los momentos didácticos planteados por Chevallard (1999), así como los tipos de situaciones enunciadas por Brousseau (1980) en la Teoría de las Situaciones Didácticas que se aborda en la Unidad de aprendizaje I, junto con el Estudio de clases<sup>7</sup>, en esa unidad se realiza un análisis de ambos modelos a partir de la revisión de textos.

### 3.1.6. Praxeologías matemáticas y modelización algebraica

En el segundo curso sobre enseñanza de las matemáticas (Álgebra: su aprendizaje y enseñanza) los estudiantes recuperan algunos elementos aritméticos asociados a la proporcionalidad para comprender el modelo algebraico que constituye la modelización funcional.

Este trayecto se inicia con el estudio de las regularidades que presentan los patrones numéricos (funciones lineales y cuadráticas), dado que las expresiones

7. El Estudio de Clases es una modalidad de desarrollo profesional docente, conducida por los propios profesores de las escuelas [...]. Un grupo reducido de docentes planifica una clase, uno o dos docentes implementan la clase con sus alumnos, la clase es observada y analizada en público (Isoda y Olfos, 2009a, p. 17).

algebraicas adquieren significado en un contexto numérico, con esta situación se llega a la formulación de conjeturas que orientan la construcción de expresiones algebraicas para describir las reglas propias de dichos patrones. Este acercamiento permite que los estudiantes puedan asignar significados a las variables de una función como símbolos que pueden admitir muchos valores que dependen de otro valor (SEP, 2012c).

Se podría decir que una vez trabajada la proporcionalidad y los patrones numéricos, a través del análisis del comportamiento de las gráficas y tablas, los estudiantes profundizan en el concepto de función, su representación algebraica, tabular y gráfica, así como en los conocimientos matemáticos asociados con dicho concepto.

En tal caso es evidente que se retoman elementos del curso de Aritmética para el uso del lenguaje algebraico, especialmente para expresar generalizaciones<sup>8</sup>.

En este sentido el estudiante comprende que algebrizar brinda una mayor ventaja que el empleo de la aritmética, es decir, que la manipulación algebraica, aunque más compleja, es más eficaz porque sirve para todos los casos de una misma situación.

Entre las actividades que vinculan la proporcionalidad con el estudio del Álgebra y que pudieran relacionarse con un modelo epistemológico de referencia propio de la modelización matemática, están aquellas asociadas a una representación como la siguiente:

| <i>Valor de entrada</i> | <i>Valor de salida</i> |
|-------------------------|------------------------|
| 7                       | 14                     |
| 8                       | 16                     |
| 9                       | 18                     |
| 15                      | 30                     |
| 18                      | 36                     |

Tabla 10. Representación tabular (SEP, 2012c).

8. El curso de *Álgebra: su aprendizaje y enseñanza* se desarrolla en segundo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, se compone de tres unidades de aprendizaje: I) Acercamiento a los conceptos de función y ecuación, II) Comportamiento de funciones lineales, cuadráticas y racionales y III) Procedimientos para operar con expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones (SEP, 2012c). Cabe señalar que, aunque el curso profundiza en la noción de función, su tipología y representación, no es sino en la función lineal donde se aprecia la asociación más apegada a la proporcionalidad, por tal motivo en este apartado sólo se hace alusión a la descripción y análisis de la función lineal inscrita en el texto del saber.



En esta tarea, el estudiante debe identificar el valor de salida cuando los valores de entrada son 5, 25 y 17, indicar las operaciones que permiten obtener los resultados y escribir una expresión matemática que produzca los valores de entrada y salida. El modelo algebraico surge al representar el valor de entrada con « $x$ » y al valor de salida como « $y$ » para formar la expresión  $y=2x$ . En este caso el 2 representa la constante y establece que, si una magnitud aumenta el doble, el triple, etc., la otra lo hará en la misma proporción. A partir del análisis de la tabla se puede reconocer la relación entre el valor de entrada y de salida (dominio y codominio), de esa manera el estudiante podrá establecer la transición hacia un modelo generalizante que no se limita a los valores absolutos propios de la aritmética.

Luego de esta primera aproximación a los valores proporcionales, el programa del curso se centra en tareas relacionadas con la constante de proporcionalidad fraccionaria, la actividad es similar en todos los casos, se plantea una representación tabular con los valores de entrada y de salida para establecer la relación entre ambos a través de una expresión matemática, la diferencia radica en el cociente fraccionario. Este hecho al igual que en la perspectiva aritmética se resuelve al dividir el valor de salida entre el valor de entrada, sin embargo la dificultad y transición a la vez, radica en el modelo algebraico que tendrá que emplear el estudiante para establecer dicha relación y encontrar el valor de  $y$  dados algunos casos, la expresión quedaría representada como:  $x/2$ ,  $x(1.5)$  o  $x(3/2)$ ,  $x/10$  o bien  $x(1.01)$ .

En cuanto a la función lineal, se incluyen tareas con representaciones tabular, algebraica y gráfica para estudiar el comportamiento de funciones de la forma  $y=mx+b$ , reconocer la pendiente de la recta como la razón del desplazamiento vertical en el eje  $y$ , el desplazamiento horizontal en el eje  $x$ , así como identificar los conceptos de crecimiento y decrecimiento al observar el comportamiento de pendiente de una recta (SEP, 2012c).

### 3.1.7. Praxeologías didácticas y modelización algebraica

Una vez realizadas las tareas anteriores, centradas en lo matemático, se plantean tareas relacionadas con lo didáctico como:

- Análisis de propuestas didácticas para la transición de la aritmética al álgebra.

- Diseño de secuencias didácticas para la educación primaria en las que se aborde el estudio de las literales y el desarrollo del pensamiento algebraico.
- Revisión y análisis de los contenidos matemáticos que se abordan en la educación primaria e identificación de aquellos que constituyen la base para el estudio de las transformaciones algebraicas.
- Diseño de problemas que requieran el uso del código algebraico en su planteamiento y solución (SEP, 2012c).

Como puede observarse, a partir del modelo funcional el estudiante tiene aproximaciones a conceptos asociados con la proporcionalidad, lo mismo desde un papel de «aprendiz» de matemáticas que como profesor «analista» que realiza análisis matemáticos o de perspectivas teóricas para identificar la transición de la Aritmética al Álgebra.

También se hace presente el rol del profesor «diseñador» de problemas matemáticos y secuencias didácticas, aunque los diseños no se experimentan en la escuela primaria porque el momento del diseño no se corresponde con los periodos de práctica en las escuelas primarias. Con ello se confirma la dificultad que existe en las restricciones institucionales de formación para la experimentación de dispositivos didácticos en la escuela primaria.

Una vez hecha la revisión del texto del saber para identificar el número y tipo de tareas que se incluyen en los cursos *Aritmética: su aprendizaje y su enseñanza* (Modelo clásico de la proporcionalidad) y *Álgebra: su aprendizaje y su enseñanza* (Modelo funcional),<sup>9</sup> en la tabla siguiente se observan las cifras globales de ambos tipos de praxeologías:

9. Se retomó sólo la primera unidad del curso de Álgebra: su aprendizaje y su enseñanza dado que es en ésta donde se presenta de forma más clara y explícita la vinculación de la proporcionalidad con el modelo funcional.

| <i>Organizaciones matemáticas (OM)</i> | <i>Tareas/Número</i> | <i>Frecuencia relativa</i> |
|----------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Razones                                | 7                    | 33.33%                     |
| Porcentaje                             | 3                    | 14.29%                     |
| Proporcionalidad                       | 5                    | 23.81%                     |
| Relaciones funcionales                 | 6                    | 28.57%                     |
| TOTAL                                  | 21                   | 100%                       |

Tabla 11. Organizaciones matemáticas en el texto del saber.

Como lo muestra la tabla 11, hay un mayor número de praxeologías matemáticas dedicadas al estudio de la razón (33.33%), estas tareas principalmente se enfocan al trabajo con el concepto de razón, su representación en gráficas, la razón y comparación entre dos magnitudes, la relación entre la razón, la proporción y la fracción así como tareas para la búsqueda de razones equivalentes.

Para el estudio del porcentaje sólo se incluyen tres tareas, aquellas donde se vinculan porcentaje y razón, su representación gráfica y la resolución de problemas que involucran el cálculo de porcentajes como una razón.

Para el caso de la proporcionalidad, el número de tareas se ubica en un lugar intermedio en comparación con el resto de los otros conceptos matemáticos, el 23.81% de las tareas se focalizan en la proporcionalidad y fundamentalmente se refieren al manejo de la variación proporcional directa y la constante de proporcionalidad en modelos tabulares, la construcción de gráficas de proporcionalidad, la resolución de problemas de proporcionalidad directa y la búsqueda de valores faltantes.

Por último, respecto a las relaciones funcionales se encontraron tareas asociadas al estudio de los patrones numéricos (valores de entrada y salida), valores proporcionales, reglas de dos pasos, patrones con valores negativos, constante de proporcionalidad fraccionaria y lectura de expresiones algebraicas.

En esta distribución se observa que dicho porcentaje pertenece al estudio directo de la proporcionalidad, lo que indica un desajuste significativo en el bloque práctico-técnico, dicho desajuste muestra una débil formación matemática en el ámbito de la proporcionalidad y una relación apenas tangencial con los modelos epistemológicos de referencia (El modelo clásico y el modelo funcional).

En cuanto a las praxeologías didácticas, sólo se hace visible una diferencia de 5 tareas entre las OM y las OD (21 para las primeras y 16 para las segundas),

no obstante la distribución porcentual entre los objetos de estudio si refleja diferencias relevantes, sobre todo en las OD de la proporcionalidad, esto se muestra en la siguiente tabla:

| <i>Organizaciones didácticas (OD)</i> | <i>Tareas/Número</i> | <i>Frecuencia relativa</i> |
|---------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Razones                               | 3                    | 18.75%                     |
| Porcentaje                            | 9                    | 56.25%                     |
| Proporcionalidad                      | 0                    | 0%                         |
| Relaciones funcionales                | 4                    | 25%                        |
| TOTAL                                 | 16                   | 100%                       |

Tabla 12. Organizaciones didácticas en el texto del saber.

La tabla anterior muestra la ausencia de tareas didácticas para el estudio de la proporcionalidad, pero paradójicamente, el menor número de tareas matemáticas (para el porcentaje) corresponde al mayor número de tareas didácticas, éstas se refieren al análisis del funcionamiento del porcentaje como objeto matemático, a la identificación de dificultades que los alumnos de la escuela primaria pudieran tener en la resolución de situaciones problemáticas, la identificación de saberes previos necesarios para la comprensión de este concepto y la descripción de situaciones en las que el porcentaje se hace presente, cabe señalar que es en el estudio de este objeto de saber donde aparece la única OD cuya tarea corresponde a la puesta en práctica o experimentación de situaciones problemáticas con alumnos de la escuela primaria.

En lo concerniente a la razón, apenas se observa un 18.75% de tareas didácticas que se centran en la identificación de los propósitos didácticos en ciertas lecciones del libro de texto y las dificultades que podría enfrentar un alumno de la escuela primaria para comprender su significado.

En cuanto a las relaciones funcionales, el 25% de las tareas didácticas corresponden a este objeto y se focalizan en la revisión, análisis y diseño de situaciones problemáticas y secuencias didácticas.

En conclusión, el texto del saber refleja una distribución de tareas matemáticas y didácticas que da mayor énfasis al papel de «aprendiz de matemáticas» y sólo incluye pocas tareas en las que se sitúa como profesor en acto, tal situación se muestra en la siguiente tabla:

|                           | <i>Aprendiz de matemáticas</i> | <i>Profesor analista</i> | <i>Ingeniero Diseñador</i> | <i>Profesor en acto</i> |
|---------------------------|--------------------------------|--------------------------|----------------------------|-------------------------|
| No. de tareas matemáticas | 21                             | 7                        | 2                          | 1                       |
| No. de tareas didácticas  | 0                              | 5                        | 1                          | 0                       |
| Total absoluto            | 21                             | 12                       | 3                          | 1                       |
| Total relativo            | 56.75%                         | 32.44%                   | 8.11%                      | 2.70%                   |

Tabla 13. Papel del profesor en las OM y las OD.

Tal como lo muestra la tabla 13, más de la mitad (56.75%) son tareas matemáticas, donde el estudiante ocupa el rol de «aprendiz» de matemáticas, mientras que el 43.25% son tareas didácticas en las que el profesor en formación juega un rol de «analista», «diseñador» y «profesor en acto», roles que se corresponden con los módulos del Recorrido de Estudio e Investigación. No obstante, en las tareas didácticas se hace mayor énfasis en la postura de profesor analista, sobre todo cuando se trata de la revisión de estructura, funcionamiento y dificultades de las tareas matemáticas vividas.

Para el caso del profesor «diseñador» sólo se incluye un 8.11% de tareas didácticas y sólo una corresponde al modelo aritmético, las dos restantes se enfocan en el modelo algebraico y promueven el diseño de situaciones que requieren el uso de un código de esta naturaleza y el diseño de secuencias didácticas para el desarrollo del pensamiento algebraico. Para el rol de «profesor en acto» sólo se incluye un 2.7% (una tarea) que corresponde al estudio del porcentaje y donde se pide que apliquen una situación problemática previamente elaborada, con alumnos de educación básica.

Como se puede observar, el texto del saber oficial no plantea un espacio curricular para la experimentación de dispositivos de enseñanza de la proporcionalidad, sólo se plantea para el porcentaje y si bien es cierto que en otras asignaturas los profesores en formación realizan visitas de observación a las escuelas primarias, lo hacen para revisar los contextos en los que se ubican las escuelas y sólo ocasionalmente pueden realizar una observación en aula, es hasta el segundo semestre, momento en el que ya ha pasado el estudio de la Aritmética (y de la proporcionalidad), cuando se programan ciertas «ayudantías»<sup>10</sup> en diferentes

10. En las ayudantías los profesores en formación realizan actividades de apoyo al profesor titular del grupo, como revisión de trabajos, registro de asistencia, entrega de tareas escolares y en algunos casos

grados de la escuela primaria, lo que minimiza las posibilidades de que cada uno de los estudiantes tenga la posibilidad de experimentar un dispositivo de enseñanza propio de la proporcionalidad.

Finalmente, se podría decir que el texto del saber otorga mayor énfasis a las praxeologías matemáticas, lo que ilustra la importancia que la institución otorga al dominio de lo matemático, no obstante esta consideración, las temáticas que corresponden al estudio formal de la proporcionalidad se limitan al estudio de conceptos matemáticos que conforman el modelo clásico de la proporcionalidad y al bloque tecnológico-teórico propio de la Teoría de Razones y Proporciones. También es significativo que se minimizan los momentos en que se especifican las técnicas convencionales para gestionar su estudio y evolución en las escuelas de educación básica. Ambas deficiencias, la conceptual y la técnica, influirán de manera directa en el diseño y posterior gestión de dispositivos didácticos.

En cuanto a las praxeologías didácticas es destacable la intención del texto para favorecer el papel del profesor analista, las tareas están centradas principalmente en las cuestiones matemáticas más que en las didácticas, en muy pocos momentos se pide al profesor en formación que diseñe situaciones o dispositivos para el estudio de la proporcionalidad y menos que los experimente en el espacio escolar.

Es de considerar también que el texto oficial del saber aumenta progresivamente la inserción de los profesores en formación en la praxis educativa y aunque en los últimos dos semestres de su formación la mayor parte la desarrollan en la escuela primaria, no es desconocido que al menos en el periodo en el que estudian cuestiones aritméticas (que corresponden a una gran carga curricular de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria) las aproximaciones entre el saber y el hacer didáctico guardan un importante desequilibrio en las praxeologías de formación.

---

aplicación de alguna breve actividad como leer o escribir un texto con los alumnos, plantearles un problema matemático, generalmente realizan estas actividades como diagnóstico que luego analizan bajo la luz de algún sustento teórico en la Escuela Normal, pero no se involucran directamente en el diseño de dispositivos didácticos para trabajar algún campo del saber, esto se presenta hasta el tercer semestre cuando cursan la asignatura de Geometría: su aprendizaje y su enseñanza.

#### IV. VIVIR UN REI

##### LAS PRAXEOLOGÍAS DE LOS «APRENDICES» DE MATEMÁTICAS

Como se dijo en capítulos anteriores el Recorrido de Estudio e Investigación (REI), es un dispositivo para la formación y su desarrollo parte de una cuestión generatriz, de una «pregunta viva» (Q0) que permita el estudio de un saber particular, cuyas respuestas no sean directamente accesibles y que a su vez se desglose en cuestiones de diferente grado con las que se trastoquen las nociones relacionadas entre sí (Ruiz, 2015). En el caso que nos ocupa, el recorrido articula los cuatro módulos que componen un Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de profesores (REI-FP) y en cada módulo el profesor en formación ocupa un rol particular:

|                  |                                                      |                                         |
|------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| • Primer módulo  | M <sub>1</sub> : «Vivir un REI»                      | Rol: « <i>aprendiz de matemáticas</i> » |
| • Segundo módulo | M <sub>2</sub> : «Analizar el REI»                   | Rol: « <i>profesor analista</i> »       |
| • Tercer módulo  | M <sub>3</sub> : «Diseñar un REI»                    | Rol: « <i>ingeniero diseñador</i> »     |
| • Cuarto módulo  | M <sub>4</sub> : «Gestionar y<br>experimentar un REI | Rol: « <i>profesor en acto</i> »        |

En este capítulo se da cuenta de lo acontecido en el Módulo M<sub>1</sub>, en el que se plantearon varias tareas y subtareas matemáticas, cabe aclarar que luego de que se resolvían se desarrolló un momento en el que los profesores en formación discutían sobre la pertinencia y la efectividad de las técnicas que utilizaron. La cuestión generatriz del REI-FP fue la siguiente:

Q0-FP: ¿Cuáles son las praxeologías matemáticas y didácticas ligadas a la proporcionalidad a incluirse en la formación de profesores?

Bajo esta perspectiva, la pregunta ha de guiar la reconstrucción de praxeologías matemáticas, por ello el objetivo es analizar las acciones de los profesores en formación cuando «viven» el REI ocupando el rol de «aprendices de matemáticas», así la cuestión de este módulo es:

Q1: ¿Qué técnicas ( $\tau$ ) y discursos tecnológico teóricos ( $\theta$ ,  $\Theta$ ) despliegan los profesores en formación para resolver tareas (T) matemáticas en la reconstrucción de una praxeología ligada a la proporcionalidad?

Para dar respuesta a tal cuestión, durante el módulo  $M_1$  del REI-FP, se plantearon cinco tareas en las que se gestionaron los seis momentos de estudio<sup>1</sup> propuestos por Chevallard (1999). Cabe aclararse que las tareas en este primer módulo podrían denominarse «rutinarias» porque los profesores en formación dominaban ya las técnicas para su solución, pero también se plantearon otras para las que aún no disponían de una técnica convencional. Con ello «...nuevos tipos de tareas, que son entonces los tipos de problemas, se asientan así, y nuevas praxeologías vendrán a constituirse a su alrededor...» (Chevallard, 1999, p. 227).

Dicho asentamiento pretendió establecer un recorrido desde la aritmetización –vista a partir de la Teoría de las Razones y Proporciones– hacia el modelo algebraico para llegar a la generalización en la solución de situaciones de la proporcionalidad.

El siguiente planteamiento denominado «El Petróleo» se constituyó como eje del recorrido de estudio a través del cual se organizaron todos los módulos del REI-FP.

En México se preparan varias clases de petróleo crudo para exportación, entre ellas el Olmeca y el Maya, según su demanda tiene variaciones en su cotización, los datos más recientes indican que durante el último cuatrimestre del 2014 el costo de un barril de petróleo Olmeca era de \$995 y el de un barril de petróleo Maya era de \$865. Dado el impacto que tiene la variación de los precios en la producción del petróleo resulta interesante realizar un estudio que permita identificar la relación que se establece entre el número de barriles y su costo.

En lo que sigue, se da cuenta del tipo de tareas T1 (cinco) que se desprenden de la situación anterior y de las técnicas matemáticas que los profesores en forma-

---

1. Dichos momentos son: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación.



ción desplegaron ante cada una. Mediante este análisis se busca identificar las técnicas que resultaron más eficientes para cada tarea y su evolución, además se analiza el discurso tecnológico que subyace a las técnicas empleadas.

#### 4.1. TAREA DE VALOR FALTANTE Y MAGNITUD VARIABLE

Como se ha mencionado, todo el primer módulo gira en torno de la cuestión Q1, empero ésta a su vez va generando otras cuestiones propias del proceso de estudio. Para esta primera etapa del módulo se estructuró la cuestión Q.1.1., a saber:

Q1.1. ¿Qué técnicas ( $\tau$ ) despliegan los profesores en formación para resolver tareas (T1.1) de proporcionalidad asociadas al valor faltante?

Para dar respuesta a dicha cuestión se planteó la tarea (T1.1) relativa al valor faltante con diferentes magnitudes en una relación proporcional entre dos magnitudes (cantidad-costo). La tarea incluyó los siguientes cuestionamientos:

- ¿Cuál es el costo de 4 barriles de petróleo Maya? (magnitud entera).
- ¿Cuánto se debe pagar por  $\frac{3}{4}$  de barril Maya? (magnitud fraccionaria).
- ¿Cuánto se debe pagar por 0.358 partes de barril Maya? (magnitud decimal).
- Si se quiere comprar \$900, \$450 y \$45 de petróleo Maya, ¿qué cantidad de barriles se debe dar? (valor faltante magnitud entera-número de barriles).

Para este tipo de tareas las técnicas más eficientes en función del tipo de magnitud son el valor unitario y el factor de proporcionalidad, al tratarse de una relación directamente proporcional el cociente de las magnitudes que varían es siempre el mismo, en esta variación es  $\frac{865}{1}$  y la constante de proporcionalidad o valor unitario se determina con el precio de cada barril.

Para encontrar *el costo* (valor faltante), se puede utilizar la siguiente técnica: a) identificar el costo de un barril (valor unitario) y, b) multiplicar dicho valor por la cantidad de barriles que se desea comprar (4,  $\frac{3}{4}$  o 0.358). Del mismo modo, para encontrar *el número* de barriles que se compran con determinada

cantidad de dinero (valor faltante), se puede utilizar la siguiente técnica: a) identificar el valor unitario (865) y, b) dividir la cantidad de dinero entre el valor unitario.

La tarea incluía diferentes tipos de magnitudes (entera, decimal o fraccionaria), la intención era que *en el momento exploratorio* los estudiantes identificaran y utilizaran una técnica ( $\tau$ ) para resolver tareas de valor faltante, algunas podrían ser valor unitario, factor constante de proporcionalidad ( $\tau_1$ ) y regla de tres ( $\tau_2$ ). También se esperaba que valor unitario fuese la ( $\tau$ ) más utilizada por su eficacia y economía. Una vez que utilizaran y validaran la eficacia de la técnica, se gestionaría un *momento de trabajo de la técnica*<sup>2</sup> para que los profesores en formación la dominaran plenamente y para que, en lo sucesivo fueran capaces de identificar el tipo de tareas para las que las técnicas  $\tau_1$  y  $\tau_2$  resultan eficientes y utilizarlas de modo efectivo. Así, en la medida que comprendan su funcionalidad, será posible gestionar el *momento de institucionalización* (tecnológico-teórico) relativo a la Teoría de Razones y Proporciones.

#### 4.1.1 Praxeologías con magnitudes enteras

El propósito de la tarea ¿Cuál es el costo de 4 barriles de petróleo Maya?) era que identificaran el valor faltante en una relación de variación proporcional entre magnitudes enteras, la técnica más eficiente y económica<sup>3</sup> para resolverla es el «valor unitario» puesto que se incluye el costo de un barril (\$865), por lo tanto para encontrar el valor faltante bastaría con multiplicar cualquier número de barriles por el valor de un barril. En lo que sigue se describen las técnicas utilizadas por los profesores en formación.

Siete de los ocho profesores en formación utilizaron el valor unitario considerándolo como multiplicador tal como lo hace PF4<sup>4</sup> (Véase imagen 11).

2. El *momento de trabajo de la técnica* se caracteriza por mostrar a través de una OM particular la forma en que se puede retomar un ingrediente técnico que los alumnos han aprendido a emplear de modo rígido y limitado para generar nuevas técnicas, justificaciones, explicaciones y cuestiones con el propósito de que la OM inicial se amplíe y complete progresivamente (Fonseca, Casas, Bosch y Gascón, 2009).

3. Si bien, esta tarea también puede resolverse utilizando la técnica «regla de tres», la más económica, porque exige menos fases en su desarrollo es la de «valor unitario».

4. PF4: Profesor en Formación No. 4. En lo que sigue se utilizará esta designación para hacer referencia a cada uno de los sujetos que participaron en este estudio.

$$\begin{array}{r} 865 \times 4 \\ \hline 3460 \end{array}$$

Imagen 11. Valor unitario como multiplicador (PF4).

Como se puede ver, la multiplicación se asocia a una relación de proporcionalidad y aunque posiblemente no ha sido identificada todavía desde una definición formal, los profesores en formación usan la multiplicación como una técnica plausible. Con ello inicia el estudio de la proporcionalidad.<sup>5</sup> En esta misma tarea se presentó el caso de un profesor en formación (PF2) que además de la consideración anterior optó por una representación inicial de la regla de tres:

|                                                                  |                                                                                    |                                                                                                                                             |        |           |      |           |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-----------|------|-----------|
| $\begin{array}{r} 22 \\ 865 \times 4 \\ \hline 3460 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 16 \div 865 \\ 46 \times \end{array} \rightarrow \boxed{\$3460}$ | <table border="1"> <tr> <td>Olmeca</td> </tr> <tr> <td>1 = \$995</td> </tr> <tr> <td>Maya</td> </tr> <tr> <td>1 = \$865</td> </tr> </table> | Olmeca | 1 = \$995 | Maya | 1 = \$865 |
| Olmeca                                                           |                                                                                    |                                                                                                                                             |        |           |      |           |
| 1 = \$995                                                        |                                                                                    |                                                                                                                                             |        |           |      |           |
| Maya                                                             |                                                                                    |                                                                                                                                             |        |           |      |           |
| 1 = \$865                                                        |                                                                                    |                                                                                                                                             |        |           |      |           |

Imagen 12. Regla de tres representada (PF2).

No obstante, como se puede ver, esta técnica no fue desarrollada completamente dado que durante el proceso aprecia que esta acción era innecesaria para llegar al resultado. En esta tarea los ocho profesores en formación identificaron y emplearon el valor unitario ( $\tau_1$ ) como la técnica más eficiente y económica para resolver la tarea.

#### 4.1.2. Praxeologías con magnitudes fraccionarias

En la tarea donde se incluyó una magnitud fraccionaria (*¿Cuánto se debe pagar por 3/4 de barril Maya?*) el valor unitario también fue la técnica más utilizada, seis de los ocho profesores en formación la utilizaron, aunque con algunas variantes como se aprecia en lo que sigue.

5. Para el estudio de la multiplicación con números naturales, el primer paso es favorecer la comprensión del producto como cantidad de elementos o medida resultante de grupos de igual número de elementos o medidas que se repiten, lo que se refiere a un caso particular de la proporcionalidad (Isoda y Olfos, 2009b).

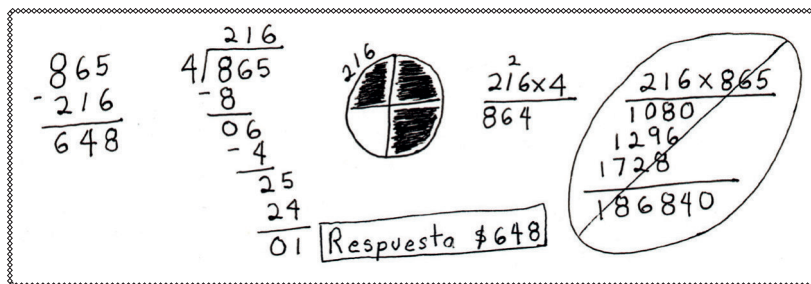


Imagen 13. Representación gráfica de la fracción (PF2).

En este caso, PF2 toma el valor unitario como dividendo que permite identificar el valor de cada  $\frac{1}{4}$  de barril, por ello divide entre cuatro para después restar el cociente al valor unitario y obtener el valor de  $\frac{3}{4}$  de barril. En esta técnica destaca la representación gráfica de la fracción y la expresión del valor de cada una de las partes. Para culminar, PF2 multiplica el valor de un cuarto (216) por el valor unitario (\$865), posiblemente en un intento de «validar» de la técnica, sin embargo el producto no es coherente con el planteamiento por lo que PF2 la invalida.

Una técnica similar utilizada por cuatro profesores en formación se observa en la imagen 14, en este caso primero dividieron 865 entre 4 y posteriormente multiplicaron el resultado por tres.

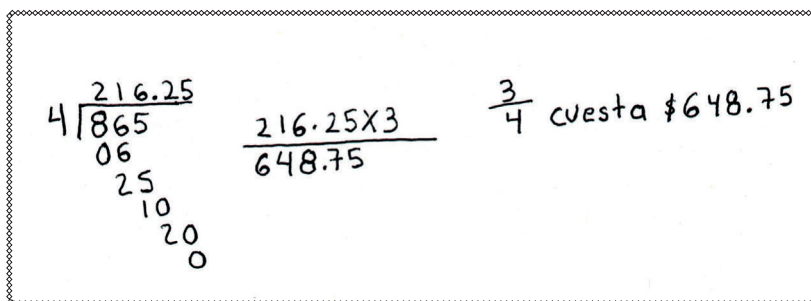


Imagen 14. Valor unitario en la magnitud fraccionaria (PF1).

Un uso diferente del valor unitario lo hace PF5 quien transforma  $\frac{3}{4}$  en 0.75 para luego multiplicar 0.75 por 865 (Véase imagen 15).

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

$$\begin{array}{r} 865 \times .75 \\ 4325 \\ 6055 \\ \hline 648.75 \end{array}$$

Imagen 15. Magnitud fraccionaria transformada a decimal (PF5).

Seis de los ocho profesores en formación utilizan el valor unitario y como se puede observar, la técnica convencional es  $865 \times \frac{3}{4}$  es igual a 865 por 3, entre 4, cuya equivalencia en números decimales es 648.75. Lo que se desea destacar en este caso es que, si bien llegan al resultado correcto, se observan dificultades para multiplicar fracciones.

Los otros dos profesores en formación utilizan la regla de tres, uno la representa al inicio del proceso, pero al final sólo usa el producto de 865 por 0.75, otro (PF3), como se observa en la siguiente imagen, realiza el proceso completo de la regla de tres.

$$\begin{array}{r} 865 - 100 \\ \times - .75 \\ \hline 648.75 \\ 100 \overline{) 64875} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 865 \\ .75 \\ \hline 4325 \\ 6055 \\ \hline 648.75 \end{array}$$

$$\underline{\$648.75}$$

Imagen 16. Regla de tres en decimales (PF3).

Como se puede observar PF3 cambia la magnitud fraccionaria ( $\frac{3}{4}$ ) a expresión decimal, sin embargo, no asocia el costo de un barril (\$865) a 1 sino a 100, posiblemente porque dicha cantidad constituye el 100% del costo y aunque obtiene la respuesta con la multiplicación  $0.75 \times 865$  «elimina» el punto decimal para dividir el producto entre 100 y llegar al resultado, paso que resulta innecesario. En este caso se puede observar que, aunque la regla de tres resuelve la tarea, el valor unitario resulta una técnica más económica en la tarea con números fraccionarios, aunque la mayoría optó por utilizar decimales para facilitar su operatoria.

#### 4.1.3. Praxeologías con magnitudes decimales

En lo que corresponde a la tarea con una magnitud decimal (¿Cuánto se debe pagar por 0.358 partes de barril Maya?), la técnica más empleada también fue valor unitario, aunque no se diversificó tanto como en la tarea anterior. Siete profesores en formación encontraron el resultado multiplicando el valor unitario (865) por la parte decimal del barril Maya (0.358). Un ejemplo, donde se hace la multiplicación directamente se puede observar en la siguiente imagen.

$$\begin{array}{r}
 865 \times .358 \\
 \hline
 6920 \\
 4325 \phantom{0} \\
 2595 \phantom{00} \\
 \hline
 309.670
 \end{array}$$

Imagen 17. Magnitud decimal (PF5).

Como se puede ver, PF5 detecta que al tratarse de una relación de proporcionalidad, al igual que en la tarea con magnitud entera multiplica el valor unitario por la magnitud decimal. No obstante, la eficiencia de esta técnica, hubo un profesor en formación (Imagen 18) que optó por representar y desarrollar la regla de tres.

$$\begin{array}{lcl}
 865 - 1000 & & 100 \sqrt{309.670} \\
 \times - 358 & \times \begin{array}{r} 358 \\ \times 865 \\ \hline 1790 \\ 2148 \\ 2864 \\ \hline 309670 \end{array} & \begin{array}{r} 309.670 \\ \hline \$309.670 \end{array}
 \end{array}$$

Imagen 18. Regla de tres con decimales (PF3).

En este caso, PF3 representa la regla de tres (arriba a la izquierda) y asocia 865 con 1000, posiblemente porque al quitar el punto decimal de 0.358 asume que la referencia debe ser mil, si bien al momento de colocar la división omite un cero en el divisor, el cociente coincide con el resultado correcto.

En esta tarea, el valor unitario fue la técnica más adecuada dado que los profesores en formación identificaron que era una tarea asociada a la multiplicación con una relación de proporcionalidad. En algunos casos se empleó la regla de tres, sin embargo al tratarse de dos términos conocidos y un tercero con valor 1, la división entre 1 resultaba innecesaria. La dificultad principal se observó en la multiplicación con magnitudes fraccionarias que fueron convertidas a magnitudes decimales para su operatoria. En términos generales, en este primer acercamiento, los profesores en formación encontraron las respuestas correctas a las tareas.

#### 4.1.4. Praxeologías con valor faltante y magnitud entera

Para la tarea *¿Qué cantidad de barriles de petróleo Maya se deben dar por 900, 450 y 45 pesos?*, el valor unitario era la técnica más eficiente dado que el costo de un barril podía ser el divisor del número de barriles dado, es decir, el inverso del valor unitario se constituía como técnica más eficiente y económica. Cabe aclarar que los costos se relacionaban entre sí para observar si dicha variante modificaba la técnica.

En un primer caso, seis de los ocho profesores en formación intentaron representar la regla de tres, pero dos de ellos (Imagen 19) no desarrollaron la técnica completamente porque la multiplicación  $900 \times 1$  no era necesaria, obtuvieron el resultado al dividir 900 entre 865.

The image shows handwritten mathematical work on a grid background. On the left, there are two lines of text:  $1 \rightarrow 865$  and  $\text{¿?} \rightarrow 900$ . In the center, there is a long division problem:  $865 \overline{) 900}$ . The quotient is written as 1.040. The steps of the division are shown: 865 is subtracted from 900, leaving a remainder of 35. Then, a zero is brought down to make 350, and 865 is subtracted from 3500, leaving a remainder of 40. Finally, another zero is brought down to make 400, and 865 is subtracted from 4000, leaving a remainder of 400. On the right, there is a multiplication problem:  $865 \times 4$ . The result is written as 3460.

Imagen 19. Valor unitario como divisor (PF5).

Otros dos profesores en formación hicieron algo similar, pero, como se puede ver en la siguiente imagen calculan la diferencia entre el precio de un barril y el dinero que se quiere gastar ( $900 - 865$ ), con ello «extraen» un barril entero e intentan encontrar la fracción de barril que falta (la diferencia 35); luego plantean la regla de tres  $100/865 = x/35$  donde  $x$  es la fracción de barril. Cuando obtienen

$x=0.04$  barriles, lo suman al barril completo que habían separado y encuentran el resultado, es decir 1.04 barriles por \$900.

$$\begin{array}{r}
 \$865 \quad 1 \quad 900 \\
 \$900 \quad ? \quad -865 \\
 \hline
 35
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 865 - 100 \\
 35 - ?
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r}
 0.04 \\
 865 \overline{) 3500} \\
 \underline{3460} \\
 40
 \end{array}
 \quad
 1.04$$

Imagen 20. Uso de diferencias (PF6).

En este caso, pareciera que emplea la regla de tres, sin embargo el proceso no se desarrolla dado que la multiplicación  $35 \times 100$  no se representa y el resultado sólo se coloca como dividendo, el cociente 0.04 es la cantidad adicional a un barril por cuyo total se pagará \$900. En estos casos, hubo quienes no utilizaron eficazmente esta técnica, por ejemplo PF8 (Véase imagen 21) separó un barril completo ( $900-865$ ), pero en lugar de representar la regla de tres con la igualdad  $100/865=x/35$  dividió 865 entre 35 lo que indica que establece una variación falsa  $1/35 = x/865$ , con base en este error divide 865 entre 35 y encuentra 24.71 para sumarlo al barril separado inicialmente.

$$\begin{array}{r}
 900 \\
 -865 \\
 \hline
 35
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 24.71 \\
 35 \overline{) 865} \\
 \underline{70} \\
 165 \\
 \underline{140} \\
 250 \\
 \underline{245} \\
 05
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 0.04 \\
 865 \overline{) 3500} \\
 \underline{3460} \\
 40
 \end{array}
 \quad
 \boxed{0.04}$$

Imagen 21. Falsa variación (PF8).

Como se puede ver, PF8 replantea su técnica en un segundo momento dado que la equivalencia de un barril con 24.71ml parece no coincidir con la situa-



ción porque no se establece el manejo de litros por barril, por ello la respuesta final es 0.04, hecho que también resulta erróneo al considerar sólo una parte del costo enunciado (\$35 de \$900).

Para resolver la cuestión sobre el número de barriles que se compran con \$450, tres profesores en formación representan inicialmente la regla de tres, pero no la desarrollan, omiten la multiplicación  $450 \times 1$  y dividen  $450 \div 865 = 0.52$  (Véase imagen 22), dos profesores en formación siguen esta misma lógica, aunque no representan la regla de tres sólo utilizan el valor unitario como divisor.

$$R = 0.52 \text{ barriles}$$

$$\begin{array}{r} 1 - 865 \\ - 450 \\ \hline 0.52 \\ 865 \overline{) 4500} \\ \underline{1750} \\ 020 \end{array}$$

Imagen 22. Uso del divisor (PF4).

Otros simplifican el proceso, identifican que se solicita la mitad del costo de la tarea anterior (\$900) y lo dividen entre dos (Véase imagen 23).

$$\begin{array}{r} .520 \\ 2 \overline{) 1.040} \\ \underline{04} \\ 00 \end{array}$$

Caso A (PF1)

$$R = 0.51 \text{ de barril}$$

$$\begin{array}{r} 0.51 \\ 365 \overline{) 450} \end{array}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10}$$

Caso B (PF2)

Imagen 23. División de cocientes (PF1 y PF2).

En la última variante de esta tarea (barriles por 45 pesos) se esperaba que los profesores en formación simplificaran la técnica, dado que las magnitudes de esta tarea estaban relacionadas con las anteriores, es decir se esperaba que al reflexionar sobre los resultados anteriores pudieran establecer que 450 es un medio de 900 y 45 un décimo de 450. Sin embargo, nuevamente el valor unitario es la técnica más recurrente. Cinco profesores en formación representaron la regla de tres sin utilizar directamente la división (Véase imagen 24).

Handwritten mathematical work showing three calculations:

- Multiplication:  $865 \times 8 = 6920$
- Unit value calculation:  $1 \rightarrow 865$  and  $c? \rightarrow 45$
- Division:  $865 \overline{) 4500}$  with steps showing  $4325$ ,  $1750$ ,  $1730$ , and a remainder of  $200$ . The final result is  $0.0520$ .

Imagen 24. Valor unitario como divisor (PF5).

Tres profesores en formación sólo recorren el punto decimal del resultado anterior, uno argumenta que «sería una décima parte» y anota 0.052, el otro comete un error de cálculo y escribe 0.050202.

De acuerdo con los resultados obtenidos en este primer tipo de tareas, la habilidad que muestran los profesores en formación para resolver tareas con valor faltante parecería no tener relación directa con las situaciones de razonamiento proporcional, es decir, el procedimiento para resolver tareas de valor faltante no presupone de manera inicial el razonamiento proporcional. En los resultados se observa que los estudiantes resuelven tareas de este tipo a través de una técnica ya dominada, de hecho se podría decir que las tecnologías implícitas para justificar la técnica no se asocian a la proporcionalidad sino a uno de los usos funcionales de las dos operaciones aritméticas (multiplicación y división), esto se hace manifiesto sobre todo en las tareas con magnitudes enteras.

No obstante lo anterior, ante ciertas circunstancias las tareas enfocadas a encontrar el valor faltante mediante valor unitario, sí implican la interpretación de la relación entre dos magnitudes –costo y número de barriles– y el manejo implícito de razones y proporciones se hace evidente cuando los estudiantes representan la variación mediante la regla de tres, aunque el proceso no sea desarrollado porque la tarea permite el manejo del valor unitario.

Cuando la regla de tres no resulta una técnica económica para resolver la tarea y dar sentido a la relación entre las magnitudes enunciadas<sup>6</sup>, el valor unitario es la técnica adecuada y aunque desde el discurso tecnológico el factor constante de proporcionalidad también es útil, no lo es para ellos, porque no reconocen el cociente constante, al menos no en la resolución ni en el discurso tecnológico que manifiestan cuando señalan que las técnicas de solución más eficientes son la multiplicación y la división.

6. Relación que alude a una proporcionalidad directa en el caso de la tarea del valor faltante.

Si bien dentro de los resultados se identificaron ciertos errores de cálculo, el total de profesores en formación comprende la tarea y despliegan técnicas eficientes para su resolución, por lo tanto, se podría decir que las tareas con valor faltante en la proporcionalidad directa constituyen un recurso eficiente para brindar el primer acercamiento hacia la comprensión de esta noción matemática, al identificar la relación que se establece entre dos magnitudes y su variación es proporcional.

Por lo anterior, es posible subrayar la importancia del manejo y reconocimiento de esta técnica como parte predominante del discurso tecnológico matemático y aunque en los programas de las Escuelas Normales se incluye el estudio del valor faltante, se le ubica en dos razones equivalentes, lo que difícilmente permite identificar el papel que juega el valor unitario en tanto factor constante de proporcionalidad.

#### 4.2. TAREA DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA VARIACIÓN PROPORCIONAL

Ante la necesidad de ponderar la «razón de ser» de las praxeologías matemáticas de las primeras tareas, resultaba pertinente el planteamiento de otras en las que se hiciera presente la necesidad del discurso tecnológico, es decir, de justificar la elección de cierta técnica para un tipo de tareas, de interpretar su funcionamiento y el resultado de su aplicación. Para ello pareció necesario plantear tareas en nuevos contextos matemáticos, aunque cabe aclarar que también referidas a la utilización de técnicas como valor unitario y constante de proporcionalidad. Este nuevo bloque de tareas se genera de la cuestión Q1.2, que también se deriva de la cuestión generatriz originalmente planteada (Q0):

Q1.2. ¿Qué técnicas ( $\tau$ ) despliegan los profesores en formación para resolver tareas (T1.2) relativas a la interpretación gráfica de una variación proporcional?

El trabajo con gráficas de una relación proporcional permite presentar conjuntos de datos de modo tal que sea factible observar sus relaciones, establecer comparaciones y predecir tendencias. Con la cuestión anterior se intenta destacar la eficacia funcional de las técnicas que se han venido trabajando desde la tarea T1.1 y vincular la actividad matemática con situaciones en las que este concepto matemático tiene lugar.

La intención de la tarea T1.2 es que los profesores en formación desarrollen

recursos que se constituyan como nuevos saberes asociados a ciertas praxeologías que ya han sido resueltas con determinadas técnicas. Aunque cabe la posibilidad de que se utilicen distintas técnicas para alcanzar la solución, el propósito de la cuestión Q1.2 y específicamente de la tarea T1.2 es desarrollar dos tareas del tipo «operar con una variación proporcional de modo gráfico», lo que se busca es que mediante este tipo de tareas el profesor en formación identifique otro tipo de situaciones en las que el valor unitario o la constante de proporcionalidad constituyan una técnica eficiente, pero otro objetivo es que identifiquen que en ese tipo de situaciones la regla de tres puede resultar una técnica posible.

La representación gráfica de la situación que se trabajó a lo largo del REI-FP se ilustra en la siguiente imagen:

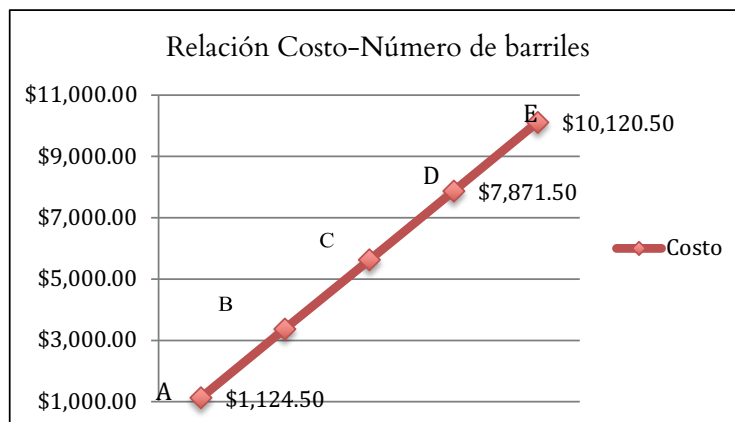


Imagen 25. Gráfica de variación proporcional costo /número de barriles.

Como se puede observar, la gráfica corresponde a una relación de proporcionalidad directa, una de sus características es que, al prolongar la línea recta, ésta pasará por el punto de origen en un sistema de coordenadas cartesianas. Además, una vez identificados los valores del eje X, se podrá observar que el cociente entre las dos magnitudes ( $y/x$ ) es constante, el valor de la constante de proporcionalidad ( $k=y/x$ ) es \$865, lo que permite relacionarla con el valor unitario y el costo de un barril.

Las magnitudes variables que se presentan en la gráfica son *Número de barriles* ( $x$ ) y *Costo* ( $y$ ), dada la pendiente de la recta se puede identificar que se trata

de magnitudes que presentan una variación directamente proporcional, lo que significa que por cada 1124.50 pesos se podrán comprar 1.3 barriles a un precio constante de \$865.

Las tareas que se derivaron de la gráfica anterior se enfocaron a dos propósitos:

- Encontrar el valor  $y$  (costo en pesos) de los puntos desconocidos (B y C)
- Identificar el valor  $x$  (número de barriles) para los puntos A, B, C, D y E

Las técnicas más usuales pueden ser valor unitario o factor constante de proporcionalidad ( $\tau_1$ ) y regla de tres ( $\tau_2$ ), sin embargo, el método de diferencias ( $\tau_3$ ) también constituye una técnica plausible que podía resultar pertinente para el funcionamiento de la regla de tres. La  $\tau_3$  resulta factible sobre todo en la primera tarea dado que permite identificar la diferencia entre los puntos D y E al sumar al valor del punto A, luego al de B y finalmente al de C. Esta técnica se diversifica al cuestionar a los profesores en formación sobre los valores del eje X para cada uno de los puntos dados, donde se espera que los estudiantes hagan uso de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ .

#### *4.2.1 Praxeologías para los valores «y» de los puntos*

La intención en la primera tarea de este tipo era que identificaran otros registros de representación de la proporcionalidad, en este caso de una variación proporcional. Era importante que el profesor en formación identificara que la distancia entre los puntos es uniforme y que forman una línea recta que pasa por el origen del plano, esto les permitiría comprender que el costo de cero barriles es de cero pesos.

En esta tarea la técnica más utilizada fue el método de diferencias cuya aparición se determinó desde el diseño del REI. Para resolverla, seis profesores en formación se apoyaron en los valores conocidos para identificar su diferencia y una vez reconocida sumarla o restarla a ciertos valores para encontrar el valor de los puntos faltantes (Véase imagen 26).

$$\begin{array}{r}
 + 5190 \\
 \underline{865} \\
 6055 \quad 7 \\
 \underline{865} \\
 6920 \quad 8 \\
 \underline{865} \\
 7785 \quad 9 \\
 \underline{865} \\
 8650 \quad 10 \\
 \underline{865} \\
 9515 \quad 11 \\
 \underline{865} \\
 10380 \quad 12
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 + 865 \\
 \underline{865} \\
 1730 \quad 1 \\
 \underline{865} \\
 2595 \quad 2 \\
 \underline{865} \\
 3460 \quad 3 \\
 \underline{865} \\
 4325 \quad 4 \\
 \underline{865} \\
 5190 \quad 5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10120.50 \\
 - 7871.50 \\
 \hline
 2149.00
 \end{array}$$

Imagen 26. Método de diferencias (PF3).

Como se puede ver, una primera acción para desplegar el método de diferencias consistió en establecer ciertas aproximaciones entre la suma de un barril a otro hasta llegar a una cantidad cercana a las mostradas en la gráfica, esta suma iterada culminó cuando se encontró el número aproximado de barriles que corresponde al punto E (12). Esta técnica usada por PF3 resultó útil para dar respuesta a ambas cuestiones, por un lado permitió aproximaciones a la variable «costos» de los puntos desconocidos y por otro logró acercarse al valor de los puntos del eje X, esto es al número de barriles que corresponde a cada punto. Aunque la imagen muestra que PF3 inició con dicha técnica (que podríamos llamar Método de Diferencias 1) se observa que al no obtener respuestas precisas utiliza otra que le permite llegar al resultado (que llamamos Método de Diferencias 2) en la cual, al valor del costo en el punto E le resta el valor del costo en el punto D, esta diferencia es sumada progresivamente en los puntos A, B y C. Cinco de seis profesores en formación optaron por utilizar esta última variante del método de diferencias, fue la técnica más recurrente y efectiva para esta tarea.

Otros dos profesores en formación optaron por una técnica diferente (Véase imagen 27), primero encontraron el valor de los puntos en el eje X para tomarlo como referente.

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow 865 \\
 6.5 \rightarrow c? \\
 \hline
 865 \times 6.5 \\
 \begin{array}{r}
 9325 \\
 5190 \\
 \hline
 5622.5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow 865 \\
 3.9 \rightarrow c? \\
 \hline
 865 \times 3.9 \\
 \begin{array}{r}
 7785 \\
 2595 \\
 \hline
 3373.5
 \end{array}
 \end{array}$$

Imagen 27. Constante de proporcionalidad (PF5).

Como se puede apreciar, PF5 requiere conocer previamente los valores de los puntos B y C en el eje X (6.5 y 3.9) para luego representar la regla de tres en la que los valores desconocidos se relacionan con el costo de 6.5 y 3.9 barriles. Al calcular el valor unitario de cada barril, le basta multiplicar el número de barriles de los puntos B y C por el valor unitario. Las fases de esta técnica indican que, implícitamente, los profesores en formación se basan en la condición de que  $y=kx$  (costo total = valor de un barril por el número de barriles).

#### 4.2.2 Praxeologías para los valores «x» de los puntos

Para resolver la segunda tarea (identificar los valores X para cada punto) resultaba útil identificar que la línea en la gráfica es recta con un ángulo de  $45^\circ$ , es decir, que representa un incremento continuamente constante. Cuando las magnitudes cambian a un ritmo constante se percibe la existencia de una relación proporcional y la constante de proporcionalidad ( $k=y/x$ ) eso constituiría el discurso tecnológico o la justificación de esta técnica, es decir, si  $k=850$ ,  $y$ =costo total de barriles y  $x$ =número de barriles, al despejar  $x$ , se tiene que  $x=y/k$ .

Esta justificación se hizo presente de modo implícito en la técnica utilizada por cinco profesores en formación. Como se puede ver en la siguiente imagen, se apoyaron en la representación de la regla de tres para visualizar la técnica que finalmente los llevó al resultado.

Handwritten mathematical work for Image 28 showing three different methods to solve for  $x$  using the rule of three. Each method starts with a proportion:  $1 \rightarrow 865$  is as  $x \rightarrow$  a given value.

Method 1:  $1 \rightarrow 865$  is as  $x \rightarrow 1124.5$ . The calculation shows  $865 \overline{) 1124.5}$  resulting in  $1.3$ .

Method 2:  $1 \rightarrow 865$  is as  $x \rightarrow 7871.5$ . The calculation shows  $865 \overline{) 10120.5}$  resulting in  $11.7$ .

Method 3:  $1 \rightarrow 865$  is as  $x \rightarrow 7871.5$ . The calculation shows  $865 \times 9 = 7785$ , then  $7871.5 - 7785 = 86.5$ , and finally  $86.5 \div 865 = 0.1$ .

Imagen 28. El eje X con la regla de tres (PF5).

Se observa que PF5 usa parcialmente la regla de tres, maneja los datos conocidos para encontrar el valor  $x$  del punto A, toma \$1124.50 y lo asocia con el costo de un barril (\$865), luego omite la multiplicación indicada en la regla de tres. Cabe señalar que estos profesores en formación habían calculado el valor de los puntos (B y C) a través del método de diferencias y aunque no lo explicitan, la lógica de su técnica permite deducir que el valor del eje X en dichos puntos se logró de la misma forma que en esta tarea.

Otros dos profesores en formación (Véase imagen 29) utilizaron directamente la división derivada de la regla de tres o del despeje de  $x$  en la constante de proporcionalidad.

Handwritten mathematical work for Image 29 showing three different methods to solve for  $x$ .

Method 1:  $1 - 865$  is as  $3375.50$  is as  $x$ . The calculation shows  $865 \overline{) 3375.50}$  resulting in  $3.91$ .

Method 2:  $1 - 865$  is as  $1124.50$  is as  $x$ . The calculation shows  $865 \overline{) 1124.50}$  resulting in  $1.3$ .

Method 3:  $3.91 - 1.3 = 2.61$ . The calculation shows  $2.61 \times 865 = 2268.15$ , and finally  $2268.15 + 1124.50 = 3392.65$ .

Imagen 29. Eje X y constante de proporcionalidad (PF8).



Como se puede observar, una vez que PF8 identifica los valores  $x$  de los puntos A y B mediante los costos por número de barriles, retoma el método de diferencias para encontrar el valor 2.61 que suma a cada punto precedente en el eje X. Cabe señalar que comete un error para el valor del punto B al colocar 3375.50 cuando debería de ser 3373.50, lo que repercute al calcular el valor 3.91 que genera un margen de error de una centésima a cada uno de los puntos restantes.

En este mismo caso PF1 no utiliza el valor unitario y realiza aproximaciones a partir de las diferencias entre los costos encontrados en la tarea anterior. Primero estima el valor unitario a partir de diferencias de \$1000 pero considera que el aumento entre un punto y otro es alrededor de \$2000 hecho que lo llevó a encontrar los valores correctos para los puntos del eje X.

$$\begin{array}{r}
 1.3 \\
 + 1.3 \\
 \hline
 2.6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2.6 \\
 + 1.3 \\
 \hline
 3.9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3.9 \\
 + 1.3 \\
 \hline
 5.2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5.2 \\
 + 1.3 \\
 \hline
 6.5
 \end{array}
 \rightarrow \text{Este aplica si fuera aumentando de } \$1000 \text{ en } \$1000$$

$$\begin{array}{r}
 1.3 \\
 + 2.6 \\
 \hline
 3.9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3.9 \\
 + 2.6 \\
 \hline
 6.5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 6.5 \\
 + 2.6 \\
 \hline
 9.1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 9.1 \\
 + 2.6 \\
 \hline
 11.7
 \end{array}
 \rightarrow \text{Este es el correcto porque va aumentando } \$2000$$

Imagen 30. Diferencias entre puntos del eje X (PF1).

En la imagen se observa que esta técnica le permitió simplificar el proceso de solución al omitir la división para cada uno de los puntos dado que, una vez identificada la diferencia aproximada entre cada par de puntos, sólo sumaba tal diferencia al punto precedente para encontrar los valores faltantes en el eje X.

Al resolver esta tarea, los profesores en formación pudieron identificar otro tipo de situaciones en las que es posible utilizar el valor unitario como divisor a través de la constante de proporcionalidad y aunque la justificación tecnológica no se asoció con el referente teórico relativo a la función lineal, el proceso vivido constituyó un contexto aritmético que les permitirá comprender de mejor manera la noción de función lineal. Lo interesante es que identificaron tareas donde la proporcionalidad y la variación proporcional se hacen presentes y comprendieron qué técnicas conocidas podrían ser eficaces.

#### 4.3. TAREA CON TABLAS DE VARIACIÓN PROPORCIONAL

El trabajo con tablas de variación proporcional permite identificar la relación y el comportamiento entre magnitudes que se manifiesta a partir del factor constante de proporcionalidad ( $k$ ). Este tipo de situaciones en las que se trata de encontrar el valor faltante es una de las principales tareas en los diferentes niveles educativos y es en éstas donde la reducción de la unidad a partir del uso de la regla de tres es la técnica más recurrente, aunque en algunos casos también pueda utilizarse la igualdad de razones, la búsqueda del cuarto valor faltante o incluso una estructura aditiva o multiplicativa según el tipo de magnitudes (al doble le corresponde el doble). En el caso que nos ocupa, la cuestión que orienta la tarea T1.3 es la siguiente:

Q1.3. ¿Qué técnicas ( $\tau$ ) despliegan los profesores en formación frente a las tareas (T1.3) relativas al valor faltante en una tabla de variación proporcional?

Para plantear esta tarea se entregaron a los profesores en formación dos tablas con valores faltantes, una con magnitudes menores a un barril de petróleo en la que se expresaba un aumento al costo del petróleo Maya (Tabla.14) y otra con magnitudes mayores a un barril en la que se mostraba el descenso en el precio del petróleo Olmeca (Tabla. 15). Ambas mostraban valores de las magnitudes asociadas con el número de barriles y su costo y la pregunta se relacionaba con el costo de un barril, es decir con el factor constante de proporcionalidad ( $\tau_1$ ). Además de lo anterior, el propósito de esta tarea era destacar la utilidad de la regla de tres cuando los términos conocidos eran diferentes a uno, situación que llevó a plantear el uso de esta técnica en todo su proceso. Las tablas asignadas fueron las siguientes:

|                 |       |      |       |      |
|-----------------|-------|------|-------|------|
| No. de barriles | 0.07  | 0.28 | 0.42  | 0.56 |
| Costo           | 128.1 |      | 384.3 |      |

Tabla 14. ¿Cuál es el costo de un barril Maya?

|                 |        |         |         |         |
|-----------------|--------|---------|---------|---------|
| No. de barriles |        | 2.77    |         | 7.12    |
| Costo           | 855.36 | 1794.96 | 2734.56 | 6492.96 |

Tabla 15. ¿Cuál es el costo de un barril Olmeca?

La correspondencia que se estableció entre las magnitudes (tipo de petróleo y costo) era una relación de proporcionalidad directa, es decir, si se compra el doble, el triple, etc., de petróleo, su costo también aumentará el doble, el triple, etc. En ambas variaciones la razón entre las magnitudes es una relación constante, para el caso del petróleo Maya se tiene que 384.3 dividido entre 0.42 se obtiene 915 y para el petróleo Olmeca al dividir 1794.96 entre 2.77 se llega a 648, lo que corresponde al costo de cada tipo de petróleo respectivamente.

Así, la razón entre las magnitudes permitiría encontrar la constante de proporcionalidad, que corresponde al valor unitario ( $y/x=k$ ), donde  $y$  es el costo de los barriles y  $x$  el número de barriles, el precio unitario se establece con una igualdad entre razones como  $384.3/0.42 = x/1$  para el caso de la primera tabla, mientras que para la segunda tabla sería  $1794.96/2.77 = x/1$ .

#### 4.3.1 Costos menores al valor unitario

En esta tarea se trata de encontrar el valor unitario y los valores faltantes del petróleo Maya, la técnica que utilizaron cuatro de los ocho profesores en formación fue la regla de tres, la desarrollaron con base en los datos conocidos de ambas magnitudes (precio y costo), en la siguiente imagen puede verse la manera en la que algunos la utilizaron.

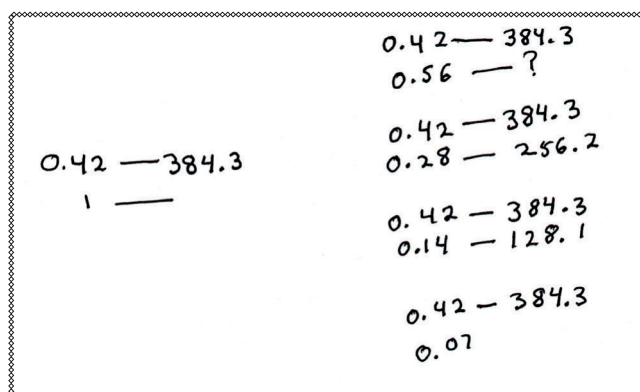


Imagen 31. Uso de la regla de tres (PF8).

En la imagen anterior se aprecia que aunque PF8 establece la relación entre  $384.3/0.42 = 1/x$  donde el valor unitario ( $k$ ) corresponde a la constante de proporcionalidad y al nuevo costo de un barril Maya (\$915), este dato que pudiera

resultar relevante para utilizarse como multiplicador o divisor de los datos conocidos, no es empleado, en su lugar se comienza a desarrollar la regla de tres en una representación tabular que le permite identificar la relación entre los tres datos que componen las proporciones, para ello retoma en primer término el número más alto de barriles mostrado en la tabla (0.56) y a partir de ahí calcula los cuartos términos desconocidos en la tabla. La secuencia tabular permite identificar que se trata de cantidades que disminuyen progresivamente a la mitad, lo que le simplifica el proceso operatorio de la técnica para encontrar los valores faltantes en la tabla.

A diferencia de la técnica anterior, tres profesores en formación retomaron el valor unitario en tanto constante de proporcionalidad ( $k=y/x$ ), una vez que lo identificaron a través de la regla de tres utilizaron el factor constante de proporcionalidad ( $k=915$ ) para encontrar los valores faltantes, multiplican dicho factor por el número de barriles al que hay que asignar el costo ( $y=kx$ ), esto se expresa en la imagen 32:

Handwritten calculations showing the determination of the unit cost of barrels using a constant of proportionality ( $k$ ).

$$\begin{array}{rcl}
 384.3 & - & 42\% \\
 \times & - & 100\% \\
 \hline
 1 \text{ barril} & = & 915 \\
 915 \times 0.07 & & \\
 \text{"} \times 0.28 & & \\
 \text{"} \times 0.42 & & \\
 \text{"} \times 0.56 & & \\
 915 - 100 & & \\
 128.1 - x & & 
 \end{array}$$

Imagen 32. Factor constante de proporcionalidad (PF3).

Los otros tres profesores en formación emplearon la regla de tres para identificar el valor unitario o el factor constante de proporcionalidad, luego este factor fue usado como multiplicador para identificar el costo faltante de los barriles en la tabla y como divisor para encontrar el número de barriles desconocido. La regla de tres inicial, calculada como porcentaje al 100% permitió operar con valores enteros que los llevaron al valor unitario.

Una última técnica empleada por un estudiante, podría decirse que es una «regla de tres reducida» combinada con un modelo aditivo para completar la tabla (Véase imagen 33):

Handwritten mathematical work showing the 'reduced rule of three' (regla de tres reducida) for finding unknown values. The work includes several calculations:

- $1 \rightarrow 915$
- $0.07 \rightarrow ?$
- $915 \times 0.07 = 64.05$
- $915 / 128.1 = 7.14$
- $128.1 \times 2 = 256.2$
- $256.2 + 128.1 = 384.3$
- $256.2 \times 2 = 512.4$

Imagen 33. Regla de tres «reducida» (PF5).

Como se observa en la imagen, PF5 parte de la regla de tres para encontrar  $k$ , posteriormente lo utiliza como multiplicador para encontrar el primer costo faltante en la tabla (relativo a 0.07 barriles), en el tercer paso utiliza la misma técnica, pero ahora  $k$  es empleada como divisor para identificar el valor faltante de la segunda columna (costo de 128.1). Al observar que la siguiente columna tiene el doble de barriles de la columna que le antecede, opta por multiplicar por dos y luego suma 128.1 para corroborar los datos de la cuarta columna, por último vuelve a multiplicar por dos el costo de la tercera columna y completa todos los datos de la tabla. Lo interesante de esta técnica es que, para completar los datos sobre el costo de los barriles, PF5 usa un modelo aditivo y multiplicativo con los datos que incorpora a la tabla, mismos que se van presentando de manera progresiva a partir de la secuencia de cada columna.

A partir de las técnicas empleadas en esta tarea, se aprecia la tendencia de los profesores en formación hacia el uso de la regla de tres como técnica eficaz para este tipo de situaciones en las que no se cuenta explícitamente con el valor unitario.

#### 4.3.2. Costos mayores al valor unitario

En esta tarea las técnicas se diversificaron, por ejemplo hay seis casos en torno de la regla de tres que utilizaron la misma técnica que en la tarea anterior pero la asociaron con los porcentajes, cinco representaron la regla de tres para trabajar con el valor unitario considerado como 100% o 1, ambos asociados al costo

de un barril Olmeca. Un ejemplo de estas técnicas puede verse en la siguiente imagen.

$$\begin{array}{r}
 1794.96 - 277\% \\
 \times \quad - 100\% \\
 \\
 648 - 100\% \\
 855.36 - x \\
 \downarrow \\
 \text{se realiza lo} \\
 \text{mismo con cada precio}
 \end{array}$$

Imagen 34. Regla de tres para el valor unitario (PF3).

Como se puede ver, PF3 no desarrolla explícitamente la técnica, la emplea para identificar los valores faltantes, aunque se trate de la misma técnica utiliza dos formas de acomodo para la incógnita en función de los dos tipos de magnitudes con las que trabaja. Usa el primer acomodo para identificar el valor unitario del barril Olmeca, situación que representa a partir del 100% como costo de un barril y usa el segundo acomodo del valor unitario para encontrar el número de barriles que se desconocen en la primera fila de la tabla, si bien no es posible saber cómo obtuvo el valor de 7.12 barriles solicitados en la T1.3 (tabla 15), se deduce que empleó la regla de tres para obtenerlo. Otro caso en el que se utiliza la regla de tres es el que se puede ver en la siguiente imagen.

$$\begin{array}{r}
 2.77 - 1794.96 \\
 1 - \\
 \\
 2.77 - 1794.96 \\
 4.22 - 2734.56 \\
 \\
 2.77 - 1794.96 \\
 7.12 - 4613.76 \\
 \\
 2.77 - 1794.96 \\
 10.2 - 6492.96 \\
 \\
 2.77 - 1794.96 \\
 - 855.36
 \end{array}$$

Imagen 35. Regla de tres en tablas de variación (PF8).

En el proceso de PF8 se observa la pertinencia de la regla de tres en situaciones donde el cuarto término desconocido no es el valor unitario porque se usan los valores conocidos (número de barriles y costo) para identificar el número de barriles faltante en la primera fila a través de los costos de la segunda fila de la tabla. Esta técnica constituye el ejemplo más claro sobre la pertinencia de la regla de tres en situaciones relativas a la variación proporcional donde los valores desconocidos son distintos a uno.

En otra técnica (Véase imagen 36) PF7 al parecer intentó utilizar el factor constante de proporcionalidad ( $k=y/x$ ) para identificar el número de barriles faltantes en la tabla.

The image shows handwritten calculations within a rectangular border. On the left, a multiplication is shown:  $648 \times 7.12$  with a horizontal line underneath, and the result  $4613.76$  written below. To the right of this, there are three division problems. The first is  $2.77 \sqrt{1794.96} = 648$ , where  $648$  is circled. Below this are two more divisions:  $855.36 / 848 = 1.32$  and  $855.36 / 2734.56 = 4.22$ . The final line shows  $855.36 / 6492.96 = 10.02$ .

Imagen 36. Constante de proporcionalidad inadecuada (PF7).

En lo anterior, se identifica la  $k$  ( $648$ ) al reconocer que  $y$  representa el costo de barriles y  $x$  el número de barriles para encontrar el número de barriles faltantes, la expresión sería  $x=y/k$ , no obstante el desarrollo resulta erróneo porque no se toman los valores de modo correcto dado que se consideró la constante como  $855.36$ , lo cual alude al valor de la primera fila y que representa el costo de  $1.32$  barriles. Esta situación muestra la falta de dominio de la técnica factor constante de proporcionalidad.

La última técnica que se utilizó en esta tarea, como se puede ver en la imagen 37, se caracterizó por usar la regla de tres, el método de diferencias y un modelo aditivo.

| Número de barriles | 1.32   | 2.77    | 4.22    | 7.12    | 10.02   |
|--------------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Costo              | 855.36 | 1794.96 | 2734.56 | 4613.76 | 6492.96 |

$$\begin{array}{r}
 207.36 + 648 \\
 - 1794.96 \\
 \hline
 855.36 \\
 \hline
 939.60
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 648 \\
 2.77 \overline{) 1794.96} \\
 \underline{1794.96} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3674.16 \\
 + 4613.76 \\
 \hline
 8287.92
 \end{array}$$

Handwritten notes and arrows:   
 - An arrow points from the 'Costo' row to the calculation  $207.36 + 648$ .   
 - An arrow points from the 'Costo' row to the calculation  $1794.96 - 855.36 = 939.6$ .   
 - An arrow points from the 'Costo' row to the calculation  $2.77 \times 648 = 1794.96$ .   
 - An arrow points from the 'Costo' row to the calculation  $4613.76 + 648 = 4678.56$ .   
 - An arrow points from the 'Costo' row to the calculation  $6492.96 - 4613.76 = 1879.20$ .

Imagen 37. Métodos combinados (PF4).

Esta técnica fue empleada sólo por PF4 y denota en primer término el uso de la regla de tres para encontrar el costo de un barril Olmeca y al igual que en casos anteriores no se desarrolla todo el proceso. Para llenar la tabla se usaron diversas técnicas, principalmente la resta (1794.96 menos 855.36) que le permite encontrar la diferencia entre cada costo expresado, luego procede a sumar la diferencia con la magnitud precedente y llega al costo del petróleo, es decir 4613.76.

Para el número de barriles intenta usar  $k$ , pero en lugar de usarlo como divisor lo utiliza como multiplicador ( $6492.96 \times 648$ ), sin embargo el resultado que registra en la tabla es adecuado para el planteamiento lo mismo que el resto de los datos, posiblemente porque los tomó de algún compañero.

A partir de los datos obtenidos de la tarea T1.3 se puede deducir que en su mayoría los profesores en formación logran identificar la regla de tres como técnica eficiente para ciertas situaciones de proporcionalidad, principalmente aquellas en las que el valor unitario no se hace explícito. La constante de proporcionalidad también representó una técnica eficaz para este tipo de tareas, aunque no tan eficiente por la dificultad de uso y la complejidad en identificar si juega el papel de multiplicador o divisor. También se pudieron observar errores de cálculo en los algoritmos y la dificultad para operar con números decimales, dificultad que si bien fue superada con el recurso de la calculadora, indica que aunque exista una buena interpretación de la tarea, el dominio de la técnica resulta indispensable para su resolución.



#### 4.4. TAREA DE VARIACIÓN PROPORCIONAL DE TRES MAGNITUDES

La consigna en la tarea T1.4, pide encontrar valores faltantes en una variación de proporcionalidad de tres magnitudes, se incluyó con el propósito de diversificar y ampliar las técnicas reconstruidas en las tareas anteriores. Se esperaba que utilizaran la regla de tres ( $\tau_1$ ), la razón fraccionaria ( $\tau_2$ ) y la técnica tabular ( $\tau_3$ ) que, a nuestro juicio tendrían su justificación en la Teoría de las Razones y Proporciones ( $\theta$ ). La T1.4 deriva de la siguiente cuestión:

Q1.4. ¿Qué técnicas ( $\tau$ ) despliegan los profesores en formación para resolver tareas (T) relativas a una variación proporcional de tres magnitudes?

El objetivo de plantear esta tarea era «romper» con la técnica de valor unitario y generar un modelo tabular o algebraico como técnicas más eficientes para situaciones de combinación de magnitudes como la siguiente:

En todos los cargamentos hay barriles con dos tipos de petróleo (Olmeca y Maya). En cada cargamento, por cada barril de petróleo Olmeca hay 3 barriles de petróleo Maya, entonces ¿Cuántos barriles de petróleo Maya hay en un cargamento de 200 barriles?

En esta tarea se establece que por cada barril de petróleo Olmeca hay 3 veces más de petróleo Maya, es decir, la relación entre barriles de petróleo Maya y Olmeca es 3 a 1, esta razón se escribe  $3/1$ , se puede leer como «tres es a uno» y su valor se obtiene al dividir 3 entre 1, con este se deduce que en ese cargamento va el triple de petróleo Maya que de petróleo Olmeca.

Ahora bien, lo que pudo observarse es que los profesores en formación utilizan una técnica basada en el valor unitario. Cuatro de ellos consideran la relación «3 a 1» o «1 a 3» y asumen que, si es un cargamento con 200 barriles y una combinación entre Maya y Olmeca de 4 barriles, identifican que se trata de una relación de  $\frac{1}{4}$  para los barriles de petróleo Olmeca y  $\frac{3}{4}$  de Maya. Esta idea, como se puede ver en la siguiente imagen, les permite utilizar la división y/o multiplicación como parte de su técnica:

$\text{Total} = 200$   
 $1 = 3$   

$$\begin{array}{r} 50 \\ 4 \overline{) 200} \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$
  
 $50 \text{ olmecas}$   

$$\begin{array}{r} 50 \times 3 \\ \hline 150 \end{array}$$
  
 $R = 150 \text{ barriles de petroleo Maya}$

Imagen 38. Uso de la Multiplicación (PF6).

Esta técnica fue la más utilizada, en ella puede apreciarse que establecen la relación «1 a 3» (aunque en este caso PF6 lo representa como una igualdad  $1=3$ ) y dividen 200 entre 4 para determinar cuántos barriles hay en  $\frac{1}{4}$  de cargamento, luego multiplican 50 barriles ( $\frac{1}{4}$ ) por 3 para obtener el número de barriles de petróleo Maya. Puede decirse que identificar la razón «1 a 3» o «3 a 1» o la relación «50 a 150» obtenida mediante una técnica aritmética que les permitió encontrar el resultado. Una técnica similar que sólo utilizó PF3 es la que se muestra en la siguiente imagen.

$1 - 3$   
 $\frac{1}{4} \quad \frac{3}{4}$   
 $200 \times 0.75 = 150$   
 $150 \text{ barriles}$

Imagen 39. La conversión a decimal (PF3).

En ésta, se hace evidente la comparación de razones como parte de la técnica, primero establece la razón 1 a 3. Puede advertirse que considera el número total de barriles en la combinación por ese motivo señala  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{3}{4}$  como partes de dicha combinación. Posteriormente transforma  $\frac{3}{4}$  en su expresión decimal (0.75) y multiplica por 200 para encontrar tres cuartos del cargamento, que corresponden al petróleo Maya. Como se puede observar, la dificultad para multiplicar por una fracción se sigue haciendo presente en esta tarea.

Por su parte, la técnica del modelo tabular, cuya génesis constituía el propósito de esta tarea, fue utilizado por dos profesores en formación quienes la desarrollaron para ilustrar la relación entre los dos tipos de petróleo, en la siguiente imagen se observa la manera como fue utilizado.

|    |   |    |                    |    |    |    |
|----|---|----|--------------------|----|----|----|
| 1  | 0 | 3M | $R = 150$ barriles |    |    |    |
| 2  |   | 6  |                    |    |    |    |
| 3  |   | 9  |                    |    |    |    |
| 4  |   | 12 |                    |    |    |    |
| 5  |   | 15 |                    |    |    |    |
| 6  |   | 18 | 30                 | 30 | 30 | 30 |
| 7  |   | 21 |                    |    |    |    |
| 8  |   | 24 |                    |    |    |    |
| 9  |   | 27 | 40                 | 40 | 40 | 40 |
| 10 |   | 30 |                    |    |    |    |

Imagen 40. Modelo tabular (PF4).

Como se puede ver, el modelo tabular les permitió visualizar la relación creciente entre ambos tipos de magnitud al conservar la misma razón, es decir PF4 establece la razón 1 a 3, por 1 barril de petróleo Olmeca hay 3 barriles de petróleo Maya, por cada 2 hay 6, por cada 3 hay 9 y así sucesivamente. En este caso se observa que PF4 desarrolla una secuencia (1-3, 2-6, 3-9, 4-12 hasta llegar a 10-30 y suma 10 más 30 para encontrar el total de barriles de dicha combinación (40). Como la situación habla de 200 barriles coloca (horizontalmente) otras 4 combinaciones de 40, lo que le da el total de dichos barriles. De manera similar lo hace con los 30 barriles del petróleo Maya, con lo que deduce que, si 5 veces 40 es igual a 200, entonces 5 veces 30 será 150 o sea el número de barriles Maya que es proporcional al cargamento en 1 a 3. Cabe señalar que de los dos profesores en formación que utilizaron esta técnica, uno planteó el modelo tabular, pero al llegar a 10-30 coloca directamente 50-150, al parecer calcula mentalmente con la lógica encontrada en el modelo tabular.

Finalmente, en lo que respecta a esta tarea, en otra técnica (Véase imagen 41) que utilizó sólo PF7 se manejaron literales, al parecer representa en cierta medida la génesis (no exitosa en este caso) del modelo algebraico como técnica para solucionar este tipo de tareas.

$$(1a + 3b)x = 200$$

$$\frac{1}{4} \text{ Olmeca} + \frac{3}{4} \text{ maya} = 200$$

50 olmeca y 150 Maya

Imagen 41. Modelo algebraico fallido (PF7).

Como se puede apreciar, de inicio intenta estructurar el modelo algebraico  $(1a+3b)x=200$  en el que aparecen dos coeficientes (1 y 3), dos literales (a y b) y una tercera variable (x). En este modelo la suma entre paréntesis indica el total de barriles en la composición, el 200 la cantidad de barriles en el cargamento y la x expresa el manejo de un factor común variable, aunque no queda clara la naturaleza de dicho factor porque «a» es el petróleo Olmeca, «b» es el Maya y en este caso pareciera que «x» intenta representar al precio. Al desarrollar el modelo quedaría  $ax+3bx=200$ , ecuación que no permite obtener el resultado de la tarea. Por ello PF7 abandona esta técnica y opta por simplificar la expresión en términos de  $\frac{1}{4}$  de Olmeca más  $\frac{3}{4}$  de Maya es igual a 200 barriles, luego,  $\frac{1}{4}$  de 200 es 50, etc., lo que constituye finalmente la técnica que le permite encontrar el resultado correcto.

Los resultados muestran que para resolver una tarea relativa a la variación proporcional con tres magnitudes, en su mayoría los profesores en formación utilizan técnicas que evidencian un logro aritmético a pesar de que la institución (reflejada en los planteamientos curriculares) señala explícitamente la evolución de sus técnicas hasta utilizar aquellas que tienen un carácter más generalizable, situación que no sucede en esta tarea puesto que sólo el 75% de los estudiantes la resuelven correctamente utilizando técnicas basadas en modelos aritméticos, el 12.5% intentó emplear un modelo algebraico pero no logró modelizar la tarea planteada y otro porcentaje igual reconoció la tarea como una situación donde se hace presente la razón al establecer la representación 1 a 3.

#### 4.5. TAREA DE VARIACIÓN PROPORCIONAL COMPUESTA

Una tarea asociada a la proporcionalidad compuesta se hace presente cuando las razones involucradas o las magnitudes que varían son más de dos, si bien estas

situaciones permiten analizar la relación de variables a través de la proporcionalidad directa o inversa, en este caso la tarea T1.5 se enfoca al trabajo con la primera en virtud de que los profesores en formación abordan en su mayoría situaciones de este tipo en la escuela primaria, además el análisis del programa de estudios realizado anteriormente enfoca su atención en el dominio de la proporcionalidad directa.

En el caso de este REI-FP, las cantidades que se manipularon a partir de la T1.5 fueron el número de barriles, el costo por barril y la mezcla de petróleo (número o costo), esta última magnitud constituyó el resultado de la variación entre las primeras dos magnitudes. Ahora, al intervenir más de dos magnitudes en una tarea surgen relaciones proporcionales que pueden expresarse mediante un sistema de ecuaciones, por ejemplo si las magnitudes enunciadas se representan como A, B y C, entonces A y B aluden a los coeficientes (precio de cada tipo de petróleo) de dos incógnitas (parte proporcional de cada tipo de petróleo) y C (el costo de un barril derivado de una mezcla) al término independiente. En este sentido la tarea T1.5 pretende que surja una serie de técnicas que permitan encontrar el valor faltante en cualquiera de las incógnitas o incluso en el término independiente, así pues la cuestión generatriz que rige a esta T es la siguiente:

Q1.5. ¿Qué técnicas ( $\tau$ ) y discurso tecnológico ( $\theta$ ,  $\Theta$ ) despliegan los profesores en formación para resolver tareas (T) relativas al valor faltante de una variación proporcional de tres magnitudes?

La relación entre tres magnitudes puede modelizarse mediante una ecuación, técnica que puede resultar eficiente para la resolución de las tareas de este tipo y su aplicación se verá determinada por los alcances y limitaciones del nivel tecnológico-teórico que los profesores en formación puedan tener una vez que han trabajado con las técnicas propias de la organización clásica (regla de tres y reducción a la unidad con la identificación de  $k$ ), las tareas subsecuentes buscan la transición hacia la modelización funcional de los sistemas proporcionales. En términos de la evolución de la técnica aritmética se espera que surja el modelo algebraico, con esta intención la tarea T1.5 se dividió en varias subtareas para provocar: la búsqueda de nuevas técnicas; el uso o modificación de las técnicas conocidas; el momento del trabajo de la técnica y el momento tecnológico-teórico.

#### 4.5.1. Aproximación a la variación con tres magnitudes

Con el propósito de que identificaran la proporcionalidad compuesta se estructuró una primera subtarea que consistía en encontrar el valor faltante, dada la combinación de una variable con distinta magnitud.

Si el costo de un barril de petróleo Maya es de \$865 y de un barril de petróleo Olmeca es de \$995 cuando se hace una mezcla usando un barril de petróleo de cada tipo. ¿Cuánto cuesta un barril de petróleo de esa mezcla?

Para resolverla se esperaba que aplicaran dos técnicas: valor unitario ( $\tau_1$ ) y regla de tres ( $\tau_2$ ), si bien estas técnicas habrían sido recurrentes en tareas anteriores, en este caso los estudiantes se enfrentan al manejo de dos magnitudes «combinadas» que se entrelazan con otra magnitud: el costo de la mezcla. El discurso tecnológico para justificar dichas técnicas, se esperaba fuera el de la Teoría de las Razones y Proporciones.

Las técnicas enunciadas se hicieron presentes, la más recurrente es el valor unitario, utilizada por seis estudiantes (véase imagen 42).

$$\begin{array}{r} 995 \\ +865 \\ \hline 1860 \end{array} \quad \begin{array}{r} 930 \\ 2 \overline{)1860} \\ \underline{18} \phantom{0} \\ 06 \phantom{0} \\ \underline{6} \phantom{0} \\ 00 \end{array} \quad \boxed{\$930}$$

Imagen 42. Valor unitario (PF5).

Como se puede ver, PF5 comprende que, para encontrar el valor de la mezcla, basta con sumar el costo de cada uno y dividir el resultado entre los tipos de petróleo de la mezcla, así encuentra el valor unitario para el barril compuesto.

A diferencia de la técnica anterior, dos profesores en formación optaron por calcular un «promedio parcial», es decir encontrar el costo de medio barril de cada tipo de petróleo para después completar un barril de la mezcla, un ejemplo, que se puede ver en la siguiente imagen.

$$\begin{array}{r}
 \text{Maya} \quad 2 \overline{) 865.0} \\
 \underline{06} \phantom{0} \\
 05 \phantom{0} \\
 \underline{10} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{Respuesta} \\
 432.5 \\
 + 497.5 \\
 \hline
 \$930.0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{Olmeca} \quad 2 \overline{) 995.0} \\
 \underline{18} \phantom{0} \\
 19 \phantom{0} \\
 \underline{18} \\
 015 \\
 \underline{14} \\
 010
 \end{array}$$

Imagen 43. Promedio parcial (PF2).

Como se trataba de una mezcla con dos tipos de petróleo resultó más eficiente esta técnica, dividir el costo de cada barril en dos y sumar para encontrar el precio de la mezcla. Aunque eficiente, esta técnica podría no serlo en situaciones donde se incluyeran más tipos de petróleo. Ante esta consideración se plantearon tres tareas semejantes, pero cambiando el número de barriles de cada tipo, los resultados fueron semejantes al caso anterior, no obstante, en la última tarea de este tipo aparece una nueva técnica que se aproximaba al modelo algebraico:

Si mezclo 15 barriles de petróleo Maya y 20 del Olmeca. ¿Cuánto cuesta un barril de petróleo de esa mezcla?

Al aumentar el número de barriles de cada tipo la técnica más utilizada fue el valor unitario, la utilizaron cinco profesores en formación y pudo observarse lo siguiente:

$$\begin{array}{r}
 865 \times 15 \\
 \underline{4325} \\
 865 \\
 \hline
 12975
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 995 \times 20 \\
 \underline{19900} \\
 + 12975 \\
 \hline
 32875
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 35 \overline{) 32875} \\
 \underline{137} \phantom{00} \\
 325 \phantom{00} \\
 \underline{100} \phantom{00} \\
 300 \phantom{00} \\
 \underline{20} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 939.28 \\
 \$939.28
 \end{array}$$

Imagen 44. Valor unitario (PF1).

La técnica se desarrolló del mismo modo que en las tareas precedentes, sólo modificaron el rango numérico, es decir multiplicaron por separado el costo por número de barriles de cada tipo para luego sumar los productos que luego dividieron entre 35, a partir de esto identificaron el precio de un barril con la mezcla enunciada.

Por su parte dos profesores en formación, que en la tarea anterior habían empleado el «promedio parcial», no modificaron su técnica y decidieron utilizarla nuevamente en esta tarea como se puede ver en la siguiente imagen:

$$\begin{array}{r}
 24.7 \\
 35 \overline{) 865} \\
 \underline{165} \phantom{0} \\
 250 \\
 \underline{245} \\
 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 28.4 \\
 35 \overline{) 995} \\
 \underline{295} \phantom{0} \\
 280 \\
 \underline{150} \\
 140 \\
 \underline{10}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 24.7 \\
 \times 15 \\
 \hline
 123.5 \\
 247 \phantom{0} \\
 \hline
 370.5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 28.4 \\
 \times 20 \\
 \hline
 000 \\
 568 \phantom{0} \\
 \hline
 568.0 \\
 + 370.5 \\
 \hline
 938.5
 \end{array}$$

Porque tendra 15/35 de maya y 20/35 de olmeca

cuesta el barril 938.5

Imagen 45. Promedio parcial (PF3).

Se observa que PF3 incluye como información adicional la razón entre número de barriles de cada tipo y total de barriles mezclados (15/35). Sin embargo, debe recordarse que la tarea solicitaba el precio de un barril mezclado no la parte proporcional de cada tipo de barril sobre la mezcla, la técnica empleada en este caso busca el precio de cada tipo de petróleo entre el total de barriles a mezclar, por ello el cociente que resulta en cada división se multiplica por el número de barriles de cada tipo para luego sumar los productos y encontrar el costo de un barril con la mezcla especificada.

El caso de PF7 que se muestra en la siguiente imagen indica que la técnica ha evolucionado, él en tareas anteriores había utilizado el valor unitario, pero al observar el aumento en el número de barriles de la mezcla opta por una representación «semialgebraica».

$$\begin{array}{r}
 865 \times 15 \\
 \hline
 4325 \\
 865 \phantom{0} \\
 \hline
 12975
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (865 \times 15) + (995 \times 20) = x \\
 \hline
 35 \\
 \hline
 12975 + 19900 = x \\
 \hline
 32875 \\
 \hline
 35 \\
 \hline
 939.28
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 995 \times 20 \\
 \hline
 9950 \\
 9950 \phantom{0} \\
 \hline
 19900
 \end{array}$$

Imagen 46. Modelo semialgebraico (PF7).

En este caso se aprecia que la operatoria es similar al valor unitario, la representación (en el centro) esquematiza el trayecto de resolución, pero sobre todo,



muestra el sentido de la tarea planteada, podría plantearse como un esquema que puede ser aplicable a tareas similares y representarse a partir de un modelo generalizable.<sup>7</sup>

Las técnicas empleadas a lo largo de la T1.5 dan cuenta de un dominio adquirido a través del REI, los profesores en formación han identificado el tipo de situaciones para las cuales el valor unitario es una técnica eficiente, pero también resulta claro que al enfrentarse a tareas con tres magnitudes reconocen la necesidad de simplificar las técnicas que habían considerado idóneas. Ante la presencia de un modelo «semialgebraico» resultó necesario plantear otro tipo de tareas que, sin olvidar el momento tecnológico-teórico vivido, diera pie a la exploración en la que los profesores en formación buscaran ayuda con sujetos o materiales especializados, el objetivo es que esta ayuda les permitiera conocer otras técnicas basadas en modelos algebraicos, este momento se concretó al término de la T1.5.

#### 4.5.2. La búsqueda del modelo algebraico

Otra subtarea asociada a la T1.5 intentaba que los profesores en formación «vivieran» un momento en el que indagarán con «especialistas» (sus antiguos profesores, familiares o en textos matemáticos)<sup>8</sup> la técnica adecuada para resolver la tarea:

Considerando que el precio del petróleo Maya es de \$865 y el petróleo Olmeca es de \$995, ¿Qué cantidad de cada tipo de petróleo se debe mezclar si se desea producir una mezcla cuyo costo por barril sea de \$900?

Al mismo tiempo que se buscaba complejizar la tarea, también se pretendía que del valor unitario ( $\tau_1$ ), la regla de tres ( $\tau_2$ ) y la razón fraccionaria ( $\tau_3$ ), emergiera una nueva técnica, un sistema de ecuaciones ( $\tau_4$ ) que permitiera una doble justificación tecnológica, una basada en la Teoría de las Razones y Proporciones ( $\theta_1$ ) y otra en la Modelización algebraica ( $\theta_2$ ).

En la solución de dicha tarea, se identificaron cinco técnicas, algunas de-

7. Esta primera aproximación muestra el papel de la división en la estructura semialgebraica, aunque en tareas posteriores los profesores en formación tienen muchas dificultades para identificar ese papel.

8. Se indicó que en una semana deberían buscar un «especialista» que pudiera ayudarles o bien entablar una búsqueda en diferentes medios (libros o Internet). El objetivo de esta actividad era acentuar la idea de estudio como recorrido, como una búsqueda que hace el sujeto a través de diferentes medios.

rivaron del proceso de búsqueda planteado mientras que otras fueron creación personal, dado que algunos profesores en formación mencionaron que sus «especialistas» no pudieron ayudarlos, es el caso de la técnica personal de PF3 en la que se observa el uso de operaciones básicas:

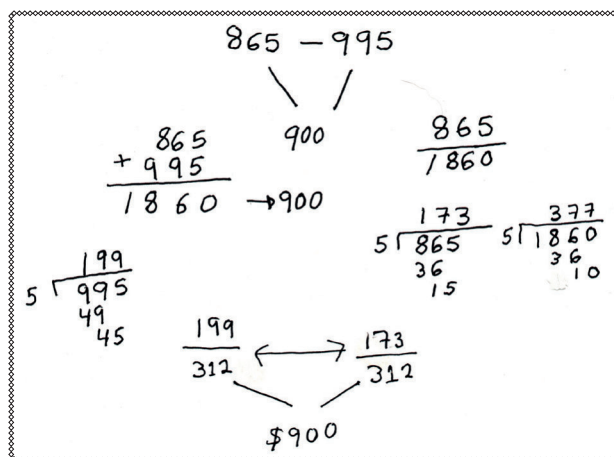


Imagen 47. Técnica personal aritmética (PF3).

Como se puede observar, PF3 considera que debe hacerse una mezcla con dos magnitudes (precio de cada petróleo) para encontrar una tercera magnitud (precio total \$900), sin embargo la tarea pedía la cantidad de cada tipo de petróleo en la mezcla, es decir, la incógnita está referida al número de barriles como magnitud. Una vez que suma el precio de ambos tipos de barril, divide las tres magnitudes conocidas (precio de barril Maya, precio de barril Olmeca y la suma de ambos precios) entre cinco, con ello intenta reducir las magnitudes dado que 5 es divisor común a los tres datos, aunque no se observan indicios de una operación de la cual pudiera resultar el número 5. Sin llegar a un resultado preciso, PF3 opta por representar los cocientes de las tres divisiones a modo de «razón» sin establecer directamente la comparación de magnitudes, sobre todo porque los datos que utiliza aluden a la magnitud «precio», lo que no corresponde a la situación en cuestión.

En la siguiente imagen se muestra la técnica que utilizó PF1 y PF4 en esta tarea, también inicia con la consideración de los costos de los tipos de petróleo, pero los asocia con el número de barriles a través de la regla de tres.

$$\begin{array}{rcl}
 865 & & 865 - 100\% \\
 100\% & & ? - 52.02\% \\
 865 & - & 100\% \\
 900 & - & 104.01\% \\
 & & 52\% \\
 995 & - & 100\% \\
 900 & - & ? 90.45\% \\
 & & 45 \\
 995 & - & 100\% \\
 ? & & 45\% \\
 \hline
 & & 447.75
 \end{array}$$

PF4

$$\begin{array}{l}
 \text{Esta solución me} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 865 - 100\% \\
 450 - ? 52\% \\
 995 - 100\% \\
 450 - ? 45.2\% \\
 52\% \text{ del maya y } 45.2\% \text{ del olmeca}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

PF1A

$$\begin{array}{l}
 \text{Mi solución} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 865 - 1 \\
 450 - ? = 0.5202 \\
 995 - 1 \\
 450 - ? = 0.4522 \\
 \text{De maya } 0.5202 \text{ y de olmeca } 0.4522
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

PF1B

Imagen 48. Regla de tres (PF4 y PF1).

A pesar de que tanto PF4 como PF1 llegan a resultados aproximados y utilizan la misma técnica, la significación y alcance son distintos. PF4 busca un cuarto término desconocido, el porcentaje correspondiente a \$900 por ello establece la comparación con el precio de cada tipo de petróleo que considera como el 100%. Para el petróleo Maya la cuarta magnitud indica una diferencia de 4.01% de la mezcla por encima del costo de este tipo de petróleo, mientras que en el Olmeca resulta una diferencia porcentual de 9.55% por debajo del precio de la mezcla y el costo del petróleo. Ante dichos resultados PF4 calcula la mitad de ambos porcentajes para «comprobar» con otra regla de tres, que los costos de los porcentajes encontrados se aproximan a 900, así el 52.02% y el 45% constituyen desde su perspectiva las cantidades (porcentaje) de cada tipo de barril para obtener la mezcla solicitada.

Por su parte PF1 hace una interpretación diferente, desde que plantea la regla de tres divide el costo de la mezcla (\$900) entre dos tipos de petróleo y calcula el porcentaje correspondiente, esta técnica proviene del «especialista» por lo que PF1 sólo transforma el 100% a la unidad para encontrar la parte proporcional a cada barril en lugar del porcentaje (52% del Maya y 45.2% del Olmeca).

A diferencia de la técnica anterior basada en la regla de tres, en la siguiente imagen se puede observar que PF5 hace explícita la relación entre el número de barriles de cada tipo y el costo de la mezcla en un modelo que podría denominarse tabular en tanto que refleja a través de estimaciones la posible mezcla y el costo que derivaría.

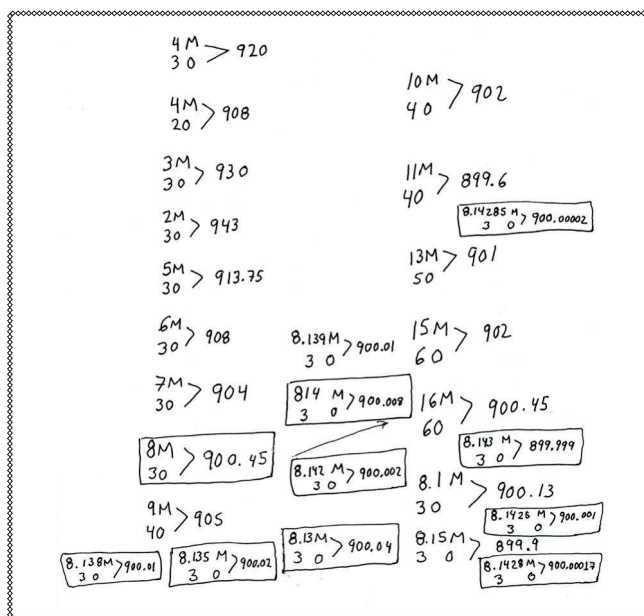


Imagen 49. Modelo Tabular (PF5).

Esta técnica parte de una estimación de barriles enteros, PF5 aumenta y disminuye las cantidades para aproximarse a dicho costo. Cuando establece que puede mezclar 16 barriles de petróleo Maya con 6 de Olmeca, busca magnitudes proporcionales a éstas e inicia las aproximaciones con la mitad de los barriles, es decir 8 barriles del Maya y 3 del Olmeca. Al identificar que se trata de magnitudes que son múltiplos entre sí inicia estimaciones con decimales hasta lograr la aproximación más cercana al costo planteado en la tarea. Con el uso de esta técnica fue posible evidenciar que habrá mezclas diferentes que lleven a un mismo costo (4 de Maya y 2 de Olmeca = 908, 6 de Maya y 3 de Olmeca = 908), esta observación permitirá en su momento interpretar que una tarea de este tipo tiene diferentes soluciones.

En otra técnica, utilizada por PF2 y derivada de un profesor «especializado» (Imagen 50), la tarea se modeliza mediante un sistema de ecuaciones y se resuelve a través del método de Gauss-Jordan.<sup>9</sup> Esta técnica resulta de gran utilidad, sobre todo cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones con tres incógnitas y cómo se observa, consiste en emplear el método de reducción de modo que en cada ecuación se tenga una incógnita menos que en la ecuación que le antecede. Si bien en este caso no se trataba de un sistema de tres ecuaciones, la técnica le sirve a PF2 para alcanzar un resultado que al comprobarse, da cuenta de su eficiencia.

Handwritten mathematical work showing the Gauss-Jordan method for solving a system of equations. The work is enclosed in a dashed rectangular box.

Initial equation:  $865 + 995 = 900$

Augmented matrix:  $M + L = 1$

Row operations:

- $(-865) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 865 & 995 & 900 \end{array} \right)$
- $(\frac{1}{130}) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 130 & 35 \end{array} \right)$
- $(-1) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{26} \end{array} \right)$
- $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{19}{26} \\ 0 & 1 & \frac{7}{26} \end{array} \right)$

Solutions:

- $Maya = \frac{19}{26}$  ó  $73.1\%$
- $Olmea = \frac{7}{26}$  ó  $26.9\%$

Comprobando:

$$865 \left( \frac{19}{26} \right) + 995 \left( \frac{7}{26} \right) = 900$$

Final result:  $900 = 900$

Imagen 50. Método de Gauss (PF2).

Este método consiste en llevar los coeficientes de cada una de las ecuaciones a una matriz, lo primero que hace PF2 es etiquetar las ecuaciones, coloca las literales M y L en 1, aunque olvida colocar las incógnitas y sólo coloca los coeficientes y el término independiente ( $865+995=900$ ) sin embargo en la comprobación final los valores de las incógnitas se hacen presentes.

<sup>9</sup> El método de Gauss-Jordan consiste en aplicar transformaciones elementales a la matriz ampliada del sistema, de modo que de ser posible se llegue a un sistema de la forma:  $x+y+z=*$ ,  $y+z=*$ ,  $z=*$ , para convertir el sistema inicial en un sistema cuya matriz ampliada, es una matriz triangular superior (Tortosa y Santacruz, 1997).

Aunque no lo explicita, la primera columna se refiere al petróleo Maya ( $x$ ), la segunda al Olmeca ( $y$ ) y en la tercera ubica los términos independientes (costo de la mezcla). Una vez establecida la matriz, busca que el coeficiente 865 se vuelva 0 (con  $-865$ ) para hacer una matriz escalonada, luego obtiene los valores de la segunda fila (0, 130 y 35) y sigue simplificando, multiplica la fila dos por  $1/130$  (inverso de 130) para obtener la mayor simplificación posible en la fila dos (0, 1 y  $7/26$ ). Después pasa a la primera fila, utiliza  $-1$  para eliminar el coeficiente  $L$  ( $-1 \cdot 0 = 0 + 1 = 1$  luego multiplica  $-1$  por  $1 = -1$  más  $1 = 0$ ). Posteriormente trabaja con el término independiente de la primera fila y multiplica  $-1$  por  $7/26$ , con esto se ha logrado reducir la matriz aumentada dejando sólo un coeficiente en 1 en las columnas de  $x$  y de  $y$  así como reducidos los términos independientes. Una vez que encuentra la parte proporcional de cada tipo de petróleo, los explicita a través del porcentaje correspondiente y coloca los valores de  $M$  y  $L$  en la ecuación para la comprobación que muestra la eficiencia de la técnica.

Tal como se había previsto en el diseño del REI, la intención de este momento con los «especialistas» o textos científicos tenía como propósito el «encuentro» con técnicas más elaboradas en términos de síntesis y eficiencia, al igual que con la tarea anterior, el objetivo se logró de manera parcial, dado que sólo tres profesores en formación resolvieron la tarea a través de un modelo algebraico y como se puede ver en la siguiente imagen, mostró mayor precisión en la solución del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 X = \text{Petróleo Maya} \\
 865x \\
 \textcircled{1} 865x = 995y \quad (1/6) \\
 173 = 199y \\
 \boxed{x = \frac{199y}{173}} \\
 x = \frac{199 \left( \frac{90}{199} \right)}{173} \\
 \boxed{x = \frac{90}{173}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 y = \text{Petróleo Olmeca} \\
 995y \\
 \textcircled{2} 865x + 995y = 900 \quad (1/5) \\
 \boxed{173x + 199y = 180} \\
 173 \left( \frac{199}{173} \right) + 199y = 180 \\
 199y + 199y = 180 \\
 398y = 180 \\
 y = \frac{180}{398} \quad (1/2) \\
 \boxed{y = \frac{90}{199}}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{P. Maya } x = \frac{90}{173} = 0.5202 = \boxed{52.02\%} \\
 \text{P. Olmeca } y = \frac{90}{199} = 0.4523 = \boxed{45.23\%}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Comprobación} = \$ 865 \rightarrow 52.02\% = 449.97 + \\
 \$ 995 \rightarrow 45.23\% = \frac{450.03}{900.00}
 \end{array}$$

Imagen 51. Modelo algebraico parcial (PF8).

La técnica de PF8 se basa en modelizar la tarea mediante una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Para resolverla, establece una igualdad entre costo de cada tipo de petróleo y su respectiva incógnita ( $865x=995y$ ) posiblemente considera que la mezcla tendrá aproximadamente la mitad de cada tipo de petróleo, luego reduce los costos a la quinta parte para simplificar el despeje de  $x$  y establece la ecuación ( $865x+995y=900$ ) en la que sustituye el valor de  $x$  encontrado en el despeje anterior y agrupa los términos iguales ( $199y+199y$ ) para encontrar el valor de  $y$ .

Una vez identificados los valores de  $x$  y  $y$  identifica la parte proporcional a cada uno, la cual también se expresa de modo porcentual, esta situación se comprueba y la suma de ambos valores lo lleva al costo de la mezcla establecida. Durante el momento tecnológico-teórico del recorrido esta técnica fue considerada como la más eficiente.

Otro modelo algebraico diferente al anterior y que se puede observar en la siguiente imagen, es el que utilizó PF7.

Handwritten mathematical work for PF7:

$$\begin{array}{l}
 \text{Maya} \quad \$ 865^{00} \\
 \text{Olmeca} \quad \$ 995^{00} \\
 W = \quad \$ 900^{00} \\
 865x + 995y = 1860xy \\
 \frac{1860}{900} = 2.06 \\
 865x + 995y = \frac{1860xy}{900xy} \\
 \frac{865x + 995y}{2.06} \\
 \begin{array}{r}
 \text{Maya} \qquad \text{Olmeca} \\
 416.9x + 483.69y = 899.99 \\
 \frac{416.9}{865} + \frac{483.69}{995} \\
 48.19\% + 48.61\% = 96.8\%
 \end{array}
 \end{array}$$

Imagen 52. Uso del porcentaje (PF7).

En esta técnica aparece una tercera variable, el precio total de la mezcla (W). También asigna una incógnita a cada tipo de petróleo ( $x$ ,  $y$ ) y una vez determinados, suma los costos parciales y los divide entre el costo total pero no considera que se trata de términos no semejantes y suma los coeficientes, aunque los coloca como si los hubiera multiplicado ( $865x+995y=1860xy$ ). Luego utiliza el cociente de la división (2.06) como divisor para cada uno de los valores de ambos tipos de barril y establece los costos proporcionales a cada petróleo (416.9 de  $x$  y 483.69 de  $y$ ) pero aún le falta identificar la parte de cada uno que deberá mezclarse para obtener un barril de \$900, por lo que opta por dividir los costos encontrados entre el costo del barril completo de cada tipo y así obtener dicha parte, luego hace la transformación a porcentaje donde se aprecia un faltante de 3.2% para completar el total.

Con estas subtareas de la tarea T1.5 los profesores en formación observaron desde perspectivas especializadas la diversidad de técnicas que pueden utilizarse para resolver tareas de este tipo, aunque cabe subrayar que en la mayoría de los casos se observaron deficiencias en su aplicación. No obstante, se considera que el propósito definido para esta parte de la T1.5 se alcanzó en cierta medida con la aplicación de un modelo algebraico incipiente.

#### *4.5.3. El trabajo con la técnica. Continuidad o ruptura*

Como se ha mencionado, el propósito de la tarea T1.5 era que una vez identificadas diversas técnicas, los profesores en formación utilizaran la que les pareciera más eficiente para resolver tareas de relación proporcional entre tres magnitudes. Para observar si en efecto los profesores en formación utilizarían alguna técnica más eficiente se planteó una tarea similar a la anterior en la que sólo se modificó el costo de la mezcla, el planteamiento fue:

Si el precio del petróleo Maya es de \$865 y el petróleo Olmeca es de \$995. ¿Qué cantidad de cada tipo de petróleo se debe mezclar para producir una mezcla, cuyo costo de cada barril sea de \$975?

En este caso varios profesores en formación modificaron sus técnicas, aunque tres de ellos continuaron con la que habían utilizado antes, es decir, vuelve a aparecer el método de gauss, la regla de tres y el modelo algebraico, aunque el uso del modelo algebraico se amplió a seis profesores en formación, PF2 sigue



empleando el método de gauss y lo desarrolla de la misma forma que en la tarea anterior, como se muestra en la imagen 53:

$$\begin{aligned}
 &865M + 995L = 975 \\
 &M + L = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 865 & 995 & | & 975 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-865)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 130 & | & 110 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\frac{1}{130})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{11}{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & | & \frac{11}{13} \end{pmatrix}$$

Maya =  $\frac{2}{13}$   
 Olmeca =  $\frac{11}{13}$

Respuesta

Comprobando  
 $865 \left(\frac{2}{13}\right) + 995 \left(\frac{11}{13}\right) = 975$   
 $975 = 975$

Imagen 53. Método de Gauss (PF2).

Para PF2, además de eficiente esta técnica resultó confiable, como se puede observar, modeliza la situación a través de un sistema de ecuaciones y a diferencia de la tarea anterior, en este caso expresa las literales M y L en el lugar de las incógnitas. Al comprobar la igualdad se observa la pertinencia de la técnica, razón por la cual sigue siendo empleada.<sup>10</sup>

Por su parte PF1 utiliza la misma técnica (la regla de tres) que en la tarea anterior (Véase imagen 54), opta por dividir en dos el costo de la mezcla (975) y establece la regla de tres con los costos de cada tipo de petróleo.

$$\begin{aligned}
 &865 - 1 \\
 &487.5 - ? \quad 0.5635 \\
 &995 - 1 \\
 &487.5 - ? \quad 0.4899
 \end{aligned}$$

Imagen 54. Regla de tres (PF1).

10. PF2 reconoció la efectividad y eficiencia de su técnica durante del momento de explicación y justificación de las técnicas.

Esta técnica sigue siendo predominante en PF1 porque parece económica y la domina, sin embargo no es eficiente porque sólo le permite hacer aproximaciones sin llegar a un resultado exacto dado que no se puede hablar de un promedio de la mezcla y considerar los costos de cada tipo de barril por separado, se olvida que es una mezcla y considera la mitad de \$975 para cada tipo de petróleo.

A diferencia de los dos casos anteriores, seis profesores en formación cambiaron su técnica, por ejemplo PF5 había utilizado un modelo tabular y ahora toma la técnica de PF8 por considerarla eficiente pero sobre todo más económica que su técnica anterior.<sup>11</sup>

①  $865x = 995y$   
 $x = \frac{995y}{865}$   
 $x = \frac{199Y}{173}$   
 $865 \times 0.56 = 484.4$   
 $995 \times 0.49 = 487.55$   
 $\underline{971.95}$

②  $865x + 995y = 975$   
 $173 \left( \frac{199Y}{173} \right) + 199Y = 195$   
 $199Y + 199Y = 195$   
 $398Y = 195$   
 $Y = \frac{195}{398}$   
 $Y = 0.49$

$865x = 995(0.49)$   
 $865x = 487.55$   
 $x = \frac{487.55}{865}$   
 $x = 0.56$

Imagen 55. Modelo algebraico parcial 1 (PF5).

Lo destacable en esta tarea es que seis profesores en formación utilizaron un modelo algebraico, aunque el resultado final (971.95) fue aproximado porque no se ha considerado que la tarea pide la cantidad que se debe mezclar de cada tipo de petróleo y que el costo de cada barril de esa mezcla sea una cantidad determinada. En el modelo algebraico también se presentó una técnica que buscaba simplificar el proceso de resolución de la tarea, no obstante en su desarrollo se mostraron algunas dificultades (Imagen 56).

11. PF8 expresó las razones de su cambio en el momento de explicación y justificación de técnicas.

$$\begin{array}{l}
 865y + 995x = \frac{1860}{975} = 1.9 \\
 \frac{865y + 995x}{1860/975} = \frac{453y + 521x}{974} \\
 y = 52.3\% \\
 x = 52.3\%
 \end{array}$$

Imagen 56. Modelo algebraico parcial 2 (PF7).

Como se puede observar, el error que PF7 sigue cometiendo es sumar dos términos no semejantes para encontrar un valor (1.9) el cociente de los costos de la tarea, sin embargo cuando divide los costos parciales y obtiene  $453y + 521x$ , vuelve a dividirlo entre 974, no queda claro su propósito porque tampoco coincide con los porcentajes obtenidos.

La tarea T1.5 ha permitido observar la evolución de las técnicas y el uso de un modelo algebraico en un número considerable de profesores en formación (siete incluyendo quien utiliza el método de Gauss-Jordan). Aunque de modo diferente, utilizan una expresión algebraica para resolver la tarea. En contraparte, un profesor en formación sigue empleando la regla de tres porque no ha comprendido que sólo podrá darle ciertas aproximaciones al resultado, ni la necesidad de construir un modelo generalizado que sea eficiente para todas las tareas de este tipo.

#### 4.5.4. En la ruta hacia el modelo algebraico

Otra subtarea de la T1.5 tenía como objetivo que los profesores en formación utilizaran un modelo algebraico como técnica para tareas cuya incógnita está representada por una literal, tal como se planteó en la siguiente situación:

¿Qué cantidad de cada tipo de petróleo se requiere si se desea producir una mezcla cuyo costo de cada barril sea de  $n$  pesos?

El planteamiento de la tarea complejizaba la situación al colocar una literal en el costo, la intención era que reconocieran la técnica general más que un procedimiento, esto es que reconocieran una estructura algebraica que representara las relaciones implicadas entre las magnitudes expresadas pero que también permi-

tiera su solución. No obstante el propósito, tres de los profesores en formación consideraron necesario dar un valor cualquiera  $n$  para justificar el desarrollo de la técnica utilizada, en la siguiente imagen se observa la técnica de PF2.

$$\begin{array}{l}
 C1 \quad \begin{array}{rcl} 865M + 995L & = & 950 \\ M + L & = & 1 \end{array} \\
 (-865) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 865 & 995 & 950 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Maya} = \frac{9}{26} \\ \text{Olmeca} = \frac{17}{26} \end{array} \\
 (\frac{1}{130}) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 130 & 85 \end{array} \right) \quad \text{Comprobando} \\
 (-1) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{17}{26} \end{array} \right) \quad 865 \left( \frac{9}{26} \right) + 995 \left( \frac{17}{26} \right) = 950 \\
 \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{9}{26} \\ 0 & 1 & \frac{17}{26} \end{array} \right) \quad \boxed{950 = 950}
 \end{array}$$

Imagen 57. Método de Gauss (PF2).

Como se puede apreciar, si bien PF2 plantea parcialmente una estructura algebraica al colocar M y L como incógnitas ( $865M + 995L = 950$ ), el modelo no resulta generalizable pues se aplica sólo al valor dado a  $n$ , es decir a 950. Lo que se aprecia aquí es una «resistencia» para abandonar la técnica dominada que, aunque se basa en un modelo algebraico (un sistema de ecuaciones) no representa fielmente la tarea planteada (la generalización).

En su caso, PF1 vuelve a utilizar la regla de tres, se podría decir que es él quien presenta la técnica mayormente aritmética dado que no se observan intentos de estructurar un modelo algebraico. Como se puede ver en la siguiente imagen, sólo representa la incógnita que habrá de despejarse a través de la regla de tres.

n puede ser cualquier valor

|            |            |
|------------|------------|
| 865 - 100% | 995 - 100% |
| ? - 50%    | ? - 50%    |
| ↙ 432.5    | 497.5      |
| n = 930    |            |

Imagen 58. Regla de tres (PF1).

Cabe señalar que para este caso, la técnica de PF1 resultó eficiente pues recuperó el costo de una mezcla que había sido planteada desde las primeras tareas, además calculó el promedio del costo de ambos petróleos y encontró un resultado adecuado.

Empero, a diferencia de sus dos técnicas anteriores, PF6 utiliza el modelo algebraico parcial que había sido explicado y justificado por la mayoría de los profesores en formación, pero da un valor específico a  $n$  (1000) para desarrollar su técnica, como se puede ver en la siguiente imagen:

|                                                                                    |                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $865x = 995y$<br>$173x = 199y$<br>$x = \frac{199y}{173}$<br>$x = \frac{995y}{865}$ | $865x + 995y = n$<br>$865\left(\frac{995y}{865}\right) + 995y = n$<br>$995y + 995y = n$<br>$1190y = n$<br>$y = \frac{n}{1190}$<br>$y = \frac{n/2}{995}$ | $n = 1,000$<br>$y = \frac{1000/2}{995}$<br>$y = \frac{500}{995} = .5$<br>$y = 50.25\%$<br>$x = \frac{1000/2}{865}$<br>$x = \frac{500}{865} = .5$<br>$x = 57.80\%$ |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

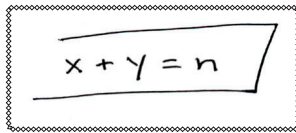
$$865(.5780) + 995(.5025) = 1000$$

$$500 + 500 = 1000$$

$$1000 = 1000$$

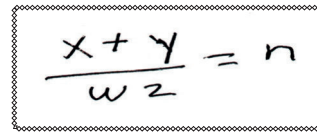
Imagen 59. Modelo algebraico «parcial 1» (PF6).

La estructura inicial podría tomarse como modelo algebraico parcial en tanto que asigna un valor numérico a los costos de cada tipo de barril ( $865x+995y=n$ ), datos que son parte de la tarea planteada. Otros dos profesores en formación muestran la transición del modelo parcial al modelo algebraico (Véase imagen 60).



$$x + y = n$$

PF4. Suma de variables



$$\frac{x + y}{wz} = n$$

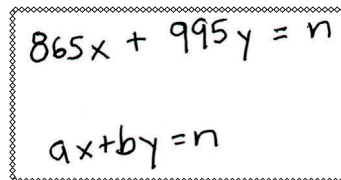
PF7. Suma y división de variables

Imagen 60. Uso de la suma.

PF4 había empleado la regla de tres y el modelo semialgebraico ( $865x+995y=975$ ) en tareas previas, en este caso utiliza una suma de variables, sin embargo olvida que  $x$  y  $y$  constituyen las incógnitas de cada tipo de petróleo que conforman la mezcla ( $n$ ) y que a las incógnitas les corresponde un valor diferente, el precio de cada petróleo (\$865 y \$995).

Lo mismo ocurre con PF7 quien coloca el producto de dos variables ( $w$  y  $z$ ) como divisor de la suma de  $x+y$ , lo que deduce la necesidad de representar los precios de cada petróleo mediante una literal, en su caso considera la división como mezcla de dos tipos de petróleo, esto último resulta coherente desde la perspectiva del planteamiento de la tarea.

En esta misma subtarea tres profesores en formación retoman la expresión inicial con la que habían trabajado anteriormente, es decir, colocan los costos de petróleo respectivos para cada incógnita y sustituyen los valores numéricos por literales (Véase imagen 61).



$$865x + 995y = n$$

$$ax + by = n$$

Imagen 61. Modelo algebraico «incompleto» (PF8).

En estos tres casos, cuya técnica se podría denominar modelo algebraico «incompleto», no fue necesario desarrollar la técnica porque una vez que se escribió la estructura algebraica, se sustituyeron los valores aritméticos por las literales  $a$  y  $b$  para establecer la generalización en la igualdad, con lo que se estableció de manera implícita que se trata de una ecuación lineal con dos incógnitas<sup>12</sup>, de esta forma se entiende que las parejas ordenadas de  $x$  y  $y$  que satisfagan la igualdad, serán las soluciones de la ecuación.

Cabe mencionar que todas las técnicas anteriores fueron validadas mediante una discusión grupal, esta validación se organizó conforme a los momentos planteados en el REI-FP planificado, sin embargo, es evidente que hasta la sub-tarea anterior los profesores en formación no se habían apropiado del modelo algebraico como técnica para la solución de estas tareas, por esa razón se diseñaron y aplicaron tareas adicionales que permitieran replantear las técnicas para observar que faltaba considerar la mezcla  $(x+y)$  como divisor de la estructura encontrada, es decir, cuando ellos establecen el modelo  $ax+by=n$  hacen referencia a una mezcla, pero no a la parte extraída de la mezcla («que cada barril de esa mezcla sea de  $n$  pesos») que se encontraría mediante la división que aún no ha aparecido, situación que buscó enfatizarse. Lo que resultó de las actividades ulteriores se presenta en el siguiente apartado.

#### 4.5.5. La consolidación del modelo algebraico

Como se ha mencionado, en esta última parte de la tarea T1.5 el objetivo era que los profesores en formación establecieran una técnica ( $\tau$ ) y una tecnología ( $\theta$ ) generalizable para cierto tipo de tareas asociadas a la proporcionalidad. Lo relevante no era sólo llegar al modelo algebraico sino comprender su función e identificar el significado de cada una de sus partes, lo que sería útil para predecir el comportamiento del problema, esto es, el conocimiento matemático en el contexto del problema, expresado en una praxeología.

El REI-FP en su módulo matemático incluyó una última tarea para identificar el comportamiento de las magnitudes en una relación de variación pro-

12. Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad de un modelo algebraico del tipo  $ax+by=c$ , las incógnitas están representadas por  $x$  e  $y$ , mientras que  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales conocidos donde  $a$  y  $b$  no pueden ser 0 al mismo tiempo, una solución para dicha ecuación se presenta como un par de números reales  $(x, y)$  que pueden encontrarse asignando un valor arbitrario a  $x$  para despejar  $y$  o viceversa. Una ecuación de este tipo tiene infinitas soluciones y toda solución determina un punto en el plano cartesiano que se representa a través de una línea recta, de ahí el nombre de ecuación lineal (Fernández, 2012).

porcional del tipo  $(ax+by)/(x+y)=c$ , con esta tarea además de validar las técnicas de carácter aritmético se buscaba que utilizaran un modelo algebraico con una justificación sustentable en la Teoría de las razones y proporciones (θ1) y la Modelización algebraica (θ2). Para ello se planteó la siguiente sub tarea.

Teniendo en cuenta que el precio del petróleo Maya es de \$865 y el petróleo Olmeca es de \$995, si se hace una mezcla usando 13 barriles de petróleo Maya y 12 del Olmeca. ¿Cuánto cuesta un barril de petróleo de esa mezcla?

La tarea tenía como objetivo provocar la evolución de la técnica hacia el modelo algebraico pero sobre todo recuperar una situación en la cual se observara la necesidad de establecer la división entre  $(x+y)$  ausente en la estructura algebraica que habían logrado concretar en tareas anteriores. En esta sub tarea dos profesores en formación iniciaron con el modelo algebraico parcial que habían desarrollado, aunque no lo explicitan de modo algebraico (Véase imagen 62).

The image shows a handwritten algebraic structure within a dashed rectangular border. On the left side, there are four equations stacked vertically:  $13M + 12O = 25MO$ ,  $13(865) + 12(995) = 25MO$ ,  $11245 + 11940 = 25MO$ , and  $23185 = 25MO$ . On the right side, there are two calculations: a division  $\frac{23185}{25} = MO$  and a multiplication  $927.4 = MO$ .

Imagen 62. Estructura algebraica compacta (PF7).

A la izquierda se observa el proceso seguido para la expresión  $13M+12O=25MO$  que incluye sólo datos conocidos, algo que debe destacarse es que el proceso evidencia la necesidad de expresar la división «entre 25», un dato que había pasado desapercibido en la construcción anterior del modelo. A la derecha se aprecia la comprensión de esta situación y se alude al cociente de la división como la cantidad que se extrae de la mezcla de ambos tipos de petróleo.

En esta misma sub tarea, seis profesores trabajaron su técnica en sentido inverso, es decir desarrollaron la técnica aritmética para luego establecer el modelo algebraico y su interpretación, que era el propósito de este recorrido de estudio (Véase imagen 63).



$$\begin{array}{r} 865 \times 13 \\ 2595 \\ 865 \\ \hline 11245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 995 \times 12 \\ 1990 \\ + 995 \\ \hline 11940 \\ 11245 \\ \hline 23185 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 23185} \\ - 225 \\ \hline 0068 \\ - 50 \\ \hline 185 \\ 175 \\ \hline 100 \\ 100 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{ax + by}{x + y} = n$$

Imagen 63. Estructura algebraica desarrollada (PF5).

Como puede observarse, la técnica de PF5 es un ejemplo del proceso que justifica el modelo algebraico. Inicia con el precio total para cada uno de los tipos de petróleo, una vez que se identifica el valor de ambas magnitudes se suma y divide entre el número total de barriles (25), con esta acción se advierte que la estructura algebraica planteada en tareas previas estaba incompleta pues sólo se había conocido «una mezcla» no la parte que se extrae de esa mezcla, la cual se representa con la división entre  $x+y$ . Si bien en este caso se retomó una técnica aritmética que ya se había empleado, con la expresión algebraica se aprecia la aparición de una técnica que ha sido comprendida y derivada de un proceso planteado a través del REI-FP.

Ahora bien, para gestionar el momento relativo al trabajo de la técnica y consolidar el dominio del modelo algebraico se planteó otra subtarea que solicitaba identificar la parte proporcional de cada tipo de petróleo en una mezcla dada, a saber:

¿Qué cantidad de cada tipo de petróleo se debe mezclar si se desea producir una mezcla cuyo costo de cada barril sea de \$940?

A diferencia de la subtarea anterior, los ocho profesores en formación usaron el modelo algebraico para resolverla. Cabe señalar que para identificar el costo de cada barril que se extrae de una mezcla es preciso realizar el despeje de  $x$  y de  $y$ , esta acción plantea una dificultad mayor y al parecer es la razón por la que todos los profesores en formación usan el modelo algebraico, lo que hacen PF1 y PF2 (Imágenes 64 y 65) es un ejemplo de la técnica implementada.

$$\begin{aligned}
 \frac{ax+by}{x+y} &= c \\
 \frac{865x+995y}{x+y} &= 940 \\
 865x+995y &= 940x+940y \\
 995y &= 75x+940y \\
 55y &= 75x \\
 y &= \frac{75x}{55} \\
 y &= \frac{75(2)}{55} \\
 y &= 2.72 \\
 \frac{55y}{75} &= x \\
 x &= \frac{55(3)}{75} \\
 x &= 2.2
 \end{aligned}$$

Imagen 64. Modelo algebraico (PF1).

Como se puede apreciar, PF1 coloca los datos conocidos (costos de cada petróleo y costo total de un barril de la mezcla) e inicia el despeje de las variables de  $y=75x/55$ , al llegar a este punto es interesante observar que coloca un valor cualquiera a  $x$  (2), con lo que llega a establecer que el valor de  $y$  (cantidad de petróleo Olmeca) sería de 2.72 cuando la cantidad de petróleo Maya ( $x$ ) sea de 2. Luego despeja  $x$  y otorga el valor 3 a  $y$  para establecer que cuando la cantidad del petróleo Olmeca sea 3, la cantidad del petróleo Maya será de 2.2 situación que nos permite identificar que PF1 ha comprendido que existe una cantidad infinita de mezclas que puedan dar el costo de un barril de \$940 pesos.

A diferencia de la técnica anterior, PF2 plantea el modelo algebraico y hace el despeje. En su trabajo se observa la eficiencia y economía de la técnica, dado que una vez dominada resulta sencillo manipularla y considerar su pertinencia en este tipo de situaciones. PF2 otorga un valor cualquiera a  $y$  (2) para identificar que  $x$  (Petróleo Maya) tendría un valor de 1.46, podría decirse entonces que el momento de estudio referido al trabajo de la técnica ha permitido comprender que para este tipo de tareas las soluciones son infinitas.

$$\begin{array}{ll}
 \frac{ax+by}{x+y} = c & x(-75) = y(-55) \\
 ax+by = c(x+y) & \\
 ax+by = c(x+y) & x = y \left( \frac{-55}{-75} \right) \\
 ax+by = cx+cy & x = y(0.73) \\
 ax-cx = cy-by & x = 2(0.73) \\
 x(a-c) = y(c-b) & x = 1.46 \\
 x(865-940) = y(c-b) & \\
 x(-75) = y(940-995) & 
 \end{array}$$

Imagen 65. Modelo algebraico (PF2).

Lo importante en este REI-FP es que los profesores en formación construyeron el modelo algebraico así como su funcionalidad, todo ello a través de un recorrido de estudio que inició con planteamientos sencillos susceptibles de resolverse con un modelo aritmético hasta otros en los que fue preciso utilizar un modelo algebraico, proceso que tuvo que ver con la progresiva complejidad de las tareas y con la gestión de los seis momentos de estudio del modelo didáctico.

Es de subrayarse que en la última tarea los ocho profesores en formación usaron el modelo algebraico y sólo uno mostró dificultades para manejarlo pues olvidó dar un valor cualquiera a una de las incógnitas para despejar la otra. No obstante, esta dificultad podrá ser superada con el planteamiento de otras tareas similares donde la técnica sea justificada y validada.

Finalmente, cabe señalar que aunque el modelo aquí construido es propio de la función lineal, esta noción no fue institucionalizada al no constituir el objetivo principal del REI ni el objeto de esta investigación, además esta noción no es trabajada por los profesores en formación con sus alumnos de las escuelas de educación primaria. La intención era que, como «aprendices» de matemáticas identificaran situaciones en las que hay una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes con una tercera, pero sobre todo, provocar la evolución de sus técnicas aritméticas a un modelo algebraico general y eficiente.



## V. ANALIZAR UN REI

### LAS PRAXEOLOGÍAS DEL «PROFESOR ANALISTA»

Las praxeologías didácticas encuentran su «razón de ser» en la pregunta ¿cómo enseñar...? y se reconstruyen con el planteamiento de tareas relativas al trabajo del profesor. Analizar una praxeología didáctica implica (re) conocer los alcances y restricciones que una institución ha establecido para el estudio de un saber, las cuestiones que plantea, las tareas que señala, las técnicas que demanda y hasta el discurso tecnológico con el que las justifica, por ello en el módulo dos ( $M_2$ ) del REI-FP donde se analiza el REI, se considera sólo un determinado número de variables relacionadas con el problema estudiado.

En correspondencia con esta idea, en este capítulo la atención se centra en identificar el discurso tecnológico de los profesores en formación al reflexionar sobre los conceptos, tareas y técnicas de la proporcionalidad que, desde una perspectiva matemática-didáctica, se hacen presentes en el Recorrido de Estudio e Investigación (REI) que «vivieron» y que de una forma u otra son elementos que se encuentran sujetos a las determinaciones de una institución, la escuela primaria.

El análisis que aquí se presenta se compone por un elemento descriptivo y uno predictivo. En lo descriptivo se trata de que los profesores en formación reflexionen sobre las tareas que resolvieron en el módulo uno como «aprendices» de matemáticas. Para recuperar sus reflexiones se realizó una entrevista semiestructurada que pretendía recuperar evidencia de las descripciones acerca de las tareas y las técnicas presentes en el REI.

La segunda dimensión es predictiva porque cuando se le cambia el rol de «aprendiz» de matemáticas a eventual profesor, el profesor en formación debe reflexionar sobre las elecciones locales y las características de una tarea propia para la enseñanza de un objeto de saber específico. En esta dimensión se analiza aquello que el estudiante podría aprender con dicha situación, así como sus posibilidades de acción, decisión, control y validación al trabajar de modo independiente al formador, es decir, se prevén los comportamientos posibles tra-

tando de demostrar la forma en que el análisis permite controlar su significado y asegurar que se produzcan los conocimientos esperados (Godino, Batanero, Contreras, Estepa y Lacasta, 2013). Específicamente se les pidió analizar dos lecciones ligadas a la proporcionalidad que se incluyen en el libro de texto de sexto año de primaria y se les aplicó otra entrevista semiestructurada que buscaba explorar sus ideas respecto de las posibilidades de enseñanza de tales lecciones. Con base en estas consideraciones, la cuestión generatriz que orientó el trabajo de este módulo ( $M_2$ ) es la siguiente:

Q2: ¿Qué discurso tecnológico-teórico ( $\theta$ ,  $\Theta$ ) despliegan los profesores en formación durante el desarrollo de tareas (T) referidas al análisis de una praxeología didáctico-matemática ligada a la proporcionalidad?

### 5.1. LAS REFLEXIONES SOBRE EL REI

En el primer momento se realizó un análisis (praxeológico) matemático-didáctico de la actividad desarrollada en el primer módulo donde se plantearon cuestiones relacionadas con nociones, técnicas, propiedades y otros elementos identificados en la «vivencia» del REI. Para este análisis era preciso que los profesores en formación utilizaran una terminología específica para describir y analizar la actividad matemática que posteriormente, debería ser estudiada en la escuela primaria, para tal efecto la cuestión derivada fue la siguiente:

Q.2.1. ¿Qué discurso tecnológico-teórico ( $\theta$ ,  $\Theta$ ) expresan los profesores en formación, durante el desarrollo de una tarea (T) relativa al análisis conceptual, técnico ( $\tau$ ) y funcional del recorrido de estudio e investigación posterior a su aplicación en la escuela normal?

Para tal efecto la tarea T2.1 exigía dar respuesta a preguntas como: ¿cuál es el concepto o conceptos centrales que se plantean en la «Situación Petróleo»? ¿qué tipos de proporcionalidad se incluyen?, ¿cuáles son las diferentes estrategias a que da lugar esta situación?, ¿es pertinente plantear la situación petróleo en la escuela primaria?, ¿cuáles serían los conceptos y estrategias que aprenderían los niños con el estudio de esta situación?, entre otras.

En el caso del *concepto central*, seis profesores en formación señalaron que se trataba de la proporcionalidad, argumentaron que en términos generales todas

las tareas implicaban dicho concepto, uno más PF2 agregó que también se trabajó el factor constante de proporcionalidad y manifestó que posiblemente la *cuestión* de estudio era dicha noción, así lo expresa:

Se trabajó el concepto de proporcionalidad y el factor constante de proporcionalidad porque en los problemas que estuvimos analizando había una relación constante entre dos razones que eran  $x$  y  $y$ , una variaba y la otra dependía de la otra, si una aumentaba la otra disminuye entonces es por eso que era el factor constante de proporcionalidad (PF2).

En esta respuesta se observan varios elementos asociados a la proporcionalidad, la relación entre magnitudes incluidas en las tareas vinculadas a la «Situación Petróleo», donde uno de los puntos centrales era el análisis de la variación de una magnitud con respecto a otra, por lo tanto, la noción de variación proporcional fue un eje central de análisis. Aunque la constante de proporcionalidad estuvo involucrada en algunas tareas (las tablas de variación proporcional) no era el concepto principal en esta situación, pero sí una noción presente en el REI.

Por otro lado, hubo un caso que además de identificar a la proporcionalidad como concepto central, también la percibe como noción que puede evolucionar hacia otra perspectiva dependiendo de la institución, tal es el caso de la siguiente afirmación:

Lo que se trabaja es proporcionalidad, pero la proporcionalidad nos lleva hacia el uso de ecuaciones más adelante, entonces es como dependiendo, porque yo por ejemplo este problema lo puedo aplicar a mi grupo y me va a dar resultados aritméticos con un tema aritmético, pero si voy y lo aplico a secundaria muy probablemente, dependiendo de los conocimientos que ellos tengan me puede dar resultados algebraicos (PF7).

En las afirmaciones de PF7, se identifica el concepto central en la «Situación Petróleo», lo interesante de esta idea es la dualidad de los modelos en los que se hace presente, el aritmético y el algebraico. Si bien no se explicitan nociones derivadas del concepto de proporcionalidad, excepto el uso de ecuaciones, este profesor en formación ha comprendido que el contexto y las restricciones

institucionales determinarán el alcance de las nociones y de las técnicas que se podrán estudiar.

A partir de lo anterior podría decirse que todos los profesores en formación identifican el concepto implícito en la situación problema. Esta situación puede deducirse a partir de lo abordado en los momentos de estudio del primer módulo y en el módulo dos donde se intentó reafirmar los conocimientos identificados en el REI al preguntar sobre los tipos de proporcionalidad en las diversas tareas matemáticas resueltas. Uno de los profesores en formación identifica solamente el trabajo con la proporcionalidad directa, al cuestionar sobre los tipos de proporcionalidad que se trabajaron en la situación, indica:

Proporcionalidad... mmm... no sé si sea un tipo de proporcionalidad o más bien como de razón. Cuando por cierto dinero ajustó tantos barriles o viceversa, ah... es la directa. También por ejemplo cuando vimos que si se aumenta el precio aumentaba la cantidad de petróleo (PF4).

En el fragmento anterior se observa que al inicio, PF4 parece no identificar los tipos de proporcionalidad, incluso confunde la noción de razón como parte de la tipología, lo que indica que puede tener ciertas dificultades para identificar situaciones que implican diversos tipos de proporcionalidad, aunque también hace referencia a la proporcionalidad directa cuando ejemplifica con las magnitudes de precio y cantidad de petróleo, no reconoce que en el resto de la situación se plantearon tareas en las que se incluye otro tipo relación tal como lo hace PF3:

Pues la directa y la inversa, ya que, dependiendo de la consigna que se nos daba o la pregunta, nosotros podríamos obtener o desarrollar un procedimiento ya sea de proporcionalidad directa o inversa dependiendo del resultado que se nos pedía (PF3).

En el fragmento anterior se hace alusión a las dos relaciones de proporcionalidad y aunque no ejemplifica, señala que depende del planteamiento dado en la situación. Cabe señalar que en esta categoría se ubicaron cinco de los ocho estudiantes, aunque ninguno la define o ejemplifica, sólo expresan los tipos de proporcionalidad. También se presentó un caso que además de identificar los



dos tipos de relación, enuncia la presencia de otro tipo de relación cuando se manipularon tres magnitudes en la situación problema:

La directa cuando una cantidad la dividíamos entre un número entonces la otra magnitud con el mismo número pero dividido entre la constante por eso era directa, además la inversa que dependía una de otra. Y había una en lo que son los problemas se manejaba como compuesta, donde teníamos que encontrar valores y teníamos que buscarlos a partir de la sustitución (PF2).

Aunque no se explica claramente la proporcionalidad compuesta en la respuesta anterior, hay indicios de que PF2 identifica que ésta se presenta cuando se trabajó «la sustitución» en las últimas tareas con tres magnitudes en la mezcla de petróleos y donde se sustituyó el valor numérico por el manejo de literales. Además de los casos enunciados, PF6 no logra identificar las relaciones de proporcionalidad implícitas en la situación petróleo, manifestó que no recordaba esa tipología.

A partir de los datos anteriores, se puede deducir que la mayoría de los profesores (siete de ocho) identifica el significado y la funcionalidad de la proporcionalidad directa, pero no la inversa ni la compuesta, tal vez porque en las instituciones formadoras de docentes dan poca atención a este tipo de relaciones porque no son abordadas con profundidad en las escuelas primarias.

Por otra parte, cuando se les cuestionó sobre las técnicas empleadas para la resolución de las tareas, las respuestas se diversificaron, tres profesores identificaron tres técnicas, dos identificaron 4 técnicas y tres profesores hasta 5 técnicas. Las técnicas que mencionan con más frecuencia son la multiplicación y la división sin asociarlas con la regla de tres, posiblemente porque las tareas planteadas explicitaban en su mayoría el valor unitario y resultaba innecesario desarrollar el proceso de multiplicación-división propio de la regla de tres. A continuación, el ejemplo de este tipo de respuestas:

—PF1.— Bueno me acuerdo que al principio usábamos la multiplicación, porque era cuando empezábamos, de que si uno cuesta tanto ¿cuánto costará cierta cantidad?, entonces usábamos multiplicación, usamos también lo que fue la regla de tres cuando desconocíamos algún valor, usábamos la división por ejemplo, cuando decíamos que, que si teníamos cierta cantidad de dinero, cuántos podríamos completar, ¿qué más usamos?

—M: ¿Sólo esas?

—PF1.- Si el precio de un barril es tanto, ¿cuál es el costo de tantos?, bueno sí, fue multiplicación, aunque por ejemplo yo usé divisiones cuando teníamos que sacar el precio de una fracción por ejemplo, también usé decimal, porque decía si en un entero hay cuatro cuartos pero sólo voy a pagar lo de tres cuartos, entonces hacía una división para saber a cuánto equivalía cada cuarto, bueno la regla de tres cuando fuimos llegando al concepto de proporcionalidad, porque por ejemplo decíamos, si con cuatrocientos cincuenta ajustamos tanto, entonces luego nos está preguntando que con novecientos cuánto ajustamos, es el doble, entonces sólo lo multiplico por dos y era ir doblando cantidades. Pues es que según lo veo y según lo recuerdo la mayoría de las veces utilizamos los mismos procedimientos, ya al final llegamos a lo que era el álgebra, por medio de cierta fórmula era que obteníamos el valor desconocido.

Como se puede apreciar la multiplicación y la división son las principales técnicas identificadas en tareas asociadas con la proporcionalidad. El trayecto «vivi-do» para llegar al modelo algebraico, como lo enuncia PF1, no se modificó sólo cambió el tipo de números (enteros y fraccionarios) y aunque menciona la regla de tres de manera tangencial, el valor unitario como operador multiplicativo también es el que más identifican.

En segundo lugar, los profesores en formación aludieron a la regla de tres como una de las técnicas que dio continuidad a las anteriores, sobre todo la identificaron al encontrar el valor faltante en las tablas de variación proporcional, tal como lo especifica PF4:

Empezamos con multiplicaciones para saber cuánto cuestan tantos barriles con el precio de uno y luego seguimos con división, a partir de esta multiplicación la dividíamos entre tantos barriles o cuando hacíamos las mezclas. Utilizamos mucho la regla de tres para resolver gráficas y dar con los costos en las tablas de variación. Y bueno también usamos eso de razones entre dos cantidades. Los últimos problemas ya fueron más algebraicos de buscar incógnitas ya un poco más complejo pues se trataba de despejar variables (PF4).

A diferencia de PF1, PF4 indica las técnicas que se implementaron a lo largo del REI y al hablar de la multiplicación y la división refiere implícitamente al uso del

valor unitario como operador multiplicativo, pero además expresa la transición entre una técnica y otra al ejemplificar su uso en las tareas correspondientes.

Por su parte, PF2 hace una descripción de las técnicas sin mencionar el uso de operaciones básicas, él hace un recorrido que inicia con la regla de tres y termina en las últimas tareas resueltas con expresiones algebraicas:

Bueno una estrategia fue la regla de tres, otra estrategia eran las tablas de proporcionalidad, otra era más directamente por ejemplo cuando en una tabla no utilicé regla de tres ni tabla sino que sumé un valor y otro y encontré la diferencia para ver cuánto había entre el punto B y el C, esta es otra estrategia, otra fue el método de Gauss y ya el último con la institucionalización fue la expresión algebraica como tal (PF2).

En este caso se observa la ausencia del valor unitario, técnica recurrente en las primeras tareas, lo que pudiera indicar que no fue considerada como técnica asociada a la proporcionalidad o bien que al ser resueltas por la multiplicación y la división, las primeras tareas no fueron vistas como propias del valor unitario. Entre los profesores en formación que mencionaron dos técnicas, uno señala la ecuación y otro la técnica aritmética y la algorítmica, puede decirse que el segundo identifica las que son justificadas por el discurso tecnológico.

Posteriormente, se preguntó a los profesores en formación sobre la pertinencia de la «Situación Petróleo» en la escuela primaria, siete de ellos respondieron que era pertinente y sólo uno comentó que no lo era, lo argumentó de la siguiente manera:

Considero según mis experiencias que no, porque a lo mejor los problemas de las primeras sesiones tal vez sí lo resolverían algunos, pero la verdad ahorita que estoy ahí, si se plantea un problema es muy difícil que se ponga en práctica simplemente con mencionarles el problema, sin darles una explicación o sin analizarlo entre todos, simplemente con plantear el problema es muy complicado que lo resuelvan hasta la primer sesión, tal vez una o dos personas podrían resolver los problemas que realizamos en la primer sesión o segunda, pero ya a partir de ahí no (PF5).

En el argumento anterior se expresa la dificultad de plantear la situación considerando las características del grupo escolar con el cual se encontraba traba-

jando (sexto grado), lo que supone un deslinde del uso posible de técnicas más rudimentarias que pudieran ser dominadas por sus alumnos y con las cuales se podría dar respuesta a las tareas planteadas.

En el caso de quienes afirmaron su pertinencia se encuentra PF6, quien justificó la aplicación de la situación con algunas sugerencias:

Yo creo que sí, nada más que la dificultad sería modificar los números, se supone que en primaria en los grados más altos ya se manejan los decimales y fracciones, porque a nosotros nos causó dificultad las operaciones con los decimales pues está difícil con los niños y la otra parte las expresiones algebraicas a lo mejor también, necesitaríamos bajar de nivel, me parece que la última que trabajamos es una expresión demasiado amplia o extensa para trabajarla con un niño de sexto, no digo que no sea posible, puede trabajarse, pero si a nosotros nos causó dificultades entender el significado de  $x$ , es que está complicado tanto valor por ejemplo en la última que era  $(ax+by)/x+y$  como que de repente te pierdes en algunos momentos entonces sería como esa parte a lo mejor detallarla un poco más simple, pero sí es posible trabajarla en primaria (PF6).

Como se puede observar, las dificultades y situaciones que podrían replantearse tienen que ver con el manejo de la notación decimal y fraccionaria, así como el uso de un modelo algebraico, aunque desde su perspectiva no se elimina la posibilidad de emplear otras técnicas para resolver las tareas de la situación petróleo. Otro caso similar es el de PF8 quien argumentó la necesidad de simplificar la situación en función de los grados escolares donde se planteó:

—PF8. Mmm...sí, quizá no con las mismas palabras, bueno tal vez sí, yo digo que sí hasta en niños de primaria de primer grado. Bueno, se manejaría un lenguaje un poco más acorde a ellos, se les pediría no sé, bueno yo con mis niños de primer grado lo uso así más como en una situación cotidiana, ¿metiendo así exactamente lo mismo del petróleo o cómo el mismo procedimiento?

—M. La situación del petróleo, así como está, tú dirías la puedo llevar a la escuela primaria y si la puedo aplicar, ¿la consideras pertinente?

—PF8. Sí, yo digo que sí, bueno yo lo utilizo como a modo de cuento, una situación didáctica, este... las cantidades no creo que en mi grupo puedan utilizar números tan grandes, sería buscar otras cantidades. Buscar cantidades más peque-

ñas que ellos puedan utilizar, nosotros utilizamos la división con ellos sería como reparto.

En esta respuesta se aprecia que algunos estudiantes toman como referencia la experiencia que han adquirido como profesores y aunque afirman la viabilidad de la situación, consideran la necesidad de hacer ajustes en función de los saberes de los niños. Por su parte PF8 alude al tipo de presentación de la situación, es decir a contextos concretos, manipulables y accesibles a los saberes de los alumnos a quienes se plantearía.

En cuanto a los conceptos matemáticos para ser aprendidos por los niños, identifican tres categorías, la primera en la que se ubicaron tres profesores hace referencia al manejo de las operaciones básicas, un ejemplo de este tipo de respuestas es el siguiente:

Bueno sería como multiplicación, división, sumas, restas, también vendría siendo como encontrar los comunes múltiplos, eso también lo vimos (PF8).

Cabe resaltar que las respuestas dadas por PF8 se distinguen por referirse al trabajo con los primeros grados, espacio donde desarrolla sus prácticas profesionales y más que identificar los conceptos de la «Situación Petróleo», alude a los conceptos que sus alumnos pueden aprender con la misma. En la segunda categoría se ubica la mitad de los profesores en formación quienes identificaron que al igual que ellos, los niños de la escuela primaria abordarían el concepto de proporcionalidad y sus nociones subyacentes.

Proporcionalidad, factor constante, razón, magnitudes cuando es  $x$  y  $y$ , expresiones algebraicas, qué otro concepto podría ser... el de gráfica, implícitamente los ejes  $x$  y  $y$ , pues creo que son los más concretos a lo que tiene que ver con proporcionalidad (PF2).

A diferencia de los casos anteriores, la postura de un profesor en formación es un tanto ambigua al señalar que el concepto a trabajar era una variable:

Una variable, podría ser también que los niños identifiquen que si se modifica el costo automáticamente aumenta la cantidad de petróleo entonces que se vea cómo va aumentando (PF4).

En lo anterior, se habla de la variación proporcional directa, aunque el concepto que se maneja es la noción de variable, posiblemente esta argumentación aludía al trabajo con expresiones algebraicas.

Siguiendo con la implementación de la situación en la escuela primaria, se cuestionó a los profesores en formación acerca de las posibles técnicas que pudieran ser utilizadas por los niños. La mitad de los profesores consideran que podrían usar menos de tres técnicas, la otra mitad señala entre cuatro y siete técnicas. Dos ejemplos del primer caso es el que se muestra a continuación:

Pues es que los niños son muy impredecibles, de repente si les damos un problema es decir cómo lo resuelven puede ser que hagan por ejemplo, en el problema del costo de cuatro barriles puede ser que dibujen los cuatro barriles, le pongan el precio y lo sumen o sea de repente salen con procedimientos así, entonces no sé, pueden ser dibujitos, operaciones (PF5).

Pues por ejemplo auxiliarse de fichas para contar, por ejemplo los niños pequeños utilizan fichas, ábacos, no sé, llenado de tablas (PF8).

En los ejemplos anteriores se observa una tendencia, el empleo de técnicas informales cuyo uso se atribuye a los niños pequeños, nuevamente piensan en la técnica en función de los alumnos más que derivada de la tarea en sí. Entre los profesores que mencionan más de tres técnicas, se ubican quienes hacen referencia a las técnicas que derivan de las tareas como tal, es decir técnicas propias de la proporcionalidad:

Bueno la primera sería la básica, la multiplicación y división, luego sería irnos a un segundo nivel lo que es la regla de tres o sea una de las formas más sencillas de ver lo que es la proporcionalidad, de tanto equivale a tanto, otra cosa para ver también fácil son las equivalencias, por ejemplo tal fracción me da qué decimal y luego ya trabajar equivalencias de otra forma, se empieza a trabajar decimales y fracciones entonces es bueno decir un  $\frac{1}{3}$  es a 0.33 del entero y ver esa parte de equivalencias a partir de eso yo creo que es posible ir adentrándose a lo que son las expresiones algebraicas de un modo más conciso o sea más de me va a resultar  $b+c$  por ejemplo  $b$  vale tanto,  $c$  vale tanto entonces cuánto va resultar, es decir algo sencillo no tan complicado (PF6).

En este caso más que señalar las técnicas que utilizarían los alumnos de la escuela primaria, se alude a las técnicas que el profesor en formación desarrolló en el primer módulo, pero establece ciertos ajustes como enseñante, esto es, plantea modificaciones que pueden facilitar su manejo en la escuela primaria.

A diferencia del ejemplo anterior, PF2 hace un recorrido por las tareas que conforman la «Situación Petróleo» pero vista desde la perspectiva de lo que harían los alumnos de la escuela primaria:

Pues primeramente lo resolverían con sus propios medios o métodos, posteriormente si se socializara, se sacaría una manera más convencional o más sencilla de resolver el problema y ahí comenzarían a entender que a lo mejor hay un método más rápido o más entendible para ellos en vez de las incógnitas con las que se cuenta. Ya después pienso que sí utilizarían la regla de tres porque es algo muy rápido o que es algo que se le está enseñando a los niños un poco más atrás, desde quinto y sexto, yo creo que esa regla de tres la utilizarían en la tabla, después de la tabla tendrían que encontrar la relación que hay entre el costo y el número de barriles bueno en dado caso que esa fuera la pregunta y conjuntamente tendría que ver cómo se le haría para esos números suplirlos con expresiones algebraicas (PF2).

En la postura de profesor analista se explicitan las posibles técnicas que emplearían los alumnos de la escuela primaria, esta caracterización de técnicas está determinada por la experiencia obtenida durante sus prácticas profesionales. Algo que resulta interesante en este cuestionamiento es que en su rol de profesores se inclinan hacia la recuperación de técnicas informales que pueden ser generalizables en sus alumnos y no consideran aquellas que corresponden a la proporcionalidad como praxeología.

También se les cuestionó sobre el objetivo que tendría trabajar esas técnicas en la escuela primaria mediante una situación como la del petróleo, en este caso se pretendía conocer si los profesores en formación habían identificado que la situación petróleo generaba la evolución de técnicas rutinarias hacia técnicas más especializadas. Se encontraron tres categorías de respuestas: como mecanismo de ejercitamiento (pero con significado), como descubrimiento de nuevas técnicas y como evolución de las mismas. En la primera categoría se ubicó sólo un profesor en formación quien argumentó lo siguiente:

PF4. Podría ser que ejerciten operaciones y que se vayan encaminando más a lo algebraico, que entienden el porqué, yo en la primaria por ejemplo no sabía que significaba  $x$  y  $y$ , de dónde salió esa incógnita, con esta situación si se observa para que sirve una cosa y otra las multiplicaciones que vimos al principio y las divisiones que las utilizamos para una regla de tres.

En el fragmento anterior se aprecia la idea de que el objetivo de trabajar esas técnicas es que los alumnos de la escuela primaria ejerciten las operaciones básicas, lo que significaría un planteamiento de tareas para la aplicación de técnicas, no obstante PF4 también ofrece una justificación basada en la idea de significado, sobre todo en lo que al modelo algebraico se refiere. En la segunda categoría se ubican tres profesores en formación quienes afirmaron que el propósito de trabajar esa situación era que los alumnos descubrieran diversas formas de solucionar un problema, en este sentido se mueve el siguiente ejemplo:

Pues que ellos descubran nuevas formas para resolver ciertos problemas, que vean que no hay sólo un procedimiento y pues ya ir acercándolos a este tipo de temas (PF1).

Afirmaciones como la anterior muestran que los profesores en formación tienen la idea de que a través de este tipo de tareas los alumnos podrán identificar que un problema se resuelve a través de diversas técnicas y que una vez discutidas y validadas es posible el trabajo con un concepto matemático. Estas ideas derivan de los discursos teóricos que fundamentan las praxeologías didácticas en las instituciones formadoras de docentes.

Por su parte, cuatro profesores identifican que el propósito de trabajar dichas técnicas alude a la praxeología matemática, es decir que los alumnos puedan evolucionar hacia técnicas más elaboradas, como lo afirma PF7 a continuación:

Muy probablemente mi objetivo sería que los alumnos no se quedarán en la idea de que todo se resuelve con simples operaciones básicas y que al final de la suma, la resta, la multiplicación y la división hay una combinación de todas de ellas para llegar a algo más avanzado podría decir a una ecuación, tal vez no les mencionaría yo una ecuación como tal sino trataría de que llegaran a ese punto para tratar de diseñar una ecuación u otras fórmulas en las que se puedan basar para resolver un problema de este tipo (PF7).



La mitad de los profesores en formación logra identificar que la intención de proponer ciertas tareas a partir de una situación generatriz, conlleva a la búsqueda de una técnica general para cierto tipo de tareas, con lo cual se torna más económico y eficiente su empleo.

El último cuestionamiento de la tarea T2.1 buscaba la recapitulación y validación de los argumentos expresados por los profesores en formación, por lo cual se preguntó sobre el objetivo de estudiar esta situación como estudiantes de una escuela normal; en este caso las respuestas se diversificaron, cinco profesores dieron respuestas diferentes:

- Entender un concepto progresivamente (PF1).
- Encontrar diversas estrategias de resolución (PF3).
- Ver el proceso de resolución de un problema (PF4).
- Identificar problemas de proporcionalidad (PF6).
- Encontrar sentido al Álgebra (PF7).

Aunque las respuestas aluden a diversos propósitos el objetivo primordial era que los profesores en formación evolucionaran de las técnicas del modelo aritmético hacia técnicas más generalizables como las del modelo algebraico. Los otros tres profesores en formación la vieron como una oportunidad o un «ejemplo» sobre cómo enseñar, tal es el caso de PF2, quien argumentó lo siguiente:

Ver cómo se puede llevar a los alumnos de la mano desde lo más general hasta lo que ya es un pensamiento más formal partiendo desde lo que ellos saben y para saber cómo son las etapas de las situaciones didácticas, primero pues la parte de acción luego la socialización y luego ya institucionalizamos los conceptos (PF2).

A partir del análisis del REI vivido se observa que los profesores en formación se asumen como enseñantes, si bien en ciertos casos se manifiestan algunas dificultades, como cuando identifican los tipos de relación proporcional, en su mayoría identifican aspectos matemáticos, esto es, conceptos y técnicas vinculadas con la proporcionalidad, así como su manejo en la escuela primaria.

Con los datos de este primer encuentro y del análisis praxeológico matemático, se observan indicios de una praxeología didáctica establecidos a partir de la revisión del REI para el estudio de la proporcionalidad. Es evidente que los

profesores en formación identifican ciertas tareas que remiten a una institución como la educación primaria y que dicha institución privilegia el estudio y uso de una(s) técnica(s) determinadas. A decir de los profesores en formación, esas restricciones institucionales son las que limitan o favorecen la persistencia de una técnica y el planteamiento de ciertas tareas, es evidente que la regla de tres y el valor unitario como operador multiplicativo son dos técnicas que los alumnos de la escuela primaria pueden emplear para dar respuesta a tareas referidas a la proporcionalidad, además que desde su perspectiva, el trabajo con modelos algebraicos en la educación primaria no es factible dado que la limitación institucional promueve su justificación tecnológico-teórica hasta la educación secundaria.

Por las razones anteriores, es comprensible que los profesores en formación argumenten que los tipos de tarea se vuelven factibles cuando los alumnos dispongan de algún tipo de técnica y ciertos discursos tecnológicos que le permitan comprender la tarea. En ese sentido las técnicas que pudieran derivar de la implementación de un REI como la «Situación Petróleo» están en función de una actividad en particular. Con este primer análisis se deduce la función que toma el estudio de la proporcionalidad en diferentes instituciones (la Escuela Primaria y la Escuela Normal) y en diversas actividades institucionales (aprender proporcionalidad y aprender a enseñar la proporcionalidad).

## 5.2. LAS REFLEXIONES SOBRE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA PRIMARIA

Desde una perspectiva praxeológica se ha considerado que una de las primeras tareas que tiene un profesor en formación es determinar, a partir de los planteamientos institucionales, el tipo de organizaciones matemáticas que deberá «enseñar», así como los tipos de tareas que puede plantear y el nivel de manejo técnico, tecnológico y teórico con el que puede reconstruir una praxeología.

La dimensión institucional determina la actividad matemático-didáctica de los profesores en formación al establecer las condiciones y restricciones con las que se debe abordar la proporcionalidad en tanto objeto de saber y de enseñanza, por tal motivo, en el segundo momento del  $M_2$  del REI-FP se les pidió realizar un análisis didáctico (praxeológico) de las organizaciones matemáticas que según los programas de estudio de la escuela primaria pueden ser enseñadas, es decir los profesores en formación revisaron y reflexionaron sobre tareas y técnicas en el texto del saber y se les cuestionó sobre los conceptos, técnicas y dificultades que pudieran presentarse en los alumnos de educación primaria

al enfrentarse a tareas vinculadas a la proporcionalidad. De manera particular el análisis se focalizó en quinto y sexto grados de educación primaria, para tal efecto se planteó una pregunta generatriz:

Q.2.2. ¿Qué discurso tecnológico-teórico ( $\theta$ ,  $\Theta$ ) expresan los profesores en formación durante el desarrollo de una tarea (T) relativa al análisis conceptual, estructural y técnico ( $\tau$ ) de la proporcionalidad y su enseñanza en la escuela primaria?

Para dar respuesta a la cuestión anterior la tarea T2.2 planteó la revisión y análisis de dos lecciones de los libros de texto. La primera lección denominada «Botones y camisas» de quinto grado es la primera que aborda el trabajo con la proporcionalidad, mientras que la lección «¡Entra en razón!» de sexto grado constituye la última lección sobre este concepto. En ambos casos se plantearon las mismas preguntas: ¿qué concepto matemático se aborda? ¿Qué tipos de proporcionalidad se incluyen en la lección?, ¿cuál es la tarea principal de la lección?, ¿se sugiere implícita o explícitamente el uso de alguna técnica por parte de los alumnos? ¿qué dificultades pueden enfrentar los alumnos al resolver las tareas planteadas en la lección? y ¿qué deben saber los alumnos para resolver esta lección?

#### *5.2.1. Las reflexiones sobre conceptos, tareas y técnicas*

La enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria inicia de manera formal en quinto grado con el planteamiento de problemas en los que se presentan dos magnitudes que varían de modo proporcional, situación que es modelo de una relación de proporcionalidad según la organización clásica. Generalmente en un problema de proporcionalidad con cuatro cantidades ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x$ ), las dos primeras corresponden a una misma magnitud y las dos últimas se vinculan a una magnitud diferente, una de éstas resulta desconocida, tales magnitudes guardan una relación directa o inversa dependiendo del planteamiento de la situación.

La tarea principal en la lección «Botones y camisas» plantea resolver problemas con tablas de variación proporcional directa, específicamente se trata de encontrar el valor faltante una vez completados los datos, la lección pide dar respuesta a dos cuestionamientos, encontrar el valor de una magnitud desconocida y explicar la técnica empleada para encontrar dicho valor.

# 17

## Botones y camisas

### Consigna

Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

1. Luisa trabaja en una fábrica de camisas. Para cada camisa de adulto se necesitan 15 botones. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten las preguntas.

| Camisas de adulto   |    |   |    |    |     |
|---------------------|----|---|----|----|-----|
| Cantidad de camisas | 1  | 6 | 14 | 75 | 160 |
| Cantidad de botones | 15 |   |    |    |     |

- a) ¿Cuántos botones se necesitan para 25 camisas?

---

- b) ¿Cómo lo supieron?

---

Imagen 66. Botones y camisas. Quinto Grado (SEP, 2013a. p. 45).

El uso de la tabla pretende ayudar a la representación y sistematización de los resultados, dado que los números expresados en la cantidad de camisas no guardan una relación observable entre sí que permita desarrollar una técnica diferente (duplicar cantidades, uso de múltiplos, entre otras) al valor unitario como multiplicador. Al ser la primera lección formal sobre proporcionalidad, se aprecia la simplificación de la tarea, es decir se da el valor unitario (cantidad de botones de una camisa) y la multiplicación se convierte en la técnica más viable para la resolución.

Si bien los alumnos de quinto grado pueden usar diversas técnicas (suma iterada, sumas parciales o incluso agrupamientos), la intención de la lección es establecer el uso del valor unitario como operador multiplicativo en tanto antecedente de la regla de tres, situación visible con el planteamiento de la segunda tarea, que nuevamente se apoya en una tabla de variación proporcional como la siguiente:

2. Luisa utilizó 96 botones en ocho camisas para niño. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten la pregunta.

| Camisas de niño     |   |    |    |      |     |
|---------------------|---|----|----|------|-----|
| Cantidad de camisas | 1 | 8  | 10 |      | 200 |
| Cantidad de botones |   | 96 |    | 1440 |     |

¿Qué puede hacer Luisa para saber cuántos botones se necesitan para 140 camisas de niño?

---

---

Imagen 67. Segunda tarea formal de Botones y camisas (SEP, 2013a, p.46).

En la imagen anterior puede observarse un tipo de tareas, como hay muchas en el libro, que pueden resolverse con la regla de tres o el valor unitario, técnicas de la organización clásica de la proporcionalidad. Como se puede apreciar también, la tabla puede servir de apoyo para la formalización de la regla de tres, aunque los alumnos pueden usar la división para encontrar el valor unitario y usarlo como operador multiplicativo (en 1440 botones), en este caso al tratarse de magnitudes que son múltiplos (número de camisas 1, 10 y 200), es posible que los alumnos puedan simplificar la solución a través de las operaciones básicas. Luego de identificar el valor unitario, con el último cuestionamiento se busca la explicación de la técnica empleada, es a partir de dicha pregunta que la lección sirve como preámbulo para la formalización de la regla de tres como técnica eficiente y económica.

Una vez que los profesores en formación revisaron esta lección, se les aplicó una entrevista semiestructurada para observar si identificaban los conceptos, tareas y técnicas expresadas en ella, se inició preguntando sobre el tipo de proporcionalidad o concepto implicado en la lección, seis de los ocho profesores en formación lo identificaron de la siguiente manera:

Es proporcionalidad directa porque siempre el número depende de... en las camisas todos los botones van a ir aumentando según aumenta la cantidad de camisas (PF2).

La mayoría de los profesores en formación reconocen las tareas en las que dos tipos de magnitudes aumentan una en función de la otra, aunque sería necesario

precisar que dicho aumento deberá darse con la misma proporción en ambas magnitudes, hecho que no es del todo claro en el argumento de PF2. Por su parte PF3 menciona que se trabaja tanto la proporcionalidad directa como la inversa:

—PF3. Pues por ejemplo, serían las dos, la directa y la inversa, en la primera tabla nos dan la cantidad de camisas y la cantidad de botones, aquí por ejemplo es proporcionalidad directa porque nos menciona que de una camisa se necesitan quince botones, la proporcionalidad directa sería igual, encontrar los resultados a partir de estos dos datos y acá ya nos complican un poquito más al niño, le cambian los datos, entonces tienen que encontrar otro dato y modificar sus procesos cognitivos para encontrar ese resultado.

—M. Entonces ¿en la segunda tabla el tipo de proporcionalidad es diferente?

—PF3. Sería inversa. Por ese mismo cambio, que está, aquí al principio les daba el número de camisas y les pedía el número de botones, pero ahora le pide el número de botones, la cantidad de camisas que se necesitan, entonces como es otro proceso inverso, tienen que encontrar el resultado a partir del resultado que ellos antes tenían, antes tenían X para encontrar Y, ahora tienen Y para encontrar X.

—M. ¿Qué diferencia encuentras entre la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa?

—PF3. Que depende de la consigna que se esté dando a los niños, de los procedimientos iniciales y luego después de los procedimientos secundarios que se están dando.

Como se puede observar, PF3 no tiene una comprensión clara de los tipos de proporcionalidad, dado que considera que la relación entre el valor faltante y los valores conocidos es lo que determina su significado y que la diferencia entre una y otra radica en el planteamiento de la tarea y no en la relación de proporción que se da entre dos magnitudes (aumento-aumento, aumento-disminución). Por otro lado, como se observa en el siguiente fragmento, hay quienes no logran identificar el tipo de proporcionalidad implicado en la tarea.

—PF8. Bueno yo le entendí así, que a partir de un dato podemos ir como en escalerita encontrando las siguientes ¿sí, no? Es que no sé cómo explicar, yo digo que este es directo (se refiere a la primera tabla).

—M. ¿Consideras que en toda la lección se trabaja sólo la proporcionalidad directa?

—PF8. No, también la compuesta, porque, bueno creo que aquí es compuesta, porque tenemos aquí, o ¿no será compuesta? Ahí es que no me acuerdo como es la definición de cada una, pero esta es diferente porque aquí ya buscas la cantidad de arriba.

—M. Pero ¿eso la convierte en compuesta?

—PF8. No, porque en la compuesta, tenemos dos cantidades y se busca una tercera, pero por ejemplo en el problema del Olmeca teníamos dos precios y ya buscábamos una tercera cosa que era diferente.

—M. ¿Y aquí?

—PF8. Entonces es directa e ¿inversa?

—M. Mmm... ¿qué diferencia hay entre una y otra?

—PF8. Ay maestra no me acuerdo.

En la primera parte de su respuesta afirma «que a partir de un dato podemos ir como en escalerita encontrando los siguientes», con ello parece indicar ciertas nociones de la proporcionalidad directa, aunque no señala un aumento proporcional de las magnitudes, también se aprecia que implícitamente identifica una tarea del tipo valor faltante pero no logra explicitarla. En la segunda tarea de la lección es evidente su desconcierto sobre el significado de la proporcionalidad inversa y compuesta, aunque al tratarse de una proporcionalidad directa se puede deducir que no tiene claridad para identificar el tipo de tareas en las que se hace presente.

No obstante esta situación, en este primer encuentro con el texto del saber, se aprecia que la mayoría de los profesores en formación identifican un elemento que caracteriza a la proporcionalidad, la relación entre magnitudes, aunque también se aprecia la necesidad de reafirmar que dicha relación deberá ser proporcional, esta situación habla de un primer dominio de aquello que deberá ser formalizado y considerado para las tareas de los alumnos de quinto grado.

En este dominio conceptual resulta relevante que el profesor identifique la tarea que se plantea en el libro de texto, dado que a partir de ella puede inferir las tareas que podría plantear para complementar la lección, por ello enseguida se les se cuestionó sobre las tareas principales a las que el alumno de quinto grado deberá enfrentarse al resolver esta lección. Los ocho profesores identifican la tarea, aunque dan respuestas parcialmente diferentes, tres afirman que se trata

de buscar un valor faltante, otros tres señalan que la tarea es llenar tablas y dos más hacen referencia a la resolución de un problema. En la primera categoría de respuestas, como se muestra en el siguiente fragmento, los profesores en formación refirieron la búsqueda del valor faltante.

Bueno lo que les pide aquí es encontrar los valores faltantes, te da los valores principales, en el primero te dice Luis para una camisa ocupa 15 botones entonces cuántos va necesitar para 6 para 14 y así, entonces ellos tienen que encontrar el número de botones que se ocupa para cada uno de los casos podría ser eso, y en la segunda parte cambia un poco no te da lo que es un valor unitario es decir no te dice una camisa tiene tantos botones, sino que te dice son ocho camisas y ocupó 96 botones, entonces encuentra primero cuánto ocupa una camisa pero luego de eso ya en diez camisas te pide que saques cuantas camisas hizo con 1440 botones o sea se cambia el valor que se pide en el primero eran todos botones y ahora no ahora se pide el número de camisas a partir del número de botones (PF6).

Como se puede apreciar, PF6 identifica el tipo de tareas planteadas en la lección, señala que aunque ambas tareas corresponden al valor faltante hay variables didácticas que las distinguen y que se verán reflejadas en el momento de la resolución. Por su parte, quienes refirieron que la tarea era el llenado de tablas dieron respuestas como la que se muestra enseguida.

Bueno primero el trabajo colaborativo que es entre compañeros, luego es el llenado de tablas y se busca una cantidad total de una parte de las variables que sin antes resolver la tabla no pueden contestar porque no saben qué hay entre dichos números (PF2).

Como se puede observar, aunque las tareas implican completar dos tablas, el tipo de tarea que subyace es encontrar valores faltantes, situación que parece afirmar PF2 cuando menciona que «se busca una cantidad total de una parte de las variables», no obstante esta consideración, el resto de su respuesta resulta poco clara al referir que «no saben que hay entre dichos números», por tal motivo se deduce que en este caso identificar el propósito de las tareas es difícil para el profesor en formación. Quienes argumentaron que la tarea consistía en resolver problemas dan respuestas como la de PF5:



Pues son dos problemas un poquito diferentes, en el primero ya está dado por un valor único o sea por una camisa ¿cuántos botones? serían quince, entonces lo único que tienen que hacer es multiplicar los quince por seis camisas, quince por catorce ese es un tipo de problema y el otro es poquito fácil sólo que al inicio deben de hacer otra cosa para saber por el valor único, nos da que son 96 botones por ocho camisas, entonces lo que tendríamos que hacer es dividir 96 entre 8 para saber cuántos botones son en una camisa y a partir de ahí ya se obtienen los demás valores simplemente multiplicándolo como el problema anterior para saber cuántos van a ser (PF5).

Con los fragmentos anteriores se han podido observar las dificultades de los profesores en formación para identificar las tareas con base en el tipo de relación de las magnitudes, por esta razón una segunda parte de la entrevista buscaba explorar sus inferencias respecto a las técnicas que los niños podrían usar para resolverlas. Se esperaba que identificaran técnicas como el valor faltante, el método de reducción a la unidad y la regla de tres, aunque no se descartaba que mencionaran un método aditivo. Por ello se les cuestionó si identificaban la técnica que deberían formalizar con los alumnos de quinto grado y la mayoría (cinco) señaló que era la regla de tres, hecho contrastante si se recuerda que la lección planteaba un trayecto desde el valor unitario como operador multiplicativo hasta la regla de tres, un ejemplo de este tipo de respuesta se muestra a continuación.

—PF7. El valor unitario. Porque aquí está de hecho. Mmm... Yo creo que también la regla de tres porque al tener el valor unitario ya nada más lo multiplicas.

—M. ¿Cuál es la relación entre el valor unitario y la regla de tres?

—PF7. El valor unitario pues es el de la unidad, la regla de tres hay que dividir el total entre el número de productos y multiplicarlo por el número que se quiere, pero como el número de productos que está aquí es el valor unitario pues se ahorra ese ejercicio aunque en realidad se va a la regla de tres.

Se puede apreciar que PF7 identifica el recorrido que se plantea en la lección, primero aparece el valor unitario y posteriormente se replantea para dar paso a la regla de tres, que podrá ser formalizada a partir de esa tarea o bien de otras que el profesor en formación puede elegir.

Dos profesores en formación aludieron a elementos vinculados con la proporcionalidad más que a la técnica, uno de ellos señaló que la técnica sería la proporcionalidad directa en tanto que aumenta una cantidad y aumenta la otra, el otro profesor argumentó que la técnica era la estrategia que ayudaría a resolver el problema, pero no la señaló explícitamente.

Por su parte, PF8 indicó que la multiplicación era la técnica principal para resolver las tareas y cuando se le cuestiona sobre la técnica presente en el libro de texto describe el proceso que seguiría con los alumnos para su utilización.

Multiplicar, si ya nos están dando una cantidad de botones decirles a los niños, bueno con una camisa ustedes utilizan quince botones ahora para seis, o sea se tendría que multiplicar, ¿qué haríamos? Siempre hay niños que dicen multiplicación y ¿qué vamos a multiplicar? ¿Qué números vamos a multiplicar? Pues no sé tal vez si nadie contesta decirles que por cada camisa son quince botones, por dos camisas ¿cuántos serían? No sé, como aquí se brinca luego del uno hasta el seis quizá llevárnosla así de una y dos cuántos y tres cuántas y así como que ellos mismos vayan fijándose que se necesita la multiplicación, quizá al principio podríamos usar las sumas, quince más quince, dos veces, dos camisas (PF8).

Como se puede apreciar, PF8 describe todo el proceso y aunque plantea las posibles acciones de los alumnos no identifica la regla de tres como técnica formal. Si bien esta situación sólo se dio en este caso, en términos generales puede afirmarse que la mayoría de los profesores en formación identifican la técnica implícita en la tarea.

Ahora bien, considerando que la proporcionalidad en la educación primaria implica una gran diversidad de saberes aritméticos (razón, proporción, fracciones, números decimales, porcentajes, entre otros), también se les cuestionó sobre los saberes que necesitan los alumnos de quinto grado para resolver la lección. Los ocho profesores en formación afirmaron que era necesaria la multiplicación y la división porque dichas operaciones permitirían solucionar la tarea aún sin el conocimiento formal de las técnicas que subyacen al valor faltante. A continuación, un ejemplo de las respuestas a esta cuestión.

Este... ¿de antecedentes básicos? pues lo que es la multiplicación y la división creo que van a ser las operaciones prioritarias para poder desarrollar lo que es una regla

de tres y realmente lo que ya sabemos los números, las tablas y todos esos conceptos que van implícitos en las operaciones (PF6).

En todos los casos, los profesores en formación argumentaron que el manejo de las operaciones básicas, principalmente la multiplicación y la división constituyen los saberes básicos con los que el alumno de quinto grado puede dar respuesta a la lección, siete de los profesores también expresaron que la multiplicación y la división eran el antecedente para la comprensión de la regla de tres.

Por último, se les cuestionó sobre las principales dificultades que podrían tener los alumnos de quinto grado para resolver las tareas planteadas. Algunos señalaron la falta de conocimientos previos (1), que no sepan las tablas de multiplicar y la división (1), la no comprensión semántica (3) y sintáctica (3) en la resolución. Entre las respuestas que señalan la no comprensión semántica del problema se encuentra la siguiente.

Bueno yo pienso que el problema les muestra cantidades muy separadas por ejemplo empieza 1, 6, 14 y luego ya los pasó hasta el 75, los niños a lo mejor lo van a querer sumar, no van a comprender lo que les dice el problema, pero cuando ven que son cantidades más elevadas tienen que usar otros procedimientos (PF4).

Por su parte, quienes hablaron de la comprensión sintáctica, se refieren al dominio de la regla de tres, así lo expresa PF1 a continuación:

Si lo que queremos trabajar es una regla de tres a lo mejor una dificultad podría ser el acomodo de los números, que digan por cuál se multiplica, por cuál se divide, que el procedimiento no lo realicen de la manera correcta (PF1).

En este último fragmento se puede observar que los profesores en formación consideran que la dificultad se haría presente una vez institucionalizada la regla de tres más que con las tareas planteadas, cabe señalar que al ser la primera lección que aborda la proporcionalidad, el dominio de la regla de tres es posterior a la resolución de las tareas de esta lección.

En términos generales se puede decir que la mayoría de los profesores en formación identifican los conceptos, las tareas y las técnicas que conforman esta lección, en su papel de profesores «analistas» hacen un análisis pertinente que

ha derivado de la reflexión sobre el REI que «vivieron» como «aprendices de matemáticas» para tener su primera aproximación al estudio de la enseñanza de la proporcionalidad.

### *5.2.2. Las reflexiones sobre las técnicas y sus dificultades*

Las determinaciones que toma una institución sobre el estudio de la proporcionalidad expresan ciertas sujeciones de lo que el profesor en formación puede abordar en su clase, las praxeologías matemáticas instituidas en la escuela primaria implican ciertas transposiciones que regulan el uso y la transmisión de determinadas organizaciones matemáticas, esto se hace más evidente en el discurso tecnológico generado desde la organización clásica y el modelo aritmético.

En el libro de texto de sexto grado se incluye la lección «¡Entra en razón!» (SEP, 2013b) que es la última que aborda aspectos relacionados con la proporcionalidad y contiene dos tareas, ambas giran en torno a la razón fraccionaria entre dos cantidades de igual o diferente magnitud. De modo que, al ser parte de uno de los significados de las fracciones, la razón representa un par ordenado de números enteros asociados a la relación parte-todo.

Un rasgo que llama la atención en esta tarea (ver imagen siguiente) es que el planteamiento de la primera cuestión (inciso a) tiene un error que impide resolver la tarea. La consigna plantea ¿En cuál de los dos poblados hay un número mayor de hablantes de una lengua distinta del español? No puede contestarse porque se ignora cuántas personas habitan cada poblado, la lección no proporciona ese dicho dato, en tal caso la pregunta pudiera haber sido: Proporcionalmente, ¿en cuál de los dos poblados hay un número mayor de hablantes de una lengua distinta del español? Es importante para este análisis visualizar si los estudiantes identifican el error descrito en la lección del libro de texto y de ello derivan alguna técnica particular.

En la segunda cuestión (inciso b) básicamente se pide una comparación de razones fraccionarias, esto es, determinar ¿cuál fracción es mayor,  $\frac{3}{4}$  o  $\frac{5}{7}$ ? Las técnicas posibles para resolverla son: la búsqueda de fracciones equivalentes con denominador común, la búsqueda del mínimo común denominador para encontrar fracciones equivalentes y, los «productos cruzados» para determinar cuál de las dos fracciones equivalentes tendría el numerador mayor (SEP, 2013b).

*Consigna*

Resuelvan en parejas los siguientes problemas.

1. En dos localidades hay habitantes que hablan una lengua distinta al español: en El Cerrito, son 3 de cada 4, mientras que en El Paseo son 5 de cada 7.

a) ¿En cuál de los dos poblados hay un número mayor de hablantes de una lengua distinta del español?

---

b) ¿De cuánto es la diferencia entre las dos localidades?

---

Imagen 68. Última lección de proporcionalidad en la escuela primaria (SEP, 2013b, p.151).

Otra técnica podría ser el uso de dos tablas en las que los alumnos fueran comparando el número de hablantes con una lengua distinta al español hasta llegar al número 28. Si bien el uso de porcentaje en tanto noción inscrita en la relación parte-todo de las fracciones, pudiera ser una técnica plausible para la resolución de esta tarea, la equivalencia en porcentaje de cada razón tendría dificultades dado que mientras para  $\frac{3}{4}$  es 75% (0.75), para  $\frac{5}{7}$  sería un número demasiado extenso (0.7142857142857143) lo que dificultaría su operatoria.

En la siguiente imagen puede observarse la segunda tarea, igual que la anterior tiene dos cuestiones que también giran en torno de la comparación de razones: a) reconocer la razón mayor y b) calcular la diferencia entre razones. La única diferencia con la tarea anterior es que en ésta se cambia el orden de los datos, en vez de decir «3 de cada 4», se dice «de los 40 aprobaron 32».

2. En una escuela primaria del poblado El Cerrito, de los 30 alumnos del grupo 6º A, 18 aprobaron el examen de matemáticas, mientras que de los 40 alumnos de 6º B aprobaron 32.

a) De acuerdo con esos resultados, ¿qué grupo tuvo mejor aprovechamiento en matemáticas?

---

b) ¿De cuánto es la diferencia en el aprovechamiento de los grupos?

---

Imagen 69. Última tarea formal de proporcionalidad (SEP, 2013b, p.151).

En este caso la técnica más simple es reducir las fracciones a su mínima expresión para que la comparación se realice entre  $3/5$  y  $4/5$ , con lo cual se contestarían fácilmente ambas preguntas, la relativa a cuál es la razón más grande y la segunda que pide la diferencia entre razones.

En lo que sigue se presentan las respuestas que los profesores en formación dieron ante el cuestionamiento *¿cuáles conceptos matemáticos asociados a la proporcionalidad se abordaban en la lección ¿Entra en razón!?* Tres de los ocho profesores en formación identificaron la comparación de razones como concepto central de la lección, lo expresan de la siguiente manera:

Pues es la razón, porque nos presenta la comparación de dos cantidades, bueno de datos, entonces nos dice hay tres de cada cuatro y cinco de cada siete ahí está una razón cuántos de éstos pertenecen a un grupo y así (PF4).

Son razones porque simplemente en la frase son tres de cada cuatro ya es una fracción como razón (PF7).

Otro profesor en formación fue más específico, hace referencia a las fracciones.

Aquí puedo observar las fracciones, para que ellos encuentren los resultados, más bien la fracción como razón. Porque... aquí los niños tienen que razonar cuál es la cantidad que más significa para encontrar y después se tiene que hacer una comparación entre cada una para poder encontrar un resultado (PF3).

Como se puede apreciar, identifican el concepto central de la lección, algunos comentan que incluso el nombre de la lección aludía al contenido de la misma y que las tareas planteadas remitían directamente a una comparación de dos magnitudes en las que se hace presente la relación parte-todo. Por su parte, dos profesores en formación argumentan que el concepto a trabajar es el porcentaje tal como lo explicita PF6 en su respuesta:

Pues el porcentaje porque por ejemplo te está pidiendo tres de cuatro o cinco de siete entonces ellos deben tener claro que el 4 y 7 van a hacer como un total, entonces tienen que representarlo algo así como si cuatro es igual a un entero que al porcentaje sería al 100 y si cuatro es al 100% es un total que estoy metiendo como límite para poder sacar entonces cuánto sería tres es decir cuánto me corresponde partir del cuatro (PF6).

En el fragmento anterior se aprecia la asociación que hacen entre el significado parte-todo de la fracción y el porcentaje, dado que el 100% constituye el todo del que se retoma una parte. Por otro lado, dos profesores en formación no hacen referencia a un concepto matemático como tal sino a la tarea que se plantea, señalan que se trata de igualar cantidades, aunque uno de ellos hace referencia al factor común. «se tiene que buscar el factor común, igualar las cantidades porque si no se van a confundir» (PF2). Posiblemente en lugar del factor común quiere hacer referencia al común denominador o al mínimo común múltiplo.

Frente a esta primera pregunta se observa que los profesores en formación no detectan el error de la primera cuestión de la lección, aunque respecto al tipo de tareas planteadas en la lección, la mayoría (5) refrieron directamente a la comparación de fracciones:

—PF6. Bueno creo que es a partir de la proporción o números desconocidos se adentra en lo que son los problemas o sea los mete a una situación problema que te pide comparar o encontrar números faltantes para poder compararlo con otro y llegar a un resultado. Por ejemplo aquí se comparan dos magnitudes que serían fracciones, por ejemplo de este total tengo tantas y de este total tengo tantas pero son números desconocidos, o sea por ejemplo 7 y 4 en este caso, son totales pero son distintos, entonces tengo que saber cuál de los dos es mayor, tengo cuatro pero sólo me dan tres y tengo siete pero sólo me dan cinco entonces debo decirlo direc-

tamente en cuál de los dos tengo más, no es posible, necesito sacar un número que me diga aquí hay más hablantes que acá. Entonces es como ese problema, no tanto como en quinto que nada más era encontrar un valor desconocido a partir de tales números que te arrojan.

Al parecer esta idea deriva del manejo que el programa escolar hace de la razón, dado que la considera como elemento de las fracciones y no se hace la distinción de la razón como noción y como significado de las fracciones, este hecho se observa cuando el valor de la razón 3 de cada 4 o 5 de cada 7 no puede entenderse en términos numéricos, lo que indica que el trabajo con este tipo de razones resulta de gran relevancia para comparar fracciones como  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{5}{7}$ . Al parecer PF6 detecta la necesidad de conocer el número total de personas que habitan un poblado para realizar la comparación cuando señala que «no es posible, necesito sacar un número que me diga aquí hay más hablantes que acá», no obstante que identifica el error en el libro de texto, el estudiante no profundiza en esta situación.

Otra respuesta similar a la anterior es la de PF7 quien argumenta que se trata de encontrar la diferencia entre dos cantidades, aunque no las considera como razones o fracciones, sino que trata de identificar la diferencia entre dos magnitudes. Por su parte dos profesores en formación argumentaron que la tarea se centraba en la resolución de problemas, uno de ellos añadió que se trataba de sacar el porcentaje o la razón en cada problema para saber cuál es mayor o menor en porcentaje.

Por otro lado, cuando se les cuestionó sobre *la técnica con la que se resolvería*, la mayoría (cuatro) señaló la comparación de fracciones y el mínimo común múltiplo, mismas que se encuentran directamente relacionadas entre sí, tal como lo hizo PF7 en el siguiente fragmento:

—PF7. Sería como comparar fracciones porque nos está preguntando cuál de ambos tiene mayor número de hablantes, pero al decir tres de cuatro pues ya es una fracción, tres sobre cuatro y si nos dice cuál es más tres de cuatro o cinco de siete, entonces ahí nos está preguntando cuál de las dos comparaciones es más amplia y la tienen que comparar para saber cuál de las dos es más amplia.

Por su parte PF3, involucra al mínimo común múltiplo como técnica que permite la comparación de fracciones.



—PF3. Yo creo que la división, primero las fracciones y ya después la división.

—M. ¿La división de fracciones?

—PF3. Mmm, no, primero es obtener las fracciones y ya ver... más bien comparar esas fracciones entre ellas para saber cuál es el dato que se va a comparar.

—M. ¿Cómo se comparan?

—PF3. Este, utilizando el mínimo común múltiplo, máximo común divisor, algo así, para saber cuál es la que está más acercada, por ejemplo aquí les preguntaba el mayor número, entonces van a saber a partir de esas fracciones al ponerlas iguales, o sea en su dividendo y divisor, saber cuál es el que está mayor para poder resolverlo.

Aunque no señalan explícitamente el manejo de fracciones, dos de estos cuatro profesores dicen que la técnica aludía al uso del mínimo común múltiplo para igualar el número de hablantes y hacer la comparación entre las razones de los hablantes. En este caso, tres profesores refieren la necesidad de comparar, pero a través del cálculo de porcentajes.

—PF1. Pues yo pienso que es el porcentaje o hacer comparaciones.

—M. Cuál sería esa técnica para comparar, imagina que tienes un grupo de sexto grado y que ellos tienen que comparar, o bueno en algún momento tú tendrás que institucionalizar alguna técnica para resolver esto ¿cuál sería?

—PF1. Pues es que como no nos maneja el número total de habitantes nada más nos dice que de tantos son tantos, podríamos sacar por ejemplo el porcentaje, de cuatro que porcentaje son tres, y luego de siete que porcentaje son cinco entonces ya ahí veríamos cuál es mayor y cuál es menor.

Como se puede apreciar, PF1 advierte la presencia del «error» en la primera tarea, es decir, que no se incluye el dato de cuántas personas habitan en un poblado y otro y si bien PF1 no lo señala como error propio del texto del saber, sí expresa la necesidad de conocer este dato para determinar la comparación de magnitudes.

Por otro lado, aunque el uso de porcentaje es una técnica eficiente para algunos casos de comparación de magnitudes, cuando se trata de comparar razones fraccionarias esta técnica no es económica dado que las fracciones convertidas a porcentaje son sólo aproximaciones de las magnitudes a comparar, lo que derivaría en un margen de error que volvería a la técnica poco eficiente. En este sentido, PF5 retoma esta idea de comparación, pero desde la idea de razón.

Pues es que no sé, a lo mejor sacar la razón por ejemplo de cada una de las dos situaciones para resolver la pregunta, es que la pregunta no te dice saca el porcentaje de este o la razón de este o la fracción que por ejemplo sería tres cuartos, o sea no dice saque esto y luego ya te preguntamos, no o sea la pregunta te va haciendo que realices tus procedimientos para poder resolverlo entonces no te dice (PF5).

Señala que debe hacerse una comparación de razones, sin embargo se deslinda del uso del porcentaje o de la fracción para dicha comparación, no obstante PF5 deja abierto el uso de la técnica ante la falta de precisión de aquello que debe formalizar. Como se puede observar, la mayoría de los profesores en formación identifican la necesidad de establecer una comparación y expresan una diversidad de técnicas plausibles, algunas más eficientes y económicas que otras, pero en su totalidad asociadas con la tarea de la lección.

Otro aspecto sobre el cual se les cuestionó se refirió a las posibles dificultades para resolver las tareas del libro de texto. Tres profesores en formación argumentaron que ante la comparación de magnitudes era probable que los alumnos dijeran que  $5/7$  era mayor que  $3/5$  al tratarse de cantidades «más grandes» y el resto (cinco) consideran que la dificultad mayor podría ser la escasa comprensión del problema, tal como lo señala PF3 en el siguiente fragmento:

Desde el principio es un reto cognitivo para los alumnos encontrar esa relación que existe entre cada una de las cantidades, porque primero lo tienen que saber expresar matemáticamente en las estrategias, los procedimientos de cómo lo voy a escribir, cómo lo voy a expresar para que mi compañero o el maestro lo entienda, para saber también yo lo que estoy haciendo, cómo expresarlo y cómo lo estoy entendiendo primero para que el otro lo entienda (PF3).

En su respuesta, PF3 infiere ciertas dificultades de comprensión como la representación del problema en términos matemáticos, la técnica adecuada para su resolución y la certeza de su comprensión, esto mismo plantea PF1:

Encontrar la técnica para resolverlos, porque hasta para mí es un tanto difícil de comprender, entonces a lo mejor ellos igual, puede ocurrir que no comprendan bien el problema y luego que no encuentren la técnica para resolverlo y digamos

que si se va a resolver por ejemplo con porcentajes entonces a lo mejor puede haber niños que no sepan cómo (PF1).

Otro profesor en formación señala que operar con fracciones sería lo complejo para que los alumnos pudieran resolver la tarea, lo expresa de la siguiente manera:

—PF7. A mí el título me dice que es «entrar en razón» y la razón pues son fracciones, fracciones como razón, pero el alumno no sabe a veces que hay fracciones como razón, entonces se supone que el docente sí lo sabe, por el título se da cuenta que hay que utilizar fracciones, pero a mí me sucedió que mis alumnos me evitaban las fracciones, mejor convertían a decimales o los porcentajes los convertían a decimales y se les hace más fácil operar con ellos aunque se les complique la vida y ya no obtengan el mismo resultado.

—M.¿Crees que la dificultad es que no sepan comparar las fracciones?

—PF7. Probablemente, aunque creo que terminarían comparando decimales.

En este caso PF7 identifica la técnica posible para resolver la tarea, sin embargo supone que además de las dificultades para identificar la técnica adecuada, es posible que el alumno no la sepa utilizar y opte por otra forma de representar el proceso de resolución. En el mismo sentido otro profesor en formación argumenta que la dificultad radicaría en el cálculo del porcentaje, considerado como la técnica con la cual se resolvería la tarea planteada:

Los alumnos tienen que sacar a cuánto equivale el porcentaje de cada uno de ellos porque es diferente cantidad de alumnos y diferente cantidad que aprobaron entonces tiene que encontrar la proporcionalidad porque no puede ser directo y en el primero es como el ejemplo que habíamos visto de los barriles que por cada tanto se regalaba otro tanto entonces se tienen que equilibrar para poder sacar la cantidad (PF2).

Como se puede apreciar, los profesores en formación identifican posibles dificultades para que los alumnos resuelvan la tarea, aunque en este caso, la omisión del número de habitantes en ambos poblados en la tarea no es considerada como parte de las posibles dificultades. En concordancia con las tareas, técnicas y dificultades para la resolución, cuando se les cuestionó sobre los saberes que

los alumnos deberían tener para resolver las tareas, todos los profesores en formación señalaron la técnica que posiblemente utilizarían para la resolución, tres señalan que los alumnos necesitaban saber porcentajes, aunque también lo asociaron con otro tipo de saberes como el caso de PF2.

—PF2. Tienen que saber multiplicar y dividir.

—M. Si un alumno sabe multiplicar y dividir ¿Con eso puede resolver la lección?

—PF2. No, debe ser competente en el manejo de la información y debe de saber sacar porcentajes mediante reglas de tres o si multiplican igual para el manejo de los porcentajes, el punto decimal, trabajar con variables, darles el significado o darle un valor a cada uno de  $x$  y  $y$ .

—M. ¿Si no sabe manejo de variables  $x$  y  $y$  no la puede resolver?

—PF2. Sí, lo puede resolver con una regla de tres y pues con el manejo de la información.

Por su parte, tres profesores en formación afirman que para resolverlo era necesario dominar las operaciones básicas, aunque en dos de estos casos también se habló de la necesidad de manejar el cálculo con el mínimo común múltiplo.

—PF3. Ahí sí se implican más habilidades, ese que decía del máximo común divisor y múltiplo, lo de la división, la multiplicación porque aquí también ya tienen que encontrar relaciones entre los números y las fracciones.

—M. ¿Qué de las fracciones?

—PF3. Este, saber cómo expresar las cantidades que te dan en fracción. De la razón, por ejemplo aquí tres de cada cuatro entonces serían tres cuartos, entonces cinco de cada siete entonces cinco séptimos, ahí ya se pueden expresar y resolver el problema.

Respecto del manejo del mínimo común múltiplo, dos profesores en formación argumentaron que era necesario saber «el manejo de las fracciones»:

—PF7. Nociones de fracción. Primero lo que es una fracción, o sea de base porque ellos tienen que saber que tres es una fracción de cuatro. Luego saber las magnitudes de las fracciones, por ejemplo, las fracciones de séptimos son más pe-

queñas que las de cuartos y ahí también la multiplicación y la división para poder hacer la comparación en caso de que la quieran hacer cruzada o no sé, depende de los métodos.

—M. ¿Entonces sabiendo lo que es una fracción ya lo pueden resolver?

—PF7. No tan simple.

—M. ¿Qué más necesitarían?

—PF7. Más cosas de la fracción. Operar con fracciones, la comparación, equivalencia de fracciones.

Para finalizar la entrevista, se les preguntó si una vez revisadas las lecciones que se encuentran en los programas de estudio consideraban que el trabajo con la proporcionalidad en la escuela primaria resultaba suficiente para transitar hacia la modelización algebraica que aparecía en la educación secundaria. Sólo un profesor en formación argumentó que sí era suficiente:

Yo creo que sí porque, bueno de hecho no sé si estuve bien en lo de las lecciones o no, pero yo observé en la práctica muchas lecciones que tienen que ver con eso y la verdad, y lo comprobé más en los programas que vimos aquí tiene muchísimo que ver la proporcionalidad con los problemas de la vida diaria, se relaciona mucho. Si un problema se plantea de este modo tiene mucho que ver, nada más buscar la estrategia pero tiene mucho que ver para resolverlos si este problema está así, entonces a mí me parece adecuado que se trabaje mucho este tipo de lecciones para que los alumnos puedan resolver problemas de su vida diaria (PF5).

Dos profesores en formación argumentaron que, más que lo planteado en los programas de la escuela primaria, lo que permitía la transición era el manejo que diera el docente al no basarse exclusivamente al trabajo con el libro de texto, sino al manejo de tareas adicionales en el aula.

Por su parte, cinco de los ocho profesores en formación argumentaron que no era suficiente, algunos argumentaban la necesidad de ampliar el número de tareas y de lecciones en los libros de texto o bien establecer la formalización de los conceptos. Este tipo de respuesta se muestra enseguida:

Yo creo que no, bueno a lo mejor está muy superficial pero yo pienso que hace falta que lleguen a la fórmula porque aquí en la resolución de problemas todavía lo

deja muy abierto resuélvelo como quieras y si llegas al resultado va estar bien. Yo no digo que esté mal pero sí hay una forma más convencional de hacerlo deberían de irse por las que son más rápidas y efectivas, es una de las competencias de las matemáticas que sepan resolver y usar incógnitas de la forma más eficiente y rápida pero que lo resuelvan de una forma no quiere decir que está mal, está bien de hecho se debería de comenzar con ello para llegar a lo que es la fórmula pero aún en sexto grado sigue diciendo que lo hagan como ellos puedan (PF2).

Las respuestas en las que se señala que es suficiente el estudio de la proporcionalidad en la escuela primaria para transitar de manera eficiente a la escuela secundaria o del modelo aritmético al modelo algebraico, hacen suponer que los profesores en formación validan las cuestiones planteadas desde la institución (escuela primaria) en los programas de estudio.

El análisis tanto del REI como de las lecciones del libro que hacen los profesores en formación sobre la proporcionalidad, muestra un (re)conocimiento del tipo de tareas, del predominio de ciertas técnicas y también, de manera implícita, del carácter tecnológico y teórico que promueven las instituciones para la integración de praxeologías matemáticas a enseñar. Aunque las principales dificultades que mostraron los profesores en formación estaban asociadas con la identificación de ciertas nociones vinculadas a la proporcionalidad tanto como objeto de estudio como de enseñanza y en algunos casos les resultaba compleja la distinción entre tarea y técnica, esta situación permite deducir la necesidad de revisar los tipos de problemas y las técnicas que desde un modelo aritmético se hacen presentes en el contexto que analizaron, pero también del conocimiento y las acciones que se requieren para que éstas evolucionan de manera natural hacia un modelo algebraico.

### 5.3. UNA REFLEXIÓN SOBRE EL ANÁLISIS DE LOS «ANALISTAS»

En términos generales el módulo dos dirigió la mirada a la descripción y comprensión del modelo epistemológico inscrito en el proceso de estudio que vivieron los profesores en formación durante el primer módulo. Los cuestionamientos planteados se enfocaron especialmente sobre las tareas matemáticas que se plantearon y las técnicas que utilizaron para resolverlas durante el REI que «vivieron», aunque también se les preguntó sobre las tareas y técnicas «a enseñar» incluidas en el entorno institucional. Este análisis contribuyó para que en un

momento posterior diseñaran o seleccionaran una praxeología para desarrollar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria, lo que constituye un tercer módulo del Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP).

Respecto del modelo epistemológico, se pudo ver que en su mayoría los profesores en formación identifican las relaciones de proporcionalidad y otras nociones asociadas como la proporción y la razón. En cuanto al tipo de relación, reconocen mejor la proporcionalidad directa, las relaciones inversa y compuesta les generan mayores confusiones que parecen derivar de una formación en la que se abandona el estudio de este tipo de relaciones, esto es, no forman parte de las tareas que se proponen en las instituciones formadoras.

En las tareas vinculadas con el módulo uno, destaca el reconocimiento que hacen de contextos (tablas de variación proporcional, gráficas, situaciones problemáticas, etc.) y de técnicas (regla de tres, la multiplicación y la división en tanto elementos predominantes del valor unitario como operador), lo que nos permite suponer que el Modelo Epistemológico de Referencia (MER), en tanto modelo de relaciones entre tareas y técnicas, cumplió con el propósito que se le asigna en esta experiencia, el cual consistió en ordenar el diseño del REI-FP y al mismo tiempo servir como herramienta para el análisis de la evolución de la técnica.

Ahora, en tanto profesores «analistas», con la tarea T2.1 se hizo evidente que comprenden las ventajas de emplear ciertas técnicas en tareas determinadas, en algunos casos enuncian los alcances y limitaciones de las técnicas aritméticas para ciertas situaciones, pero también mencionan la relevancia que éstas tienen en el proceso de construcción de técnicas algebraicas, de ahí que se identifique la relación que guarda la proporcionalidad con situaciones de modelización funcional. Con las respuestas dadas se podría decir que algunos profesores en formación evidencian su conocimiento sobre los elementos del MER propios de la organización clásica de la proporcionalidad para interpretar la actividad matemática analizada.

En cuanto al análisis de las tareas del REI, en su mayoría los profesores en formación consideran que las tareas que resolvieron resultan pertinentes, aunque mencionan posibles modificaciones que tienen que ver con la modelización funcional o algebraica. También consideran que el REI «vivido» puede plantearse en la escuela primaria porque permite la articulación de diversas cuestio-

nes a partir de una cuestión generatriz, lo que genera el trabajo articulado de varias nociones asociadas a la proporcionalidad.

Respecto a la relación del REI con la escuela primaria, identifican las nociones y los discursos tecnológicos presentes en esta institución, la mayoría considera que sólo la proporcionalidad directa y las técnicas aritméticas deben estudiarse en este nivel, aunque cabe señalar que asocian estas técnicas más a la experiencia vivida con el REI que con el análisis del currículo oficial. En lo que a lo didáctico concierne, resulta relevante que la mayoría de los profesores en formación identifican el propósito primordial del REI, el trabajo con la actividad matemática para lograr la evolución de la técnica, es decir, consideran que el objetivo del REI es provocar que las primeras técnicas (aritméticas) evolucionen hasta convertirse en situaciones generalizables que parten de una cuestión presente a lo largo de todo el proceso de estudio.

En cuanto a las nociones que se proponen estudiar en 5° y 6° grados de la escuela primaria, algunos reconocen en el programa escolar la presencia de relaciones de proporcionalidad. En general identifican los componentes relativos a la organización clásica: la relación entre razón (como el cociente entre cantidades) y la proporción (como igualdad entre dos razones); la tipología de relaciones de proporcionalidad y; las tareas alusivas al valor faltante y la comparación de razones. También hacen referencia a nociones que no se incluyen explícitamente en los libros de texto como el uso del porcentaje, la ven como técnica que permite resolver las tareas planteadas en el texto.

En cuanto a las técnicas implícitas en las propuestas curriculares, la mayoría de ellos identifica la regla de tres y el cálculo del valor unitario cuando analizan las lecciones de los libros de texto, aunque también identifican que no aparece un discurso matemático que las justifique.

Por otra parte, los profesores en formación consideran que los alumnos de quinto y sexto grado tendrán dificultades para resolver las tareas planteadas en el libro, atribuyen tales dificultades a las restricciones institucionales, es decir, a la ausencia de la explicitación y justificación de la técnica propuesta. En este mismo sentido, algunos manifiestan que es poco tiempo el asignado para el estudio de la proporcionalidad en el currículo oficial de la escuela primaria dado que, mencionan, es necesario «fijar» los antecedentes a través de las técnicas aritméticas para la futura comprensión de las técnicas algebraicas.

Finalmente, podemos decir que el análisis previo al diseño o reconstrucción



de un REI para la escuela primaria, da cuenta que, en su mayoría, los profesores en formación reconocen los elementos de un MER, esto es, de un modelo aritmético para la proporcionalidad en tanto objeto matemático y de enseñanza, objeto que es propuesto con las restricciones propias de una institución educativa determinada.

## VI. DISEÑAR UN REI

### LAS PRAXEOLOGÍAS DEL «PROFESOR INGENIERO»

Para estructurar el proceso de estudio de una praxeología matemática se requiere organizar las áreas, los temas, las tareas y las cuestiones que aparecen en el texto del saber de la institución donde habrá de estudiarse. Este trabajo de organización es parte de la praxeología didáctica, es decir del trabajo que hace el director del proceso de estudio (el profesor) para transponer, reconstruir o enseñar esa praxeología matemática en una institución particular.

Para comenzar a reconstruir la praxeología didáctica el profesor en formación se ubica en la dimensión matemática para seleccionar un tipo de problemas en el que se establecen ciertas tareas que generen una o varias técnicas y un discurso tecnológico con el cual se justifiquen y validen. Una de las acciones en ese proceso es la selección de tareas que permitan generar una técnica determinada, pero tal elección está condicionada por los lineamientos y restricciones institucionales y también por un Marco Epistemológico de Referencia (MER) que subyace en el campo en el que se mueve y en la institución donde desarrolla su actividad.

Así, a través de una praxeología didáctica, el profesor en formación modela un recorrido de estudio, una secuencia de enseñanza de la praxeología matemática en la que se puntualizan los tipos de tareas; las técnicas a utilizar; el discurso tecnológico-teórico que justificará las técnicas y; los momentos didácticos que gestionará en ese recorrido. Para lograr modelar ese recorrido durante su formación requirió conocer la manera en la que el «saber a enseñar» se textualiza, es decir, la manera como el área, el sector, las tareas y las cuestiones se colocan en el programa de estudios de la asignatura, en otros términos, debe conocer el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) porque es en él donde se expresan las técnicas que competen a determinado saber matemático.

En este sentido, recuérdese que el presente trabajo tiene que ver con la experimentación de un dispositivo de formación que parte de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) y que mediante ciertas adaptaciones fue pre-

parado como un Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP).

Como se mencionó, uno de los módulos del REI-FP consiste en colocar al profesor en formación en el rol de «profesor ingeniero o diseñador», de eso trata el presente capítulo, de analizar los diseños de clase que realizaron dos profesores en formación (PF5 y PF7) que eran los que desarrollaban sus prácticas profesionales con un sexto grado de educación primaria. Es por esta razón que en este punto nuestra mirada se centra en las praxeologías didácticas, en las tareas planteadas, las técnicas previstas y los momentos didácticos planeados, elementos que se expresan en el diseño del Recorrido de Estudio e Investigación (REI) que los profesores en formación diseñan para ser experimentado en la escuela primaria.

#### 6.1. LA NECESIDAD DE UN MODELO DIDÁCTICO DE REFERENCIA

Como parte del proceso de diseño del recorrido de estudio, los profesores en formación realizaron el análisis «económico» de la proporcionalidad en la escuela primaria, es decir asumieron el rol de profesores «ingenieros» para revisar los programas de estudio y las lecciones sobre la proporcionalidad incluidas en los libros de texto de quinto y sexto grados de educación primaria<sup>1</sup>. El propósito de este análisis era identificar la secuencia en la que están estructuradas las diferentes nociones ligadas a la proporcionalidad, y para que observaran el tipo de tareas planteadas y las técnicas a utilizar en cada una de las tareas, dado que esta revisión les serviría de base para el ulterior diseño del REI que experimentarían con sus alumnos de la escuela primaria.

Una vez realizado el análisis elaboraron un plan de clase para que, hipotéticamente, fuera trabajado en un grupo de sexto grado de educación primaria, cabe señalarse que la elaboración de ese primer plan se basó solamente en el conocimiento de la praxeología matemática, por esta razón puede considerarse como un plan de clase demasiado «empírico» dado que para desplegar acciones didácticas eficientes se requiere del logos didáctico, del saber, en el caso que nos ocupa, el profesor en formación requiere de la praxis y el logo didácticos porque es él quien requiere resolver uno de los problemas docentes, el de seleccionar, diseñar y organizar tareas propias de un proceso de estudio que deberá dirigir con sus eventuales alumnos.

---

1. Es en estos grados de la escuela primaria en los que se incluye el estudio de la proporcionalidad.

En otros términos, la primera planeación era demasiado «empírica» porque los profesores en formación no reconocían la manera en la que las relaciones entre el profesor, el alumno y el saber han de ser modelizadas, esto es, carecían de un Modelo Didáctico de Referencia (MDR). Si el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) nos permite identificar las relaciones entre las diferentes tareas, técnicas, tecnologías y teorías del objeto matemático, el MDR hace lo mismo pero en relación a lo didáctico.

Debido a esa ausencia se determinó estructurar un proceso de estudio breve sobre el Modelo Didáctico de Referencia legitimado por la institución formadora de docentes, la escuela normal. El MDR en cuestión fue la Teoría de las Situaciones Didácticas y una vez que los profesores en formación analizaron un texto referido a esta teoría didáctica, se les pidió que hicieran un segundo plan de clase en el que se incluyeran tareas sobre la proporcionalidad para alumnos de sexto grado, la consigna era que dichas tareas tendrían que estar relacionadas con aquellas que ellos resolvieron en el primer módulo de este REI-FP y que además se orientaran con su modelo didáctico.<sup>2</sup>

Al igual que en el módulo uno, en este caso también se partió de una cuestión generatriz ligada al trabajo del diseño y la gestión de un REI en la escuela primaria, que queda expresada de la siguiente manera.

—Q3: ¿Cómo organizan y diseñan los profesores en formación el estudio de la proporcionalidad a través de una Organización Didáctica (OD)?

La cuestión anterior está formulada en términos de la enseñanza de la proporcionalidad articulada con el REI «vivido» y con el entorno donde los profesores en formación se desempeñan, lo que subraya la necesidad de considerar la «ecología» institucional, el marco epistemológico de referencia, el marco didáctico de referencia, las tareas matemáticas planteadas, el tipo de técnicas que utilizaron en la enseñanza y el discurso tecnológico-teórico que se desplegó en la justificación de las técnicas utilizadas en el REI.

---

2. Si bien los ocho profesores en formación realizaron estas tareas, sólo se analizó la evidencia de dos, porque llegado el momento serían los únicos que experimentarían ese diseño en las aulas de la escuela primaria.

## 6.2. UN REI HIPÓTETICO PARA LA ESCUELA PRIMARIA

Para dar respuesta a la cuestión generatriz Q3, como ya se ha mencionado se pidió a los profesores en formación que a partir del REI que «vivieron» en el primer módulo, diseñaran un recorrido de estudio de la proporcionalidad para niños de sexto de primaria.

De manera entonces que el análisis que da cuerpo a este capítulo se refiere a elementos que consideraron en el REI diseñado como: la intencionalidad de la secuencia, el orden de las tareas, las técnicas estudiadas y los discursos justificatorios de las técnicas, los momentos de estudio propuestos o los tipos de situación. Como se mencionó, el análisis se refiere al trabajo de dos profesores en formación PF5 y PF7. De aquí se deriva la siguiente cuestión:

—Q3.1: ¿Qué organizaciones praxeológicas y momentos de estudio establecen los profesores en formación para gestionar el estudio de la proporcionalidad a través de una Organización Didáctica (OD)?

De inicio, cabe mencionar que los dos recorridos planeados fueron muy similares al REI «El Petróleo» que ellos «vivieron», en la siguiente tabla se puede ver la situación generatriz que cada uno de ellos planteó.

| <i>Situación Generatriz PF5</i><br><i>REI «Las gaseosas»</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                | <i>Situación Generatriz PF7</i><br><i>REI «Cajas de calcetines»</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| En nuestro país se consumen grandes cantidades de refresco, principalmente refresco de cola (negro); entre los más consumidos encontramos la Coca y la Pepsi. Dichas marcas tienen algunas variaciones en sus precios; sin embargo, en la actualidad, la botella de Coca tiene un precio de \$25, mientras que la botella de Pepsi de \$20. | En una fábrica textil se producen dos tipos diferentes de calcetines para exportar, que varían su calidad según el algodón que utilizan en su elaboración. Los calcetines «Cotton» cuestan \$625 la caja, precio a mayoristas y los calcetines «El Mexicano» cuestan \$885 la caja, precio a mayoristas. Cada caja de ambos tipos contiene la misma cantidad de calcetines. |

Tabla 16. Situaciones eje de los diseños de REI. (Elaboración Propia)

Como se puede apreciar, aunque ambos modificaron la situación generatriz PF5 diseña una situación basada en el consumo de bebidas gaseosas mientras

que PF7 diseña una situación relativa a la venta de cajas de calcetines. También se puede apreciar que ambos buscan que la situación sea cercana a un contexto real o a la cotidianidad de los alumnos. También es evidente que de tales situaciones se pueden derivar múltiples tareas que requieran del uso de diferentes técnicas para su solución.

En el caso de PF5, la situación generatriz (gaseosas) dio lugar a un recorrido en el que incluyen cuatro tareas cuya solución implica la utilización de técnicas como el valor unitario, el modelo tabular, la comparación de razones y el uso de la proporcionalidad con tres magnitudes (con un rango numérico de dos cifras).

Por su parte, a partir de su situación generatriz PF7 plantea un recorrido en el que se incluyen cinco tareas relacionadas con el valor faltante, el modelo tabular, la comparación de razones y una aproximación al modelo algebraico, pero con rango numérico de tres cifras.

#### *6.2.1. Primera tarea. Valor faltante*

La primera tarea representa el momento del primer encuentro del sujeto con la praxeología a estudiar, este es el primero de los momentos didácticos que se requiere gestionar (Chevallard, 1999). Para gestionar este momento los dos profesores en formación han decidido escribir una situación problema en una hoja de papel y dárselas a los niños para que la lean, una vez leída los profesores les harán preguntas sobre las características de la situación y la manipulación de magnitudes, veamos la tarea de cada uno.

##### *a) Primera tarea de PF5*

En el REI que diseñó PF5 se plantean acciones como las siguientes.

(Entregar hoja de trabajo de la primera sesión y pegar hoja en cuaderno). En la primera sesión se maneja la siguiente situación problema, la cual se leerá y analizará de forma grupal:

En nuestro país se consumen grandes cantidades de refresco, principalmente refresco de cola (negro); entre los más consumidos encontramos la Coca y la Pepsi. Dichas marcas tienen algunas variaciones en sus precios; sin embargo, en la actualidad, la botella de Coca tiene un precio de \$25, mientras que la botella de Pepsi de \$20.

Resolver las siguientes preguntas de forma individual (de la forma en que ellos lo puedan realizar):

- ¿Cuál es el costo de 4 botellas de Pepsi?
- ¿Cuánto se debe pagar por  $\frac{3}{4}$  de botella de Pepsi?
- ¿Cuánto debe de pagar por 0.750 partes de una botella de Pepsi?
- Si se quisiera comprar \$25 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas le darían?
- Y si se compraran \$15 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas tendría?
- Y si sólo se compraran \$12.50, ¿qué cantidad de botellas se darían?

Como se puede observar, en un primer momento PF5 plantea tareas en las que incluye distintas magnitudes (enteros, fracciones y decimales) pero todas asociadas al valor faltante. Puede verse que establece diversos rangos de precio para identificar el valor faltante asociado al número de botellas que podrán adquirirse con ciertos precios, en este caso la técnica que se busca generar es el valor unitario como operador.

Lo destacable es que hasta este momento las tareas enunciadas guardan total relación con el REI «vivido», sólo se modifica el rango numérico para adecuarlo a los alumnos de sexto grado. Luego de resolver las cuestiones PF5 planea gestionar un momento en el que los niños discutan la eficacia de sus técnicas.

Otras situaciones derivadas de esta primera tarea se observan cuando PF5 planea solicitar a los alumnos que peguen una hoja en su cuaderno y de manera individual resuelvan los siguientes problemas:

- Pablo desea hacer una fiesta, pero al comprar todo lo que ocupaba para realizarla le sobraron \$4600 para comprar el refresco, ¿Cuántas botellas de Coca Cola puede comprar con esa cantidad?
- Antes de comprar los refrescos, su mamá le habló y le pidió que sólo comprara 123 botellas de Coca, ¿cuánto pagó?

Como se puede apreciar, estas dos cuestiones son situaciones de valor faltante en las que se emplea la técnica de valor unitario como operador (costo de una botella de refresco). Para resolver la primera, la cantidad de dinero se divide entre el valor unitario de la botella, en la segunda el valor unitario se multiplica por el número de botellas que se pretende comprar.

Una vez culminada la resolución de las tareas, nuevamente PF5 planea gestionar un momento de organización del entorno tecnológico-teórico de la técnica, es decir, que los niños justifiquen y validen sus técnicas y seleccionen la que les haya parecido más adecuada, para ello organizará a los alumnos en tríos para que comenten sus procedimientos y seleccionen el más adecuado, luego pasará al frente a algunos estudiantes para que expliquen sus procedimientos. Una vez que encuentren la técnica adecuada para resolver la tarea, deberán explicar la razón por la cual funciona, con ello se pretende que utilicen un discurso tecnológico-teórico<sup>3</sup>.

Finalmente, planea el momento de la institucionalización, aunque no señala las cuestiones, elementos teóricos o técnicas que institucionalizará, sólo enuncia que dicho momento se apoyará con la información recabada de los procedimientos mencionados por los alumnos.

#### *b) Primera tarea de PF7*

Para el primer encuentro de los alumnos con la praxeología ligada a la proporcionalidad, PF7 planea algunas cuestiones relacionadas con la comparación de costos como la siguiente:

En una fábrica textil se producen dos tipos diferentes de calcetines para exportar, que varían su calidad según el algodón que utilizan en su elaboración. La caja de calcetines «Cotton» cuesta \$625 a precio de mayoristas y la caja de calcetines «El Mexicano» cuesta \$885 a precio de mayoristas. La caja de ambas clases de calcetines contiene la misma cantidad de pares. Tomando en cuenta los precios de las dos clases de calcetines:

- ¿Cuál es el costo de 3 cajas de calcetines «Cotton»?
- ¿Cuál es el costo de 3 cajas de calcetines «El Mexicano»?
- ¿Cuál es más barato? ¿Cuál es más caro?

Con esta tarea, que implica la comparación de tipos de calcetines, PF7 busca que los alumnos usen la técnica del valor unitario como operador con magnitudes enteras. A diferencia de PF5, no incluye el trabajo con magnitudes fraccionarias

3. El cuarto momento didáctico que está asociado al trabajo de la técnica no se incluye en el recorrido que planeó PF5. La importancia de ese momento radica en que a través de la práctica la técnica la vuelve más eficaz.



y decimales abordadas en el REI «vivido», otro rasgo destacable es que las dos últimas cuestiones sobre comparación del costo parecerían irrelevantes en tanto que la respuesta puede deducirse a partir del valor unitario de la caja.

También a diferencia de PF5, en esta primera tarea PF7 no incluye el momento de la constitución del entorno tecnológico teórico ni la institucionalización, es decir, no incluye actividades en las que los niños puedan justificar y validar sus técnicas, tampoco planifica un momento en el que él llevaría el saber convencional al aula.

### 6.2.2. Segunda tarea. Valor faltante en tablas de variación

Algo que es similar a los dos profesores de formación es que en la segunda tarea que planean ambos recurren a las tablas de variación proporcional, sin duda, la elección tiene su razón de ser en la secuencia del recorrido que «vivieron» como «aprendices de matemáticas».

#### a) Segunda tarea de PF5

En su planeación PF5 incluye una segunda tarea que nuevamente se relaciona con situaciones de valor faltante, en el momento del primer encuentro pediría a los alumnos que lean los problemas y completen las siguientes tablas de variación:

Miguel trabaja en una tienda, pero el dueño le pidió que llevara un registro de las botellas de Coca Cola vendidas, por lo que realizó las siguientes tablas para facilitar su trabajo, ayúdale a completarlas:

|                 |    |    |     |     |     |     |     |
|-----------------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| No. de botellas | 1  | 2  | 6   | 15  | 23  | 45  | 91  |
| Precio          |    |    |     |     |     |     |     |
| No. de botellas |    |    |     |     |     |     |     |
| Precio          | 25 | 75 | 125 | 200 | 250 | 325 | 500 |

La economía en México está pasando por un mal momento y la población ya no alcanza a comprar botellas completas, pero aun así siguen comprando; por lo que Miguel se vio en la necesidad de vender Coca Cola en vasos para seguir obteniendo ganancias, ayúdale a completar la siguiente tabla:

|                 |     |      |     |      |     |     |      |
|-----------------|-----|------|-----|------|-----|-----|------|
| No. de botellas | 0.1 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 0.8 | 1.5 | 2.25 |
| Precio          |     |      |     |      |     |     |      |

Como se puede ver, en la primera y tercera tablas, donde se busca el valor faltante, también se requiere la utilización del valor unitario como operador y la multiplicación resulta ser la técnica más eficiente. La única diferencia entre estas tablas radica en el uso de magnitudes enteras (primera) y decimales (tercera). En la segunda tabla la división sería la técnica más eficiente dado que al conocer el valor unitario y colocar los datos sólo en una de las filas (precio), se deja de lado la posibilidad de utilizar la regla de tres.

En esta segunda tarea PF5 también planifica un momento de constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica, dado que planea reunir a los estudiantes para que compartan sus procedimientos y elijan el más adecuado, una vez seleccionado se propone que expliquen el procedimiento seleccionado al resto del grupo.

Finalmente, en la planeación de PF5 se expresa la intención de gestionar el momento de la institucionalización, pero no se señala concepto alguno, noción o técnica que se formalizaría.

#### *b) Segunda tarea de PF7*

Por su parte PF7 plantea una segunda tarea también de tipo valor faltante, para ello incluye un modelo tabular, para el primer encuentro entre alumnos y tarea planea solicitar a los alumnos que completen una tabla con valores faltantes y que den respuesta a las preguntas que derivan de la información en la tabla. A continuación, se puede ver dicha tarea.

Tomando en cuenta que el precio de los calcetines «Cotton» es de \$625, completa la siguiente tabla.

|                 |       |      |        |
|-----------------|-------|------|--------|
| Número de cajas | 1.5   |      | 6      |
| Precio por caja | 937.5 | 1875 | 2812.5 |

- ¿Cuál es el costo de cajas de calcetines «Cotton»? ¿y de calcetines «El Mexicano»?
- ¿Cuál es el costo de 0.700 partes de caja?

- ¿Cuántas cajas se necesitan en cada caso si sólo se quieren comprar \$700 de calcetines?

Por el acomodo de los datos en la tabla, se infiere que PF7 busca que los alumnos utilicen la regla de tres como técnica. Para las cuestiones que le siguen la técnica más eficiente sería la del valor unitario. Lo que se puede apreciar en esta tarea es que, al parecer PF7, intenta que la primera técnica utilizada evolucione, es decir, que los niños pasen de utilizar valor unitario a la regla de tres.

Luego de la resolución de la tarea PF7 planea el momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico, señala en su planeación que al terminar de resolver los problemas *«se comparten procedimientos y se validan resultados»*.

También en esta segunda tarea PF7 establece el momento de la institucionalización y a diferencia de PF5, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, sí describe los saberes que serán formalizados:

Se institucionaliza tomando en cuenta lo siguiente:

- Existe un valor proporcional que hace que conforme aumenta el número de cajas, la cantidad a pagar también lo haga.
- Si la cantidad de dinero disminuye, también disminuye la cantidad de cajas.

Como se puede apreciar, PF7 intenta institucionalizar el significado de la proporcionalidad directa, aunque no las técnicas como el valor unitario y la regla de tres.

Lo que es de subrayar es que en la segunda tarea que plantean ambos profesores en formación se observan ciertas diferencias. Por una parte, PF5 establece una tarea que continúa ponderando el uso del valor unitario y la única variante es que aumenta el rango numérico, las técnicas a utilizarse no cambian dado que el uso de la multiplicación y la división implícitos en el valor unitario como operador se trabajaron desde la primera tarea. Es posible que con esta segunda tarea PF5 busque instituir el momento del trabajo de la técnica mediante la resolución de tareas similares.

Por su parte PF7 plantea una segunda tarea que al parecer tiene la intención de hacer que evolucione la técnica (valor unitario) que utilizaron en la primera

tarea para que en ésta utilicen la regla de tres. Cabe destacar que en ambos casos no consideran el uso de gráficas de variación proporcional.

*6.2.3. Tercera tarea. El trabajo con razones*

Siguiendo con la ruta del REI que los profesores en formación «vivieron» la tercera tarea que aparece en sus planes de clase tiene que ver con el concepto de razón.

*a) Tercera tarea de PF5*

Para gestionar el momento del primer encuentro con la tercera tarea, PF5 planea pedir a los niños que peguen en su cuaderno una hoja con situaciones problemáticas para que sean resueltas de forma individual, uno de esos problemas es el siguiente.

En un cargamento que lleva Doña Lupita a su taquería, transporta 100 botellas de refresco; si por cada botella de Coca Cola, hay 3 botellas de Pepsi Cola, ¿cuántas botellas hay de Pepsi Cola y cuántas de Coca Cola hay en el cargamento?

El total del cargamento es la suma de dos números solicitados, las 100 botellas de refresco están en relación de 1 a 3 con los diferentes tipos de refresco, al expresar los datos a modo de razón se tiene  $1/3$ , eso es, un refresco de Coca Cola por cada tres de Pepsi Cola, lo que da un total de cuatro refrescos.

En este problema es necesario que el alumno encuentre una técnica para identificar el valor de cada cantidad de botellas de modo que la suma sea 100, la razón 1 a 3 indica que una de las magnitudes es 3 veces más grande que la otra, 75 y 25 son las magnitudes que cumplen con esa condición. Si bien esta tarea puede resolverse utilizando diferentes técnicas dada la secuencia establecida, la técnica que posiblemente utilicen los alumnos de la escuela primaria es un modelo tabular como el siguiente.

|            |   |    |    |    |     |
|------------|---|----|----|----|-----|
| Coca Cola  | 1 | 5  | 10 | 20 | 25  |
| Pepsi Cola | 3 | 15 | 30 | 60 | 75  |
| Total      | 4 | 20 | 40 | 80 | 100 |

Después de la resolución del problema en su plan de clase PF5 no registra ningún momento para la explicación, justificación y validación de las técnicas, lo que plantea enseguida es que se trabajarían situaciones problemáticas referidas a la comparación de razones tal como se muestra a continuación:

Se realizó una encuesta acerca de las preferencias de las personas hacia las dos marcas de refresco de cola, obteniendo los siguientes resultados: 8 de cada 15 personas prefieren Pepsi y 7 de cada 11 prefieren Coca. ¿Qué marca de refresco de cola prefiere más la población?, ¿qué porcentaje de la población lo prefiere en cada caso? Ha estado disminuyendo el consumo de refresco debido al sobrepeso en la población, así que las dos marcas tuvieron que manejar ofertas para que las personas volvieran a comprar: Al comprar 5 botellas de Coca te regalan 1 más, y por comprar 15 botellas de Pepsi te regalan 4 botellas más. ¿Cuál promoción resulta mejor?

En ambas tareas se observa la relación entre dos pares de magnitudes 8 de cada 15 y 7 de cada 11 para la primera, 1 por cada 5 y 4 por cada 15 para la segunda, las técnicas que tal vez intenten utilizar los alumnos son el modelo tabular o la conversión de fracción a decimal.

Es hasta después de la resolución de estos problemas, que PF5 plantea el momento para la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica, señala que reunirá a los alumnos en grupos de tres donde expliquen sus procedimientos y resultados para posteriormente hacer lo mismo frente al grupo. También señala que al final habrá una institucionalización, pero no indica qué es lo que se habría de formalizar.

#### *b) Tercera tarea de PF7*

Por su parte, para gestionar el momento del primer encuentro con las razones PF7 plantea una tarea de la que derivan preguntas y problemas que deberán contestarse de forma grupal e individual, a saber:

Debido al aumento de impuestos, la fábrica de textiles tuvo que aumentar sus precios, ahora el costo de la caja de calcetines «Cotton» es de \$670 y el de la caja de «El Mexicano» es de \$915

¿Qué creen que sucederá ahora que cambiaron los costos, el valor proporcional será el mismo que en los costos anteriores?

¿Por qué?

Como se puede ver, en esta tarea se incluyen preguntas que podrían denominarse «predictivas», dado que se busca que los alumnos elaboren predicciones sobre el comportamiento que tendrá la variación proporcional con los nuevos costos, no obstante, las preguntas son un tanto ambiguas y posiblemente se requiera la contextualización de las tareas previas para que los alumnos puedan dar respuesta a tales cuestionamientos.

Derivado de este planteamiento, PF7 señala que planteará la siguiente tarea que está vinculada con la anterior, ésta también es relativa a la razón.

Con base en el problema anterior, resuelvan los siguientes planteamientos:

- Al día la fábrica vende 300 cajas. Si por cada 5 cajas de calcetines «Cotton» se venden 2 cajas de calcetines «El mexicano» ¿Cuántas cajas de calcetines «Cotton» venden al día?

Como se puede apreciar, en esta tarea se pide encontrar una razón a partir de la relación entre dos magnitudes de diferentes tipos (5 cajas de calcetines «Cotton» a razón de 2 cajas de calcetines «El Mexicano»).

No obstante, se observa un error en el diseño de la tarea dado que, si se trata de magnitudes enteras la relación 5 a 2 no coincide con 300 cajas «enteras» de la venta total, sino con 294 o 301 cajas, es decir si las cajas se representan con  $a$  y  $b$ , y se sabe que al hablar de razón entre dos cantidades existe una comparación entre éstas, los datos quedarían expresados como  $a/b = 2/5$

La tarea plantea que la suma de las dos cantidades debe dar 300 cajas, al trabajar con una constante que puede ser « $x$ », la representación sería  $a/b = 2x/5x$ , al reemplazar los datos de la ecuación se tendría:

$$2x + 5x = 300$$

$$7x = 300$$

$$x = 300/7$$

$$x = 42.85$$

Una vez obtenido el valor de  $x$  se sustituyen los valores  $a$  y  $b$  para establecer que  $a/b = 2(42.86) / 5(42.86)$ , así el valor de  $a$  es 85.7 mientras que el valor de  $b$  es 214.25 y la suma de ambos valores será un aproximado de 299.95 cajas en total.

Si bien desde la perspectiva matemática la técnica y la resolución son adecuadas, no lo es así en el contexto «real» al que apela el problema, dado que hablar de que se vendieron 85.7 cajas de calcetines «El Mexicano» y 214.25 cajas de calcetines «Cotton» no tiene sentido en el marco de la tarea.

Por otra parte, PF7 tampoco señala en su planeación la intención de gestionar un momento didáctico para la explicación y justificación de las técnicas. Enseguida de las tareas descritas plantea la siguiente situación de comparación de razones:

Si al comprar 8 cajas de calcetines «Cotton» te regalan 1 caja y al comprar 15 cajas de calcetines «El mexicano» te regalan 2 cajas. ¿Cuál promoción conviene comprar más?

El problema implica comparar razones, es decir 1 caja regalada por cada 8 cajas compradas y 2 cajas regaladas por cada 15 cajas compradas. Las fracciones que representan estas relaciones son  $1/8$  y  $2/15$ , por lo tanto, una técnica plausible para resolverlo es determinar y comparar esas fracciones que en este caso funcionan como razones.

Como se puede ver, el rango entre las magnitudes que presenta PF7 en esta tarea es de menor dificultad que las presentadas por PF5. En este caso la comparación permite usar la técnica de igualar ambas razones a 2 cajas regaladas, es decir, 2 regaladas por cada 16 compradas de «Cotton» y 2 regaladas por cada 15 compradas de «El mexicano», lo que permite establecer la comparación con mayor facilidad.

Luego de las tareas de este tipo PF7 no planea momento para la constitución del entorno tecnológico-teórico ni para el trabajo con la técnica, tampoco planea institucionalización alguna, estos momentos los incluye hasta la siguiente tarea donde se aborda la proporcionalidad con tres magnitudes. Se podría decir entonces que la institucionalización de la razón y la comparación de razones resultó en ambos casos sólo una resolución de problemas en las que no se promueve una técnica explícita para su estudio.

#### 6.2.4. Cuarta tarea. Variación proporcional con tres magnitudes

Otro aspecto que incluyeron los profesores en formación en el REI que planificaron tuvo que ver con tareas en las que el sistema de variación proporcional incluía tres magnitudes, ambos profesores incluyen ese tipo de tareas en su plan de clase para los alumnos de la escuela primaria.

##### a) Cuarta tarea de PF5

El primer encuentro con el sistema de tres magnitudes en una relación proporcional que PF5 incluye en el recorrido de estudio, tiene que ver con plantear la tarea siguiente que integra diversos cuestionamientos para resolverse de manera individual.

A Toñito y a José les gusta jugar a «Los científicos» así que decidieron hacer una mezcla, utilizando una botella de Coca (\$25) y una de Pepsi (\$20). Decidieron vender su mezcla ya que tenía un rico sabor,

- ¿Cuánto costará toda la mezcla?
- ¿Cuánto costará sólo una botella de esa mezcla?
- Si hubieran mezclado dos botellas de Coca y dos de Pepsi,
- ¿Cuánto costaría toda la mezcla?
- ¿Cuánto costará sólo una botella de esa mezcla?
- Y si juntaran dos botellas de Coca y una de Pepsi,
- ¿Cuánto costaría toda la mezcla
- ¿Cuánto costaría una botella?
- Y si juntaran 2 de Coca y 5 de Pepsi...

La técnica que parece pertinente para esta situación remite al uso del valor unitario pero empleado junto con la media aritmética, es decir con el cociente de la sumatoria de los valores unitarios. Puede verse que los cuestionamientos son progresivos y llevan a los alumnos de elementos sencillos como la mezcla uno a uno, hasta situaciones más complejas como la mezcla «dos a cinco».

Una vez que individualmente los niños resuelvan las cuestiones, PF5 planea gestionar un momento para la constitución del entorno tecnológico-teórico de la misma forma como lo ha hecho en tareas precedentes, organizar equipos de



tres niños para explicar, justificar y elegir el procedimiento adecuado primero de modo interno y luego al resto del grupo.

Por último, en su planeación se incluye el momento de la institucionalización, aunque no señala qué y cómo se pretende formalizar. De esta manera concluye la planeación del Recorrido de Estudio e Investigación que diseñó PF5.

Cabe subrayar que en su recorrido PF5 no incluyó tareas que se resolvieran con un modelo algebraico, tampoco aquellas cuya solución requiriera encontrar el valor de cada magnitud dado el costo de una mezcla.

*b) Cuarta tarea de PF7*

En el recorrido diseñado por PF7 se integra una cuarta tarea similar a la de PF5, se contextualiza en un sistema de tres magnitudes con variación proporcional, aunque en este caso la tarea tiene menos cuestionamientos. Para el momento del primer encuentro se plantea la siguiente tarea que los alumnos deberán resolver de manera individual:

Por temporada, la fábrica estará vendiendo cajas mixtas, que consiste en una mezcla de ambos tipos de calcetines según la petición del cliente, por lo que el precio varía según el contenido de cada caja. Si se producen cajas en las que se combina una caja de cada clase de calcetín.

- ¿Qué precio tendrá esa caja?

Si se produce una caja, combinando dos cajas de calcetines «Cotton» y una de «El Mexicano»

- ¿Cuál será el costo de esta caja?

Como se puede ver, la idea de combinación se encuentra un tanto «forzada», lo que realmente se combina son dos tipos diferentes de calcetines, hecho que pudiera repercutir en la comprensión del problema, aunque el valor unitario o media aritmética de esa combinación permita la solución a la tarea.

Una vez que establece este primer encuentro, PF7 planea un momento para la constitución del entorno tecnológico-teórico mediante la validación grupal

de las respuestas para luego, gestionar el momento de la institucionalización donde expresa que:

Al cambiar el precio de las cajas de calcetines, inmediatamente el total de dinero a pagar por «n» cajas también se modifica.

Al realizar mezclas de ambos calcetines, el precio varía según la calidad del contenido de la caja, es decir, si tiene un mayor porcentaje de calcetines de mayor precio y menor cantidad de calcetines de menor precio, el costo final se eleva, por lo contrario disminuye.

Cabe señalar que dicha institucionalización está programada para realizarse después del trabajo con las tareas en las que se incluye la razón y la proporcionalidad con tres magnitudes y lo que resulta interesante es la inserción de un lenguaje algebraico al hablar del costo de «n» cajas.

A diferencia de PF5, en este caso PF7 plantea situaciones de variación con tres magnitudes en las que se pregunta por el número de cajas que se combinarían para un costo dado, también rompiendo la inercia del trabajo individual las presenta como un momento de primer encuentro de manera grupal, posteriormente señala, se resolverían las siguientes cuestiones de manera individual.

Tomando en cuenta que la caja de calcetines «Cotton» cuesta \$670 y la caja de calcetines «El Mexicano» cuesta \$915:

- ¿Qué cantidad de calcetines de cada clase debe contener una caja que cuesta \$800?
- ¿Se puede armar una caja con un valor menor de \$670? ¿Por qué?
- ¿Se puede armar una caja con un valor superior a \$915? ¿Por qué?
- ¿Qué cantidad de calcetines de cada clase debe contener una caja que tenga un valor de  $x$ , es decir un valor cualquiera que sea?

Como se puede apreciar, la estructura de esta tarea tiene sus dificultades, desde el contexto el cuestionamiento no alude a la cantidad de cajas de cada tipo como se había planteado en tareas anteriores, ahora se cuestiona sobre la cantidad de calcetines de cada clase situación que resulta compleja porque en ningún momento se ha mencionado el número de calcetines que tiene cada caja porque

ese dato no era necesario en las primeras tareas. Por otra parte, hablar de «partes de caja» rompe también con la lógica de la funcionalidad de la tarea y con el contexto «real» sobre el que se apoya.

Ahora, continuando con su planeación PF7 señala que luego de resolver estas tareas seguirá un momento en el que:

Se comparten procedimientos y resultados, intentando que lleguen a un razonamiento algebraico inicial, haciendo preguntas como:

- Durante las sesiones de trabajo ¿qué relación han encontrado entre el precio y la cantidad de cajas?
- ¿Qué pasa con el contenido de las cajas de calcetines cuando el precio que pagamos es mayor? ¿Y qué pasa cuando es menor?
- ¿Ustedes creen que pudiera haber una fórmula general para que pudiéramos conocer los porcentajes que debe incluir una caja de cada clase de calcetines para obtener determinado precio final? ¿Cuál?

Esto significa que a partir de este momento PF7 pretende generar una técnica algorítmica a partir de las preguntas, al parecer específicamente buscará que surja una fórmula para conocer los porcentajes de cada caja que den el costo total. De lo anterior se deduce que la técnica que se pretende institucionalizar es el uso de porcentajes, aunque no se explicita la forma en que será abordado, es decir, si se utilizará como técnica o como concepto a estudiar.

Por último, PF7 cierra el diseño del REI con una expresión que parecería señalar la institucionalización, cuando dice:

Se llega a una conclusión de cuál sería el costo menor que pudiera tener una caja de calcetines y el costo mayor, argumentando por qué ocurre esto.

Se observa que la atención está centrada en institucionalizar los rangos mínimos y máximos (costos) de la combinación de cajas, no el funcionamiento de una técnica que resulte eficiente para resolver la tarea planteada.

En términos generales el REI que diseñaron los profesores en formación muestra rasgos que permiten identificar su adhesión con la estructura y funcionalidad del REI que vivieron como «aprendices de matemáticas». En lo que

respecta a la praxeología matemática, ambos plantean una situación generatriz en cuyo contexto se ubican todas las tareas, esto es, en los contextos «refrescos» y «cajas de calcetines» se ubican entre cuatro y cinco tareas ligadas a la proporcionalidad y relacionadas entre sí, lo que nos permite decir que los profesores en formación asumen la noción de «recorrido» y la intención de que aparezcan técnicas diferentes relacionadas con la evolución.

No obstante lo anterior, también es visible la dificultad para diseñar la situación generatriz, el contexto que elige PF7 (cajas de calcetines) da cuenta de dichos obstáculos, sin duda esto significaría conflictos para sus alumnos al momento de resolver tareas con magnitudes fraccionarias y decimales.

Por otra parte, es posible observar que las tareas planteadas tienen una estrecha relación con el REI vivido, la diferencia estriba en el número de cuestionamientos y el rango numérico, además en ambos casos se omite el estudio de la proporcionalidad a través del manejo de gráficas y de técnicas algorítmicas.

La evolución de técnicas es una intención presente, hay tareas relativas al uso del valor unitario y a la regla de tres, en el caso de PF7 es más clara la intención para llegar a la representación de una técnica algorítmica, aunque también se aprecia que ambos profesores en formación establecen una relación estrecha con los saberes instituidos en el currículo oficial asociados con un modelo epistemológico basado en la organización clásica de la proporcionalidad.

En cuanto a las praxeologías didácticas, se puede ver que plantean casi los mismos momentos de estudio: el primer encuentro, la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica y en algunos casos el momento de la institucionalización.

En los momentos de institucionalización se aprecia la dificultad de los profesores en formación para establecer los saberes que la institución ha formalizado y el funcionamiento de las técnicas que resultan más eficientes en las tareas planteadas. Las dificultades son evidentes sobre todo en el caso de PF7 quien sólo señala que se llevará a cabo dicho momento con los procedimientos encontrados, pero sin especificar de modo explícito aquello que será institucionalizado. Lo destacable es que no incluyen momentos para el trabajo de la técnica ni de evaluación de la praxeología, que resultan determinantes en la ejecución de un REI.

## VII. GESTIONAR UN REI

### LAS PRAXEOLOGÍAS DEL «PROFESOR EN ACTO»

En el módulo cuatro del REI-FP, el profesor en formación debe ocupar el rol de «profesor en acto», es decir, en su recorrido de formación debe haber un momento en el que dirija un proceso de estudio con un grupo y alumnos reales. Este rol le exige una comprensión clara acerca de la praxeología matemática (proporcionalidad) que reconstruyó en el primer módulo de su recorrido, además necesita tener claridad sobre las praxeologías didácticas adecuadas para dicho proceso de estudio, en otras palabras, debe considerar la existencia de una obra matemática (la proporcionalidad) construida a partir de un proceso de estudio y considerar también la manera específica en que el proceso de estudio ha de desarrollarse. La praxeología matemática es resultado de la construcción, mientras que la manera de construirla es el proceso de estudio (Lucas, 2010). Desde esta perspectiva no hay una praxeología matemática sin un proceso de estudio que la engendre, tampoco puede haber un proceso de estudio sin una praxeología en construcción (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003). Siguiendo el sentido de esta idea, para dar cuenta de lo que sucede con el profesor en formación cuando ocupa el rol de profesor «en acto», se planteó la siguiente cuestión generatriz.

—Q4: ¿Qué tareas (T), técnicas ( $\tau$ ) y discurso tecnológico-teórico ( $\theta$ ,  $\Theta$ ) utilizan los profesores en formación para gestionar el proceso de estudio de una praxeología matemática ligada a la proporcionalidad?

Cuando se intenta dar respuesta a una cuestión, como parte del proceso de estudio aparecen varios momentos didácticos: el del primer encuentro con la praxeología; el exploratorio del tipo de tareas; el de la constitución de un entorno tecnológico-teórico; el de trabajo de la técnica; el de la institucionalización y; el momento de la evaluación (Chevallard, 1999).

Sin embargo, el proceso de estudio no es lineal, cada momento didáctico puede ser experimentado con diferente intensidad, en diferentes tiempos y repi-

tiéndose las veces que sea necesario porque «la noción de momento didáctico se utiliza, no tanto en el sentido cronológico, como en el sentido de dimensión de la actividad» (Dorado y Díaz, 2014, p. 80). Algunos pueden presentarse casi de modo simultáneo como es el caso del primer encuentro y el momento exploratorio o bien puede suceder que alguno no se aparezca durante el proceso de estudio. «Lo que es importante destacar es que cada uno de los seis momentos o dimensiones del estudio tiene una función específica necesaria para llevar a cabo el proceso y que existe una dinámica interna global que se manifiesta en el carácter invariante de ciertas relaciones entre los citados momentos» (Serrano, 2013, p. 23).

Además, debe considerarse que las praxeologías matemáticas y didácticas que se hacen visibles en los diferentes momentos didácticos se despliegan en una institución determinada que impone restricciones tanto matemáticas como didácticas al proceso de estudio.

En el capítulo anterior se dio cuenta de los recorridos que para el estudio de la proporcionalidad en la escuela primaria realizaron dos profesores en formación, en éste de lo que se trata es de analizar la experimentación que hicieron de sus recorridos de estudio con un grupo de alumnos de este nivel.

El objetivo del análisis consiste en identificar las tareas que ponen en juego, las técnicas que implementan para gestionar dichas tareas y los elementos tecnológico-teóricos que las justifican, cabe señalar que para dar cuenta de los momentos de estudio y las interacciones que se desarrollan entre el profesor en formación, sus alumnos y las tareas en cuestión, se utilizan conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, la decisión de utilizarlos tiene que ver con el hecho de que representa el modelo didáctico de referencia en la institución y además no se encontraron conceptos en la TAD que permitieran explicar este tipo de fenómenos didácticos.

### 7.1. EL PROCESO DE ESTUDIO EN LA ESCUELA PRIMARIA

La experimentación de los dos REI se realizó en dos grupos de sexto grado de educación primaria, uno con 30 alumnos y el otro con 32. En estos grupos desarrollaban sus prácticas profesionales PF5 y PF7 respectivamente. En el lapso de dos semanas PF5 (en adelante José) trabajó cuatro sesiones de dos horas cada una para probar su recorrido, planteó cuatro tipos de tareas. Por su parte PF7 (en adelante Luis) también en un lapso de dos semanas utilizó tres sesiones de entre dos y dos horas y media para su experimentación, planteó cinco tipos de tareas.

Cabe aclarar que la experimentación de los recorridos de estudio fue una tarea extracurricular, es decir, aunque las sesiones se desarrollaron en el horario escolar, se intentó evitar ciertas restricciones del ámbito curricular como el tiempo específico destinado para la clase de matemáticas y el abordaje convencional de las lecciones del libro de texto, circunscritas a un tema en particular.<sup>1</sup>

A diferencia de ello, el REI diseñado por los profesores en formación intentó articular diversas cuestiones, temas y sectores que permitieran gestionar un proceso de estudio en torno exclusivamente a la proporcionalidad.

#### *7.1.1. Los recorridos de estudio. Estructura y condiciones*

Al considerar la naturaleza de un Recorrido de Estudio e Investigación, puede decirse que el proceso de estudio no es otra cosa que la búsqueda de la respuesta a una cuestión matemática generatriz, para dar con esa respuesta se requiere la reconstrucción de la praxeología matemática, pero en el proceso de estudio, «lo importante es la estructura interna de las relaciones que deben establecerse forzosamente entre momentos del proceso de estudio» (Dorado y Díaz, 2014, p. 80).

Ahora, respecto de la estructura de un recorrido, Fonseca (2011) señala la necesidad de plantear una mínima infraestructura praxeológica para el estudio de la nueva praxeología, dado que la cuestión generatriz que se proponga facilita el proceso de estudio, aunque el tiempo institucional (si es limitado) obstaculice la familiarización con toda la información. Este primer momento resulta familiar para el alumno porque ya cuenta con un referente praxeológico inicial que ha adquirido mediante la solución de tareas de proporcionalidad en los grados anteriores, de hecho el estudio formal de la proporcionalidad inicia en quinto grado de la escuela primaria, lo que nos dice que, en efecto, el alumno ya dispone de un cierto equipamiento praxeológico relativo a ese objeto matemático.

En los siguientes párrafos se presenta la estructura praxeológica mínima de los recorridos de estudio.

- A. Un problema didáctico-matemático al que el sistema de enseñanza tiene que dar respuesta. Promover el estudio de la proporcionalidad

---

1. En la escuela primaria se trabaja por aprendizajes esperados a través de lecciones en el libro de texto y el manejo de los conceptos matemáticos no es secuencial, es decir en una lección pueden abordarse nociones de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico y en la siguiente Forma y Medida.

- a través de organizaciones praxeológicas matemáticas que permitan identificar la utilización de técnicas aritméticas (valor unitario y regla de tres) y algebraicas para la resolución de situaciones problemáticas.
- B. Una institución concreta donde se plantea el problema en cuestión. En el nivel de educación básica, en la escuela primaria «General Pánfilo Natera» de la ciudad de Zacatecas, México, en los grupos 6° «A» y 6° «C».
- C. La razón de ser de las organizaciones matemáticas.
- Resolver tareas matemáticas en torno a la proporcionalidad.
  - Identificar las técnicas que se utilizan para resolver tareas sobre la proporcionalidad.
  - Identificar la evolución de las técnicas.
  - Comprender el funcionamiento y significado de modelos algebraicos en torno a la proporcionalidad.
- D. Elegir una cuestión o situación generatriz. ¿Cuáles son las técnicas y tecnologías que permiten resolver y justificar tareas de proporcionalidad?
- E. Un dispositivo didáctico que puede ser considerado como un proceso de ingeniería matemática denominado Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas (OMLRC):
- «El Refresco», una reconstrucción elaborada por José para trabajarse con el grupo de 6° «A» y,
  - «Las cajas de calcetines» dispositivo prediseñado por Luis cuya experimentación se llevó a cabo con el grupo de 6° «C».
- F. Un contrato didáctico donde se observarán las responsabilidades del profesor y del alumno ante las situaciones de aprendizaje y de enseñanza. Las tareas planteadas a los alumnos están vinculadas con actividades cotidianas y con saberes adquiridos en los grados escolares anteriores, lo que permitió otorgarles la responsabilidad en la resolución de las situaciones problemáticas. En función de la tarea y la búsqueda de la técnica se observó el tipo de contrato que se establece entre profesor y alumnos.



- G. Una Organización Matemática Local Relativamente Completa (OML-RC) en la que se genera el proceso de estudio de la actividad matemática. Se identificaron los momentos didácticos que los profesores en formación pusieron en juego a lo largo de las sesiones propuestas.

Con base en dicha estructura y en el equipamiento inicial con el que cuentan los alumnos, en la primera etapa del estudio deben plantearse tareas en las que se utilicen las técnicas con que las ya cuentan los alumnos de sexto grado. En el caso que nos ocupa los profesores en formación plantearon los siguientes tipos de tareas:

- T1. Tareas relacionadas con el valor faltante que se resuelven con la técnica del valor unitario.
- T2. Tareas ligadas al valor faltante en tablas de variación proporcional que se resuelven con la regla de tres.
- T3. Tareas vinculadas con el uso de la razón que requieren la comparación de razones como técnica.
- T4. Tareas asociadas con la variación proporcional de tres magnitudes que pudieran servir de preámbulo para la inclusión de técnicas algebraicas.
- T5. Tareas asociadas cuyo propósito es establecer la significación y el uso del modelo aritmético.

Cabe señalar que si bien estos tipos de tareas se plantean en una secuencia similar a la del REI que «vivieron» los profesores en formación,<sup>2</sup> el proceso de estudio que gestionaron es el objeto principal de nuestro análisis en este capítulo.

## 7.2. LA PRAXEOLÓGICA DIDÁCTICA DE JOSÉ. ENTRE LA AUTONOMÍA Y EL CONTROL

Al considerar que los REI surgen y son el estudio de cuestiones problemáticas cuya resolución requiere la construcción de una serie de praxeologías, la cuestión generatriz aparecerá como una forma de hacer «vivir» la actividad matemática en el salón de clase (Rodríguez, Bosch, Gascón, 2006), en otras palabras, la cuestión generatriz es la «razón de ser» de la reconstrucción de las praxeologías.

2. El M1 del REI-FP (vivir el REI) tenía como intención principal promover la evolución de técnicas aritméticas hacia técnicas algorítmicas, lo que se hace presente en el recorrido que reconstruyen en la escuela primaria.

Para tal efecto es necesario que los alumnos dispongan de recursos que les permitan apropiarse de la cuestión inicial dado que en los momentos del primer encuentro y exploratorio, el profesor en formación les «devuelve»<sup>3</sup> la responsabilidad de su aprendizaje para que analicen y exploren los elementos que conforman la praxeología matemática implícita en la tarea planteada.

El primer momento didáctico representa el primer encuentro de los alumnos con la praxeología y permite que la analicen para comprender su estructura, su significado, el tipo de tarea que se está planteando y la técnica que puede ser empleada para su resolución. Este primer momento puede gestionarse de formas diversas y la diversidad no sólo está determinada por las tareas matemáticas sino también por las tareas didácticas que el profesor en formación pone en juego.

### *7.2.1. El momento del primer encuentro o la devolución parcial*

José es un profesor en formación en el que destaca su gusto por enseñar matemáticas y por la facilidad que tiene para diseñar tareas. No obstante, como se trata de experimentar un REI que difiere del modo de trabajo convencional de la escuela primaria, las tareas que plantea a los alumnos tienen un nivel de complejidad menor a las que corresponden a dicho grado escolar.

José gestiona el momento del primer encuentro mediante una tarea en la que se relacionan dos magnitudes (cantidades de Coca Cola y Pepsi Cola) expresadas en números enteros y decimales, se trata de encontrar el valor faltante. Como se puede apreciar en el siguiente fragmento, de la situación generatriz se derivan otras tareas. Para resolver la primera se puede usar la técnica del valor unitario como operador con magnitudes enteras, fraccionarias y decimales.

La forma de gestionar el momento del primer encuentro tiene que ver con una especie de «devolución parcial», porque «devuelve» la tarea pero no se preocupa por devolver el «medio»<sup>4</sup>, es decir, no realiza acciones que permitan al alumno recuperar el significado de la tarea antes de intentar solucionarla. La devolución «sólo del problema» es una manera de gestionar el primer encuentro

3. La devolución es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia (Brousseau, 2007, p. 87).

4. Desde la perspectiva de Brousseau (1977, en Ávila, 2001) el medio implica todo lo que actúa sobre el alumno o sobre aquello en que recae la acción del alumno por lo que tiene un papel fundamental en el aprendizaje al causar adaptaciones a propósito de un objeto de enseñanza.

y como se puede ver en el siguiente fragmento José les da «señales» (hagan dibujitos, operaciones...) sobre la manera en que lo pueden resolver.

— José. Les voy a entregar una hojita donde vienen algunas instrucciones, la deberán pegar en su cuaderno y resolver de manera individual el problema de «El refresco», que dice lo siguiente:

En nuestro país se consumen grandes cantidades de refresco, principalmente de cola (negro); entre los más consumidos encontramos la Coca y la Pepsi. Dichas marcas tienen algunas variaciones en sus precios; sin embargo, en la actualidad, la botella de Coca tiene un precio de \$25, mientras que la botella de Pepsi es de \$20.

¿Cuál es el costo de 4 botellas de Pepsi?

¿Cuánto se debe pagar por  $\frac{3}{4}$  de botella de Pepsi?

¿Cuánto debe de pagar por 0.750 partes de una botella de Pepsi?

Si se quisiera comprar \$25 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas le darían?

Y si se compraran \$15 de Pepsi, ¿qué cantidad de botellas tendría?

Y si sólo se compraran \$12.50, ¿qué cantidad de botellas sería?

—José. ¿Quién me falta de entregarle el problema?

—As. Yo, yo.

—José. Lean el problema, piensen cómo lo pueden resolver, hagan dibujitos, operaciones, lo que ustedes crean que pueden usar para resolverlo.

Como hemos mencionado, el fragmento anterior da cuenta de un proceso de devolución «parcial» en el que José entrega la tarea e indica las técnicas posibles, es decir sólo presenta el problema pero no gestiona una validación del significado conceptual y sintáctico del problema, es decir, no despliega una técnica didáctica que le permita saber si los alumnos han comprendido el problema, si se percatan del tipo de relaciones que hay entre las magnitudes y si tienen clara la cuestión que deben responder. No basta con plantear una situación a un alumno para que ésta se vuelva su problema a resolver y se sienta el único responsable de dicha resolución, tampoco basta que el alumno tome esa responsabilidad para que el problema se convierta en un problema universal. Es a través de la devolución que el profesor busca alcanzar ambos resultados (Brousseau, 1995).

Si con Brousseau existe la perspectiva de plantear situaciones donde «desaparece» el profesor (situaciones a-didácticas) para permitir al alumno la posibilidad de construir el conocimiento, de modo similar, en la Teoría Antropológica de lo Didáctico el momento del primer encuentro promueve una intervención de esta naturaleza.

### *7.2.2. El momento exploratorio. Aplicación y mayéutica*

El primer encuentro con la praxeología está ligado por lo general con el segundo momento didáctico, el momento exploratorio, es decir la transición entre uno y otro resulta a veces imperceptible por la similitud de las acciones que corresponden a uno y otro. El momento exploratorio alude a la revisión del tipo de tareas que han sido planteadas y a la búsqueda y elaboración de una técnica con la cual sea posible resolver dicha tarea.

La elaboración de dichas técnicas tiene una evolución gradual, la resolución de la tarea constituye el medio para que los alumnos identifiquen cuál es la técnica que resulta más eficiente, económica y por ende con mayor cercanía al saber convencional que pertenece a cada institución. En el momento de la exploración pueden aparecer diferentes fenómenos didácticos y formas de gestión.

#### *a) Exploración y devolución sin acompañamiento*

Una vez que José establece el primer encuentro con la devolución de la tarea, el momento de la exploración se lleva a cabo trabajando en equipo y es evidente que en este momento José asume dos tendencias, la más persistente tiene que ver con una posición lejana al alumno, es decir no acompaña ni busca la comprensión de la tarea, sólo espera que la resuelvan en los equipos. Este rol de mero observador se aprecia en el siguiente fragmento:

—As. (Trabajan sobre el problema mientras José camina entre las filas).

—José. ¿Ya terminaron?, Ahora se van a juntar en equipos de tres para comparar sus resultados.

—As. (Comentan los resultados obtenidos y en ciertos casos corrigen algunos errores de cálculo).

Durante el recorrido que se hizo por los equipos, más que comentar las técnicas empleadas, los alumnos sólo comparaban resultados y cuando éstos no coincidían

buscaban algún error de cálculo. Aunque en la mayoría de los momentos exploratorios que gestionó José, no acompañó el proceso de estudio con una devolución completa, se observaron algunas aproximaciones a los equipos (evocación y ma-yéutica) que podrían ser parte de una buena gestión del momento exploratorio.

*b) Exploración y «evocación». Aplicación y control*

Para Brousseau (1994b), en el contrato didáctico de aplicación y control,<sup>5</sup> resulta importante identificar la manera como los alumnos incorporan ciertos conocimientos, además de revisar si en el acto de enseñanza se ignora o se contempla lo que los alumnos han hecho previamente, si se identifica el nivel de aprendizaje que alcanzaron o si sólo llegaron al punto marcado en el programa de estudios.

El trabajo realizado al interior de los equipos constituyó el momento más claro de exploración de la técnica mientras que la «evocación»<sup>6</sup> se hizo más evidente cuando, luego de buscar individualmente una técnica, en el momento «colectivo del equipo» se discutieron las técnicas empleadas. En ese momento, bajo el supuesto de que los alumnos contaban con saberes previos se pretendió aplicar, controlar y dar respuesta a tareas más complejas, José planteó cuestiones relativas a la evocación.

—As. (Comienzan a resolver la tarea de manera individual).

—José. Ya que terminaron se van a juntar en equipos para comparar lo que hicieron. (Camina entre los equipos y en algunos casos interviene).

—Eq. 2. Aquí en ésta no le entiendo (se refiere a la segunda pregunta del primer problema).

—José. ¿Qué no entiendes?

—Eq. 2. ¿Nada más una botella?

—José. Por eso, ¿cuántas juntamos al inicio?

—Eq. 2. Dos.

—José. Dos, y ya sacamos cuánto valen esos dos ¿verdad?, ¿Cómo le haremos para saber cuánto vale sólo una de esa mezcla?

5. En este tipo de contrato el receptor decide si se considera lo suficientemente informado o si se requiere más información, aquí el informador toma a su cargo parte de esa responsabilidad dando al informado un criterio para determinar si se ha comprendido bien el saber comunicado. Ese criterio busca establecer una relación entre los saberes comunicados y el del ámbito de las aplicaciones (Ávila, 2001).

6. Perrin (1993) distingue dos tipos de situaciones de evocación: «las que evocan una situación de acción, no inmediatamente después de realizada sino otro día, y las que se refieren a una serie de problemas sobre un tema, que ha abarcado un período prolongado de tiempo» (p. 59).

—Eq. 2. Dividiendo.

—José. ¿Qué?

—Eq. 2. Dividiendo el 25 entre el 20.

—José. ¿Estás seguro?

—Eq. 2. No.

Como se puede apreciar, a pesar de que los alumnos han reconocido la técnica adecuada (la división o el valor unitario como operador), José no valida su respuesta, pone a discusión la respuesta del alumno con el resto del equipo y cuando éste no puede justificar la técnica José sigue cuestionando para «evocar» la respuesta correcta. No obstante que la intención de José es que los alumnos regulen y validen por sí mismos, los orienta hacia la respuesta en lugar de permitir que sean ellos mismos quienes encuentren el uso y la funcionalidad de la técnica, esto se puede ver en el siguiente fragmento:

—José. Mira juntamos una botella de Pepsi y una de Coca entonces tenemos una mezcla, ¿esa mezcla cuánto vale?

—Eq. 2. Cuarenta y cinco.

—José. Pero esa mezcla solamente ocupó una botella y quiero saber cuánto vale, ¿Cómo le harías?

—Eq. 2. ¿Dividiendo qué?

—Eq. 2. Lo que costó, los 45 entre 1.

—José. ¿Cuánto es 45 entre uno?

—Eq. 2. 45.

—José. Entonces no ¿verdad?, el resto del equipo ¿qué opina?

—Eq. 2. Dividir entre 45.

—José. ¿Están seguros? No será al revés, si dividimos chicles entre 45 niños ¿de cuánto les toca?

—Eq. 2. Ah no entonces es 45 entre 2, sale 22.5.

—José. Muy bien.

Como la tarea implica el manejo de magnitudes compuestas (mezclas), es evidente que los alumnos reconocen en la división la técnica pertinente, sin embargo por la falta de comprensión de la tarea la usan con un acomodo azaroso de las magnitudes (45 entre 1, dividir entre 45), frente a esto, José lanza cues-

tionamientos ¿cómo le harías?, ¿dividiendo qué?, ¿cuánto es 45 entre uno?, para señalar que la técnica es incorrecta. Con esta acción José se vuelve parte de la exploración, toma el papel que corresponde a los alumnos cuando señala: «Entonces no ¿verdad?, A ver el resto del equipo ¿qué opina?» y «¿están seguros? No será al revés, si dividimos chicles entre 45 niños ¿de cuánto les toca?». Congruente con su papel, al final valida la acción.

Ante las dificultades de los alumnos para la resolver la tarea, José se ve obligado a dar un indicador (*si dividimos chicles entre 45 niños*) que los lleve a la respuesta esperada, acción que parece evocar tareas ya resueltas, con esto los alumnos tienen la oportunidad de volver a discutir el sentido de los conocimientos que están en juego en las tareas propuestas.

Desde la perspectiva de Perrin (1993), cuando se tiene la necesidad de hablar sobre algo que ya se ha hecho sin que tenga que volver a realizarse se ofrece la oportunidad de reconstruir el papel que tienen las tareas trabajadas en el aprendizaje, pero en este caso el profesor tiene dificultades para gestionar el momento exploratorio y por ello señala la técnica adecuada para resolver la tarea.

### *c) El momento exploratorio a través de la mayéutica*

En varios momentos didácticos como el exploratorio, la mayéutica socrática<sup>7</sup> aparece como una de las técnicas didácticas más utilizadas, aunque no siempre se utiliza de la misma manera, el objetivo de las preguntas cambia en función del propósito del profesor. En algunos casos se orientan a la comprensión del problema, en otras hacia el proceso de identificación de la técnica.

En el proceso de estudio que dirigió José, fue común que se estableciera un contrato didáctico basado en la mayéutica socrática y los cuestionamientos se emplearon frecuentemente para identificar las técnicas adecuadas y la justificación de las mismas, en el siguiente fragmento puede verse esta acción.

—José. ¿Y en el último problema? (Los alumnos de este equipo tienen escrito el problema, pero no hay evidencia de su técnica, sólo del resultado).

—Eq. 1. Pepsi, Porque son 15 botellas y por cada 15 te regalan 4 y por cada 5 te dan una.

7. Conforme a este contrato, el profesor escoge preguntas de las cuales el alumno pueda encontrar las respuestas con sus propios recursos. Las preguntas se modifican en función de las respuestas del alumno (Ávila, 2001, p. 34).

- José. ¿Y cómo sacaste eso?
- Eq. 1. Porque Perla nos dijo que así le hiciéramos.
- José. ¿Y eso qué? que Perla les haya dicho, ¿ya está resuelto?, ¿está bien? A ver explícame, ¿por qué en una dan 4 y en otra dan 1?
- Eq. 1. Mmmm.
- Eq. 1. Porque me está pidiendo que ha estado disminuyendo el consumo de refresco debido al sobrepeso en la población, así que las dos marcas tuvieron que manejar ofertas para que las personas volvieran a comprar, entonces pusieron promociones en una, entonces por cinco botellas de Coca me regalan una y por cada quince de Pepsi me regalan cuatro entonces aquí nos dan más.
- José. Sí, pero piensen cómo pueden explicar cuál promoción conviene más.

Como los alumnos no responden con una técnica precisa, José continúa cuestionando, no tiene la intención de señalar la técnica, pero supone que sólo a través de las preguntas ellos podrán encontrarla.

### *7.2.3. El momento de la constitución del entorno tecnológico teórico. La multifunción de la tecnología*

La constitución del entorno tecnológico-teórico es un momento didáctico que se relaciona con el momento del primer encuentro porque hay tareas en las que se plantea una cierta relación tecnológica-teórica previamente elaborada o con los indicios de un entorno que busca crearse mediante la expresión de una relación dialéctica ante la emergencia de la técnica y su posterior dominio<sup>8</sup> (Lucas, 2010). Esto significa que para diseñar una tarea es necesario dominar el discurso teórico que orienta la organización, la progresión y la concreción de la praxis hacia la búsqueda de una técnica en particular, en este sentido, para que se pueda establecer dicha técnica debe existir una tecnología, un discurso que describa la técnica como producto de un proceso de estudio.

Desde esta perspectiva, Chevallard (1999) señala que la primera función de la tecnología es justificar la técnica, asegurar que produzca bien eso que es pretendido, la segunda función es la de explicar, la de esclarecer la técnica, esto es, explicar por qué está bien y una última función es la de la producir nuevas técnicas.

---

8. El cuarto momento es el del trabajo de la técnica, en el que se busca dominar la técnica. Con el trabajo en este momento la técnica se vuelve más eficiente y confiable, lo que implica a su vez retocar la tecnología, así en la medida en que una técnica se practique, se adquiere habilidad en su uso hasta llegar a emplearla de manera automática en la tarea asignada.



Ahora bien, en los procesos de formación de profesores es preciso desarrollar técnicas didácticas que permitan resolver las tareas de enseñanza en la escuela, por lo general dichas tareas aluden a un discurso legitimado en la institución que las produce. En este caso se puede decir que hay una doble mirada tecnológica, por un lado, de la institución formadora de docentes y por el otro, de la institución en la que se lleva a cabo la enseñanza de las praxeologías matemáticas, es decir la escuela primaria. En ambas instituciones el discurso tecnológico de la praxeología didáctica se sustenta en la Didáctica de las Matemáticas.

Esta doble postura discursiva mostraría, según Chevallard (2007), una cierta ambigüedad sobre la naturaleza y función del discurso tecnológico-teórico de una praxeología matemática, puesto que «es tecnología eso que, en una institución o para una persona, cumple la función tecnológica. Del mismo modo, es teoría eso que asume, en cierta institución o para cierta persona, una función teórica» (p. 714). Este argumento justifica la idea de que el discurso tecnológico, aunque parte de un campo del saber, no se le valora por su pertenencia a ese campo sino por su pertenencia a una institución determinada, esto significa que, por ejemplo, el estudio de la proporcionalidad no es el mismo en una institución formadora de maestros que en una institución formadora de ingenieros.

En correspondencia con las ideas de Aguayo y Mendoza (2015), para el caso de las organizaciones didácticas existe un problema similar, dilucidar si las instituciones aceptan la existencia de teorías didácticas que justifican las técnicas y las tecnologías empleadas para resolver tareas didácticas o si por el contrario, reconocen la ausencia de tales teorías y aceptan sólo discursos tecnológicos (sin teoría) que explican las técnicas empleadas en la solución de tareas didácticas. De modo similar a lo que ocurre con el discurso matemático, el discurso didáctico se verá delimitado por la institución al considerar la existencia de una teoría referencial o sólo la presencia de una tecnología.

En este mismo sentido, Castela y Romo (2011) señalan todas las diversas funciones posibles del discurso tecnológico de una praxeología.<sup>9</sup> En el siguiente fragmento puede verse la manera como José, frente a una tarea de valor unitario como operador de números decimales, gestiona el momento tecnológico y hace aparecer varias funciones del discurso tecnológico.

---

9. Según Castela y Romo (2011), las funciones del discurso tecnológico son: describir la técnica, facilitar la aplicación de la técnica, motivar la técnica y los gestos que la componen, evaluar la técnica, validar la técnica y aplicar la técnica.

—José. Bien, ya que terminaron de comparar sus resultados vamos a ver qué fue lo que obtuvieron. A ver ¿quién pasa a mostrarnos lo que hicieron?

—A1. Yo, el problema nos habla de dos refrescos, la Coca y la Pepsi, cada uno tiene diferente precio, entonces en la primera pregunta dice ¿cuánto se debe pagar por 0.750 partes de una botella?

—José. ¿Quién nos muestra lo que hizo?

—Lupita. Yo multipliqué 0.750 por lo que cuesta la botella completa (pasa al pizarrón y multiplica  $0.750 \times 20 = 15.00$ ).

—José. ¿Por qué le hiciste así?

—Lupita. Lo hice así porque si lo dividía me iba salir más chiquito.

—José. Pero, ¿por qué multiplicaste?

—Lupita. Porque era el costo de la Pepsi.

—José. Pero, ¿por qué por 0.750?

—Lupita. Porque por esa parte pide el problema.

—José. Entonces, ¿qué costará más? ¿Una botella o 0.750 de una botella?

—As. Una botella.

Como se puede apreciar, una vez que los alumnos desarrollaron el momento exploratorio, José pide describir la técnica cuando pregunta ¿Quién nos muestra lo que hizo?, con la descripción, no sólo identifica el dominio de la técnica sino el uso de un vocabulario adaptado a la tarea, lo que permite a Lupita identificar los datos a considerar para la solución.

Por otro lado, cuando cuestiona ¿por qué multiplicaste?, José busca que la tecnología permita al alumno validar la técnica, es decir, que justifique en función de cierto referente, que produzca aquello que dice producir y si al usarla se alcanzan los objetivos fijados; es por ello que Lupita justifica la razón de usar la multiplicación y no otra técnica.

Una tercera función, la de explicar la técnica, se observa cuando José pregunta ¿por qué multiplica por 0.750?, en otras palabras, lo que pide es explicar por qué la técnica hace bien lo que se espera que haga y por qué su uso produce tal resultado. Aunque la alumna no lo explica de manera amplia, señalar que esa parte pide el problema y que el costo de una botella es mayor al costo de 0.750 de botella, alude a la explicación de la técnica al indicar que eso permite identificar los costos requeridos. Otras funciones de la tecnología presentes en la gestión de José, fueron la motivación y evaluación de la técnica:

—José. ¿A alguien le salió de otra forma? ¿Tú lo hiciste de otra forma?, Pásale.  
 —A6. (Escribe  $1000 - 750 = 250 = \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4} = 15$  de 20) luego afirma «mil menos 750 es igual a 250 que sería  $\frac{1}{4}$  por tres, que sería  $\frac{3}{4}$  que es igual a 15 de 20.  
 —José. ¿Sí entendieron por qué  $1000 - 750$ ?  
 —A6. Porque 1000 serían los  $\frac{4}{4}$  y 250 sería  $\frac{1}{4}$ .  
 —José. ¿Sí entendieron?, ¿Alguien lo hizo de otra forma?, pásale Reyes, borra el pizarrón.  
 —Reyes. ¿Cómo era la pregunta?  
 —As. ¿Cuánto se debe pagar por 0.750 de una botella de Pepsi?  
 —Reyes. (Escribe)

|      |    |
|------|----|
| 100% | 20 |
| 75%  | X  |

—Reyes. El 100% es igual a 20, el 75% es lo que queremos saber cuánto es?, primero es  $75 \times 20$ , aquí está la operación y me da 1500, ese resultado lo divido entre 100 y me da 15.  
 —José. ¿Cómo se le llama a eso que aplicó Reyes?  
 —As. Regla de tres.  
 —José. Sí se acordaban que ya la habíamos visto ¿o no?  
 —As. Sí.  
 —José. ¿Y sí le salió el resultado?  
 —As. Sí.  
 —José. Es un poco complejo, pero sí le salió bien, ¿cuál procedimiento utilizarían de los tres?  
 —As. El de Lupita.  
 —José. ¿Alguien utilizaría otro?  
 —As. El de la lógica.  
 —José. ¿Por qué el de la lógica?  
 —A1. Porque ya sabiendo, bueno porque algunos ya se les graba que 0.25 es igual a  $\frac{1}{4}$ , ahora 0.75 es tres veces 0.25 son  $\frac{3}{4}$ .  
 —José. ¿Y ya sería lo del problema anterior?  
 —A1. Sí.  
 —José. Muy bien, siguiente pregunta Gema.

En la primera parte del fragmento se observa que además de la descripción de la técnica, el profesor busca que desplieguen la motivación, es decir que identifiquen para qué se utiliza tal técnica y si produce el efecto buscado. Cuando cuestiona si entendieron ¿por qué 1000-750?, está favoreciendo que los alumnos anticipen las etapas de la técnica y se preparen por si es necesario adaptarla a otro contexto. En este caso, la técnica requiere que se comprenda que 0.750 –lo que numéricamente plantea la tarea– se transforma en 750 para facilitar su manipulación dado que se está trabajando con decimales.

En la segunda parte del fragmento, cuando el alumno usa una técnica diferente, el profesor pretende que la evalúen, por ello pregunta *¿cómo se le llama a eso que aplicó Reyes?*, es decir busca que identifiquen el tipo de técnica a partir de la estructura y el acomodo de los datos. Aunque, una vez que los alumnos señalan que se trata de la «regla de tres», el profesor tiene dificultades para expresar la ergonomía de dicha técnica, es evidente cuando afirma *«es un poco complejo, pero sí le salió bien»*. Esta situación provoca que en lugar de identificar la regla de tres como una técnica eficiente para la resolución de la tarea, los alumnos la vean como una técnica difícil de aplicar, por lo que prefieren utilizar la técnica de «la lógica» como señala A1.

El fragmento anterior permite inferir que, aunque la gestión del momento tecnológico ha permitido describir, explicar y motivar la técnica, no hay una validación sobre la eficiencia y eficacia de cada técnica mostrada, es decir, no hay una evaluación sobre las técnicas. En otras tareas planteadas, tal como se muestra en el siguiente fragmento, el tipo de preguntas que plantea el maestro provocan la reflexión sobre el dominio de la técnica utilizada.

—José. Vamos a ver qué pasa con el siguiente problema que dice: «Se realizó una encuesta acerca de las preferencias hacia las dos marcas de refresco de Cola, obteniendo los siguientes resultados: 8 de cada 15 personas prefieren Pepsi y 7 de cada 11 prefieren Coca». ¿Qué marca de refresco de cola prefiere más la población?, ¿qué porcentaje representa la población que lo prefiere en cada caso? A ver Germán pasa a explicarnos.

—Germán. Son ocho de cada 15 serían  $8/15$  se divide ocho entre quince (escribe  $80 \div 15$ ) y salen 53.3, en el otro 7 de cada 11 serían  $7/11$  y si lo divido (escribe  $70 \div 15$ ) me sale 63.6.

—José. ¿Y por qué 70? ¿Y por qué 80?

—Germán. Porque son las personas que prefieren Pepsi.  
 —José. ¿70?  
 —Germán. (Señala el 80).  
 —José. Por eso ¿y por qué 80?  
 —Germán. Porque si divido 8 entre 15 sale cero y por eso le agrego el cero al ocho.  
 —José. Pero después de que se agrega el cero ¿nomás se agrega el cero y ya?  
 —Germán. (Se queda pensando).  
 —José. ¿Cómo se hacen esas divisiones?  
 —A1. Como 15 no cabe en 8, se pone el punto y se agrega un cero al lado del ocho, después cuántas veces cabe 15 en el 80 cabe 5, después 5 por 15 son 75.  
 —José. ¿Entonces dónde iría el punto?  
 —A2. (Pasa, corrige el cociente y coloca 0.53 y 0.63) ya no se le seguiría porque se repite el resultado por ejemplo en el 0.53 sería 333333 y así.

Como se puede apreciar, una vez identificada la técnica, el maestro pide la descripción, aunque es evidente que Germán tiene dificultades para explicar por qué se divide entre 70 y 80, es por ello que el profesor busca facilitar la aplicación de la técnica cuestionándolo sobre el algoritmo, lo que favorece su uso, mejora y la prevención de posibles errores. Sin embargo, la función de la tecnología se limitó al dominio de la división, cuando cuestiona ¿cómo se hacen esas divisiones? la atención se centra en el manejo de decimales no así en el uso de la fracción como razón, que inicialmente Germán había planteado al señalar 8 de cada 15 serían  $\frac{8}{15}$  y que corresponde a la tecnología implícita en la tarea planteada. Una vez que el profesor facilita la aplicación de la técnica, como se puede ver en el siguiente fragmento, nuevamente gestiona su descripción al preguntar a otro equipo sobre la técnica empleada.

—José. ¿Lesly ustedes cómo le hicieron?  
 —Lesly. (Coloca el signo de porcentaje al lado de los cocientes, queda 53% y 63%), mejor le mostramos otro procedimiento (pasa la compañera de equipo y anota).

$$15 \rightarrow 100\%$$

$$8 \rightarrow ?$$

—Lesly. Aquí vamos a multiplicar 8 por 100 y salen 800 luego esos 800 los vamos a dividir entre 15.

—José. ¿Cómo se le llama a eso?

—As. Regla de tres.

—José. ¿Y sale qué?

—Lesly. 53.

—José. Entonces ¿qué era lo único que le faltaba a Germán?

—As. Los puntos.

—As. Multiplicarlo por cien.

—José. ¿Para qué multiplicarlo por 100?

—As. Para sacar el porcentaje.

—José. Germán estaba bien nada más le faltaba multiplicarlo por 100.

—Lesly. (Escribe lo siguiente:)

$$11 \rightarrow 100\%$$

$$7 \rightarrow ?$$

—Lesly. Hacemos lo mismo que el anterior, multiplicamos y luego dividimos pero ahora nos sale 63.

—José. ¿Entonces cuál prefieren más?

—A1. Los dos están bien.

—José. ¿Pero cuál prefiere más la gente? ¿La Coca o la Pepsi?

—As. La Coca.

—José. ¿La Pepsi cuánto?

—A2. Tres.

—José. ¿Tres qué?, ¿cuánto porcentaje prefieren la Pepsi?

—As. 53.

—José. ¿Y la Coca?

—As. 63.

—José. ¿Entonces cuál prefieren más?

—As. La Coca.

—José. ¿Alguien tiene otro procedimiento?, ¿cuál se les hace más fácil? ¿El de la fracción o el de la regla de tres?

—As. (Algunos dicen que la fracción y otros que la regla de tres.

—A2. Pues en los 2 se multiplica y se divide ¿no?

—José. Exactamente, en los dos te tardarías lo mismo. Muy bien.

En la primera parte del fragmento anterior se observa cierta continuidad con la técnica implementada por Germán, además de facilitar la aplicación de la técnica el profesor pretende motivarla y consolidar sus etapas, esto es evidente cuando pregunta por el resultado de las divisiones y el propósito de la multiplicación en la regla de tres. También pretende que evalúen la técnica y que señalen su funcionalidad en una tarea de porcentaje, con esta acción delimita el campo de eficacia y los límites de la técnica en función de la tarea.

La identificación de la técnica más económica y eficiente también se gestiona y como no se hace énfasis sobre el uso de alguna en particular, se permite que sean los alumnos quienes a partir de la validación de la técnica decidan cuál resulta más pertinente.

A partir del análisis anterior, se puede observar que generalmente el profesor José gestiona los momentos tecnológicos a través de cuestionamientos que permiten la aparición de cuatro funciones de la tecnología: la descripción de la técnica, la facilitación de su aplicación, la motivación de la técnica y los gestos que la componen, así como su validación. La explicación y la evaluación de la técnica llegan a hacerse presentes, pero aparecen en menor número de veces.

#### *7.2.4. Las diversas facetas de la institucionalización*

La institucionalización es el momento de estudio de una praxeología que permite la precisión del saber formalizado, varios han sido los autores que han descrito este momento para dar cuenta de la puesta en juego de un saber convencional desde la perspectiva del profesor, a decir de Covián (2005 en Castela, 2008) «es a través del proceso de institucionalización que la práctica social viene a ejercer la función normativa, a constituirse en algo que ya no es propio del individuo, sino del grupo social; es a través de este proceso que la construcción del conocimiento llega a constituirse para formar parte de un sistema o grupo social» (p.160).

Sobre este concepto Brousseau (1982) afirma que las situaciones de institucionalización tienen por objetivo establecer convenciones sociales, a partir de éstas se intenta que los alumnos asuman una significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones previas

de acción, formulación y validación. Es en la situación de institucionalización donde los profesores observan lo que los alumnos han elaborado, describen lo que ha sucedido en términos del conocimiento en cuestión, otorgan un estado a los eventos de la clase en función de los resultados de los alumnos y de la enseñanza, permiten asumir un objeto de estudio, acercar las producciones del conocimiento a otras creaciones y la identificación de producciones que pueden ser reutilizadas nuevamente.

Desde esta perspectiva, los conocimientos son los medios transmisibles [...] aunque no necesariamente explicitables, de controlar una situación y obtener de ella determinado resultado conforme a una expectativa y a una exigencia social. El saber es el producto cultural de una institución que tiene por objeto identificar, analizar y organizar los conocimientos a fin de facilitar su comunicación (Brousseau y Centeno, 1991, en Brousseau, 2007, p. 28).

Se puede decir que la institucionalización constituye un momento de cierre de una situación didáctica en la que los alumnos ya han construido un conocimiento, pero es el docente quien retoma ese proceso de construcción para formalizarlo. En la fase de institucionalización el docente corre el riesgo de que los estudiantes se limiten sólo a la validación de procedimientos o técnicas informales y que se desconozca el sentido real de la situación didáctica en tanto medio para el estudio de un objeto matemático.

Por su parte Chevallard (1999), señala que la institucionalización tiene como objetivo precisar el significado de una praxeología elaborada, proceso en el que se distinguen los elementos involucrados en su construcción, tanto los que no hayan sido integrados como aquellos que se inscriben de modo definitivo en la praxeología, es decir constituye una «distinción que buscan precisar los alumnos cuando le preguntan al profesor, a propósito de tal resultado o tal procedimiento, si hay o no que saberlo» (pp. 249-255).

El profesor en formación institucionaliza la técnica convencional, la que usa el grupo social, podrá decir qué técnicas vale la pena institucionalizar, pero no las institucionaliza si no son técnicas convencionales. A partir de la institucionalización una técnica se consolida como herramienta útil y eficiente al justificarse a partir de un cierto discurso tecnológico-teórico.

Un primer acercamiento a la institucionalización ocurre cuando José se



apoya en la gestión del momento tecnológico-teórico para intentar hacer el cierre de la tarea<sup>10</sup>:

—José. Pero, ¿por qué dividieron?

—A3. Para ver el número de botellas que se comprarían con ese precio.

—José. ¿Quién lo dice o qué determina lo que tienes que dividir?

—As. Para obtener un resultado.

—José. Sí, es obvio si vas a dividir es para obtener un resultado, pero ¿por qué se tiene que dividir? ¿Qué parte del problema te hizo pensar que tenías que utilizar una división?, eso es lo que queremos saber, ¿si hubo una parte del problema que les diera una pista de lo que tenían que multiplicar en uno y dividir en otro? ¿En qué parte observan que dice aquí debo dividir, aquí debo multiplicar?

—Enrique. Porque es lo que estamos viendo.

—José. ¿Porque es lo que están viendo? ¿Por eso saben?, estamos hablando del problema, analicen el problema, véanlo, léanlo, ¿qué parte me dice que es división y qué parte me dice que es multiplicación.

—A3. Yo vi que el precio y el número de botellas van aumentando, vi el precio e intenté convertirlo con el precio de la Coca Cola, para saber cuántas botellas se iban a comprar.

—José. A ver en el primer problema, dijeron que era una división, pero qué les ayuda a encontrar que es una división, ¿porque dividir? algunos dieron otro procedimiento por ejemplo dijeron que podían sumar 25 varias veces hasta llegar a 4600, esa era una opción, pero dijiste no mejor vamos a dividir ¿qué parte de ese problema te ayudó a tomar esa decisión?

—A3. En que era más tardado y llegábamos al mismo resultado.

—José. Muy bien, entonces aunque hay diversas formas de resolver un problema, hay algunas que nos permiten hacerlo más rápido que otras, lo importante es comprender qué nos pide el problema para saber cuál vamos a utilizar. Bueno con esto terminamos.

Como se puede apreciar, pareciera que José va a institucionalizar la técnica (división) más utilizada en la solución de la tarea, pero no se observan indicios

---

10. El problema era: «Pablo desea hacer una fiesta, pero al comprar todo lo que ocupaba para realizarla, le sobraron \$4600 para comprar el refresco, ¿cuántas botellas de Coca ajustará si cada botella tiene un precio de \$25?

de un saber convencional que pueda ser institucionalizado, ni de la técnica más eficiente para resolver ese tipo de tareas, de manera que este momento se utiliza sólo para señalar que hay diversas formas de resolver un problema y que deben elegirse aquellas que permiten resolverlo de forma más rápida, más que una institucionalización esta acción es una orientación para la solución de futuras tareas que una formalización de la praxeología matemática.

El siguiente fragmento muestra un momento en el que el profesor elige una técnica para la institucionalización. Cabe aclarar que previamente se resolvieron tareas del mismo tipo y se identificaron ciertas técnicas para su resolución, la que aquí aparece constituyó el mayor acercamiento a la convencionalidad.

—José. Pásale Richard, con el tercer problema.

—A4. Yo lo leo «Ha estado disminuyendo el consumo de refresco debido al sobrepeso en la población, así que las dos marcas tuvieron que manejar ofertas para que las personas volvieran a comprar: al comprar cinco botellas de Coca te regalan una más y por comprar 15 botellas de Pepsi te regalan cuatro botellas más. ¿Cuál promoción resulta mejor?»

—Richard. La de la Coca.

—José. ¿Por qué?

—Richard. Nomás así le puse.

—José. ¿Y luego?

—As. Yo profe, yo.

—José. A ver espérense. Lee otra vez el problema por favor (se lee nuevamente) ¿cuál crees Reyes?

—Reyes. Coca cola.

—José. ¿Por qué?

—Reyes. No sé.

—José. A ver Ángel, tú estabas en el mismo equipo, ¿qué dices? ¿Es la Coca?

—A. (no contesta).

—José. Nomás estaban jugando ¿verdad?

Una vez que los alumnos pasaron por el primer encuentro y el momento exploratorio, José gestiona el momento tecnológico-teórico con resultados poco favorables, dado que los cuestionamientos que lanza parecen indicar falta de comprensión de la tarea y más aún la ausencia de una técnica, puesto que los

alumnos sólo dan una respuesta aleatoria sin un discurso tecnológico. No obstante, en el siguiente fragmento se observa que un alumno (Enrique), muestra la síntesis de una técnica que iguala ambos tipos de gaseosas para poder compararlas y es esa técnica la que permite gestionar el momento de la institucionalización.

—Enrique. ¡¡Yo paso!!

—José. A ver Enrique pásale y ustedes pongan atención.

—Enrique. (pasa y escribe lo siguiente:)

15 botellas de Coca te regalan 3

15 botellas de Pepsi te regalan 4

PEPSI

—José. Bien, ahora explícalo.

—Enrique. Quince botellas de Coca te regalan tres y 15 botellas de Pepsi te regalan cuatro, entonces conviene más la de Pepsi porque además de que te regalan una más, su precio es más bajo.

—José. ¿Y por qué dices que con 15 botellas de Coca te regalan tres?

—Enrique. Porque....

—A6. Porque es un múltiplo de 5 (en voz baja).

—José. ¿Por qué Vitalia? Él dice que por cada 15 botellas de Coca te regalan tres.

—Vitalia. Porque por cinco botellas te regalan una.

—José. ¿Y luego?

—Vitalia. Entonces por 15 regalan tres.

—Arath. ¡¡Yo profe!!

—José. ¿Por qué Arath?

—Arath. Porque por cinco botellas te regalan una y por decir, si compro tres veces cinco botellas serían 15 y me van a regalar tres botellas, serían 15 y 3 y acá por 15 botellas me regalan cuatro entonces en la primera (Coca) me dan menos que en la otra (Pepsi).

En el fragmento anterior puede observarse que Enrique desarrolla una técnica basada en la «igualación» de 15 botellas para cada tipo de refresco, lo que le

permite hacer una comparación y determinar cuál promoción resulta más conveniente, sin embargo muestra dificultades para establecer un discurso tecnológico que justifique esa técnica, es decir, explicar cómo y por qué hace dicha «igualación», son otros alumnos los que hacen alusión a dicho discurso cuando señalan que *15 es un múltiplo de 5 o si compro tres veces cinco botellas serían 15*, sin embargo, esa justificación resulta incomprensible para algunos alumnos:

—José. A ver Ángel ¿qué dijo Arath o qué razones tú de acuerdo a lo que dice el problema?

—Ángel. (No contesta).

—José. Ayúdale Richard.

—Richard. No, no sé.

—José. ¿Y tú Camila?

—Camila. (No contesta).

—José. ¿No Camila? Primero lo explicó Enrique y luego Arath, ¿ahora qué nos puedes decir tú?

—Camila. 15 botellas de Coca regalan 3.

—José. ¿Por qué? Porque eso dice ahí, pero ¿por qué puso eso Enrique?

—Camila. Porque... (No encuentra la respuesta).

—José. A ver Luis explícales.

—Luis. Por cinco botellas de Coca te regalan una, entonces por 15 te regalan tres y si compras la promoción de 15 botellas de Pepsi te regalan cuatro, es mejor que la primera promoción.

—José. ¿Sí entendieron?, ¿ya entendiste Richard?

—Richard. Sí, en la primera promoción son 15 botellas de Coca y te regalan tres.

—José. ¿Así dice el problema? ¿O cómo sacaron ellos que 15 de Coca regalan tres?

—Richard. No, o sea que si en la promoción de la Coca te dan tres.

—José. Lee el problema para que te ayudes. Fíjense bien, el problema dice que con la promoción en las botellas de Pepsi por cada 15 te regala 4 y en la de arriba (se refiere a la de la Coca) por cada cinco te regalan una, por eso igualaron la promoción 15 botellas de Pepsi y 15 botellas de Coca, 15 y 15 para poder comparar.

—José. ¿Cuántas promociones está comprando Enrique de la primera?

—As. Tres.

—José. Tres, ¿Y en la segunda?

—As. Nada más una.

—José. Entonces igualaron ahí, en la primera compró tres para igualar a 15 botellas las que iba a comprar, ¿si se fijan? Con una promoción de la segunda (Pepsi) son 15 y con tres promociones de la primera (Coca) ¿cuántas son?, ¿cuántas compra con tres promociones?

—As. 15.

—José. 15, ¿Y cuántos le dan?

—As. Tres.

—José. Muy bien una en cada promoción, ¿sí? a ver Ángel explícame porque ya son como cinco veces las que explicamos.

—Ángel. (Se queda callado).

—José. ¿No?

—Ángel. No.

—José. Levanten la mano los que entendieron (la mayoría la levanta), los mismos todavía no, ¿todavía no Camila?

—Camila. Que la promoción son que te den tres.

—Lesly. (Le explica) es que se trata de igualar los dos a 15 para poder ver en dónde nos dan más, así en las dos vas a pagar sólo 15 botellas, pero de Coca sólo te dan tres de regalo y en las de Pepsi te dan cuatro.

—José. ¿Ahora si Camila?

—Camila. Sí.

—José. A ver Ángel fíjate bien, ¿qué hacemos con el 5 para tener 15?, se suma tres veces y se llega a 15 y si vemos por cada 5 me dan una. (Representa lo siguiente apoyándose en lo que Enrique había hecho, pero agrega una suma iterada previa a los resultados).

5→1

+5→1

5→1

15→3

15 botellas de Coca te regalan 3

15 botellas de Pepsi te regalan 4

PEPSI

—José. Entonces al sumar todas las promociones también son 15 y me dan 3 y acá (Pepsi) también tengo 15 pero acá me están dando cuatro, entonces en los dos compro 15 pero aquí me dan más (Pepsi) por eso me conviene más comprar las botellas de Pepsi, ¿ahora si ya me entendieron? Por eso les decía yo que igualaron la promoción sus compañeros en 15 y 15.

Como se ha podido observar, José busca institucionalizar la técnica que utilizó Enrique y valida el resultado (*15 botellas de Coca te regalan 3 y 15 botellas de Pepsi te regalan 4*) cuando explica que en ambos casos se compran 15 botellas, pero se regala diferente cantidad. El intento de institucionalización se observa cuando José pregunta y responde a la vez *¿qué hacemos con el 5 para tener 15? se suma tres veces y se llega a 15*, al retomar la técnica de Enrique, el profesor considera que es la más viable y la explica al señalar la suma iterada que permite establecer la «igualación» de magnitudes a comparar.

Entonces, el profesor José recupera la técnica y la explica, es una técnica basada en tablas donde se representa la suma iterada. Sería interesante identificar la técnica convencional más corta que pudiera institucionalizarse, como la comparación de fracciones para conocer la fracción más grande, técnica que puede desarrollarse como suma de fracciones  $4/15 + 1/5 = (20+15) / 75$ . La primera es una tabla que permitiría la búsqueda de fracciones con igual denominador, esta técnica se basa en buscar una fracción equivalente de denominador 15, que es el principio de la suma, en la que primero se debe tener un denominador común que permita la suma o bien la comparación en el caso de la tarea que los alumnos resolvieron. Esta técnica recortada permitiría decir que  $4/15 + 1/5 = 20/75 + 15/75$  lo que sería un saber formalizado.

Se podría decir que en esta tarea José explica y justifica la técnica como parte del proceso de institucionalización, al hablar de igualación implícitamente la señala, dado que hubo tres técnicas y sólo elige una para justificarla y explicarla, al parecer en esa elección hay una intención institucionalizadora porque el mensaje es «este tipo de tareas en este grupo social de sexto grado se resuelve con esta técnica», lo que se convierte en el discurso tecnológico que justifica las técnicas.

Aquí, al parecer el profesor retoma una técnica, la esclarece, la explica y justifica si es efectiva con la igualación a 15 en ambas botellas, está probando la eficacia de la técnica, pero al parecer tiene dificultades para encontrar la técnica convencional en tareas relativas a la comparación de razones.

En la institucionalización se retoma la comparación de fracciones igualando denominadores, aunque no aparece la palabra fracción, es paradójico porque cuando los profesores en formación vivieron el REI trabajaron las fracciones como razón, lo que indica que en términos generales no identifican el concepto y el tipo de tarea, lo que si presenta el profesor es una técnica efectiva para ese tipo de situaciones aunque tiene dificultades para identificar la técnica convencional. Se puede decir que está presente la intención intuitiva de poner una comparación de razones, pero no aparece la técnica convencional, se queda en técnicas informales. Tampoco aparece el concepto ni se detecta que hay dos fracciones operando como razones.

Además de lo anterior se observa otro tipo de acercamiento a la institucionalización basada en el manejo de magnitudes, como se muestra en el siguiente fragmento:

—José. A Toñito y a José les gusta jugar a «Los científicos», decidieron mezclar una botella de Coca (\$25) y una de Pepsi (\$20) y vender su mezcla, ¿cuánto costará toda la mezcla?, ¿cuánto una botella de esa mezcla?

—José. A ver Ricardo explica cómo le hicieron en tu equipo.

—Ricardo. Primero se suma el precio de la Coca que es 25 y el precio de la Pepsi que es 20 y son 45 en total.

—José. ¿Entonces cuánto cuesta toda la mezcla?

—As. Cuarenta y cinco.

—José. ¿Y luego?

—Ricardo. Después divido 45 entre 2.

—José. ¿Por qué?

—Ricardo. Para saber cuánto costará una botella de esa mezcla.

—José. ¿Y cuánto salió?

—Ricardo. 22.5

—José. Bien, lee la siguiente Manuel.

—Manuel. Y si juntaran dos de Coca y una de Pepsi, ¿cuánto costaría toda la mezcla y cuánto una botella?

—As. Yo, yo, yo.

—José. ¿Quién no ha pasado en todos los días? A ver Wendy pasa tú.

—Wendy. (Escribe  $50 + 20 = 70 \div 3 = 23.33$ )

—José. Explica por qué hiciste eso.

—Wendy. Sumé  $50 + 20$ , 50 porque eran dos cocas y 20 porque sólo era una Pepsi el resultado da 70, luego dividí 70 entre tres.

—José. ¿Por qué entre tres?

—Wendy. Porque son dos Cocas y una Pepsi, en total tres. Y me salió 23.33

—José. 23.33 ¿Y eso qué significa?

—Wendy. Que es todo lo de la mezcla.

—José. ¿Es cierto eso?

—As. No. Es lo que cuesta sólo una botella de la mezcla.<sup>11</sup>

—José. A ver una pregunta, si vemos todos los resultados que obtuvimos de una botella, todas las cantidades están ¿entre cuánto y entre cuánto?

—As. Entre 20 y 25.

—José. ¿Y porque creen que está entre 20 y 25?

—As. Porque son los precios de las botellas.

—José. Levantando la mano, a ver Richard.

—Richard. Porque es el precio de las botellas de la Coca y la Pepsi.

—José. Muy bien, si juntáramos una mezcla de puras botellas de Pepsi, ¿cuánto saldría una botella?

—As. 20.

—José. ¿Y si juntamos una mezcla de puras botellas de coca?

—As. 25.

—José. Entonces por eso las cantidades están ¿entre cuánto y cuánto?

—As. 20 y 25.

—José. Muy bien ahora otra pregunta, en el problema C, ¿cuántas botellas juntamos?

—As. Dos de coca y una de Pepsi.

—José. ¿Cuánto nos sale el resultado de una botella?

—As. 23.3

—José. Porque creen que no salió más de la mitad, ¿cuánto es la mitad entre 20 y 25?

—As. 22.5

—José. ¿Por qué creen que en esa nos salió más de 22.5?

—As. Porque hay más de una que de otra.

—José Manuel. Porque hay más botellas de Coca que de Pepsi.

—José. ¿Y eso qué tiene que ver?

---

11. José plantea preguntas del mismo tipo variando las magnitudes de Coca y de Pepsi para la mezcla.



- José Manuel. Determina el precio de la Coca.
- José. Muy bien, ¿si hubiéramos juntado dos de Pepsi y una Coca qué pasaría?
- AS. Hubieran salido como 22, 21.
- José. ¿Hubiera salido menos de cuánto?
- As. De 25.
- As. De 22.5
- José. Exactamente, entonces el precio se determina según el refresco, mientras más Cocas se tengan el precio de una botella de la mezcla se acerca más al de las Cocas y mientras más Pepsis sean, entonces el precio de una botella de la mezcla será más cercano al de la Pepsi, esto es por las mezclas que hacemos y el número de botellas de cada tipo que mezclamos. Con esto terminamos.

Esta tarea es la última en el REI de José, en el fragmento puede verse que institucionaliza la relación entre magnitudes progresivamente desde el momento tecnológico-teórico. Su discurso se enfoca a determinar que el precio se relaciona con la cantidad de refresco y que la mezcla de ambos tipos de refresco determina el rango en el que se encuentra el precio de la mezcla, lo que está institucionalizando entonces es la relación de proporcionalidad entre magnitudes.

Al seguir a Chevallard (1999) puede decirse que la evaluación de la praxeología es necesaria porque es conveniente que el sujeto-alumno sepa lo que se ha estudiado de esa praxeología matemática y lo que quedaría por estudiar en otros momentos. Para Chevallard el momento tecnológico-teórico es más del alumno, igual piensa Brousseau (1982) acerca de la situación de validación, ambos autores lo consideran un momento a-didáctico, mientras que desde ambas perspectivas la institucionalización constituye el momento del profesor, aquel donde el saber y la práctica toman forma e intencionalidad.

### 7.3. LA TENDENCIA FORMALIZADORA. EL RECORRIDO DE LUIS

El segundo caso analizado es el de Luis, quien desde su ingreso a la escuela normal ha manifestado el gusto por las matemáticas y muestra un buen dominio del contenido matemático. El trabajo recepcional que está elaborando para obtener el título de licenciado versa sobre la enseñanza de un contenido matemático en la escuela primaria, por esta razón la experimentación del REI que diseñó recupera algunos aspectos de dicho trabajo.

### 7.3.1. El momento del primer encuentro. Devolución y comprensión del «medio»

Luis gestiona el momento del primer encuentro mediante la lectura colectiva de una situación problemática a partir de la cual plantea diversos tipos de tareas. En la primera establece una comparación directa sobre magnitudes y a partir de ello trabaja el valor unitario como operador pero sólo recupera magnitudes enteras:

—Luis. A cada uno le entregué una hoja con un problema, lee por favor el problema Nancy.

—Nancy. En una fábrica textil se producen dos tipos diferentes de calcetines para exportar, que varían su calidad según el algodón que utilizan en su elaboración. La caja de calcetines «Cotton» cuesta \$625 y la caja de calcetines «El Mexicano» cuesta \$885, debe aclararse que todas las cajas contienen la misma cantidad de calcetines.

—Luis. Hasta ahí, ¿cuánto cuestan los calcetines Cotton Diego?

—Diego. \$625.

—Luis. ¿Y cuánto valen los «mexicanos» Reina?

—Reina. \$885.

—Luis. Ahora sí, Edgar ¿cuánto costarán tres cajas de calcetines «Cotton»? Saquen su cuaderno y anotan ahí las operaciones que necesiten.

En este momento didáctico cuando cuestiona sobre los costos de los calcetines y el costo total de tres cajas se observa la devolución de la tarea como preludeo para su comprensión, los alumnos reflexionan sobre los datos para responder a los cuestionamientos del profesor y solamente hasta que se percata de que los alumnos identificaron las relaciones entre los datos, les pide que busquen la solución. Con su acción, el profesor da indicios de la importancia del valor unitario como técnica para resolver el problema, si bien dicha técnica no la explica, las expresiones: *Ahora sí, cuánto costarán tres cajas de calcetines Cotton y anotan ahí las operaciones que necesiten*, constituyen «señales» para que los alumnos retomen las respuestas a los cuestionamientos previos.<sup>12</sup>

Otra forma en la que Luis gestiona el primer encuentro con la praxeología consiste en hacer cuestionamientos para que los alumnos comprendan las es-

12. A esta situación Brousseau le denomina Efecto Topaze, que se presenta cuando el profesor sugiere la respuesta disimuladamente, planteando cuestiones que facilitan la resolución de la tarea.

estructuras conceptuales inmersas en el contexto problematizador. Generalmente este tipo de momentos suele presentarse en sesiones donde el profesor intenta recapitular los saberes adquiridos en sesiones previas. A esta forma de gestionar el primer encuentro la hemos llamado «la devolución socrática con indicios conceptuales» porque se exige al alumno que se haga cargo de la tarea de forma autónoma y a través de las rupturas que la mayéutica permite, identifica ciertas técnicas que resultan eficientes para resolver la tarea.

En los dos procesos de estudio analizados, es común que para gestionar el primer encuentro con la praxeología, la técnica didáctica de los profesores en formación sea el contrato basado en la mayéutica socrática y más que «devolver» una tarea mediante este contrato, los cuestionamientos buscan provocar el análisis de la tarea en la que está presente el valor proporcional, tal como se observa en el siguiente fragmento:

—Luis. Raymundo lee el problema.

—Raymundo. Debido al aumento de impuestos, la fábrica de textiles tuvo que aumentar sus precios, por lo que ahora el costo de la caja de calcetines «Cotton» es de \$670 y el de la caja de calcetines «El Mexicano» es de \$915.

—Luis. A ver niños, aquí el problema ¿qué nos dice Reyna?

—A1. Que está muy caro.

—Raymundo. Que aumentó.

—Luis. ¿Que aumentó qué?

—A2. El costo de la caja de calcetines.

—Luis. ¿Y qué crees que va a pasar a diferencia de lo de ayer?

—A3. Van a salir más caros, aumentaron proporcionalmente.

—Luis. Muy bien, ¿qué dijimos que es el valor proporcional? ¿Qué dijo ayer Nancy?

—A4. Lo que aumentaba cada cosa respecto a otra, por ejemplo una caja de algo cuesta \$600 y si quieres saber cuánto cuestan dos va a aumentar otros \$600 porque cada caja cuesta \$600.

Si bien los cuestionamientos intentan que los alumnos comprendan el problema (*A ver niños, aquí el problema ¿qué nos dice Reyna?*), son modificados cuando deducen lo que ocurre con el aumento del precio (*Que está muy caro, Que aumentó*). Con estas respuestas Luis relaciona las inferencias de los niños con

el concepto a estudiar, lo que se hace evidente cuando un alumno expresa *van a salir más caros, aumentaron proporcionalmente*, y aunque el profesor no explica el significado de la proporcionalidad directa, sí lo hace del valor proporcional.

A decir de Brousseau (1995), la respuesta inicial que dan los alumnos sólo debe permitirles emplear una estrategia de base con apoyo de sus conocimientos anteriores, pero dicha estrategia debería mostrarse lo suficientemente ineficaz como para que el alumno se vea obligado en un momento dado a realizar modificaciones para responder a la situación propuesta. En este sentido, la labor del profesor en formación es proponer al alumno una situación de aprendizaje para que dé respuesta a una pregunta en donde los conocimientos sean modificados en función a las exigencias del medio.

Desde esta misma perspectiva, lograr que los alumnos asuman la responsabilidad de reconstruir una praxeología significa también que se acepten ciertas normas matemáticas del trabajo, en este caso es claro que si el profesor pide explicaciones sobre lo que se está estudiando, también expresa que no se pueden plantear afirmaciones contradictorias y que es necesario dar argumentos de las propuestas dadas (Sadovsky, 2005).

En los dos casos que son nuestro objeto de análisis, una de las tareas didácticas que suelen gestionarse en el primer encuentro con la praxeología es la institucionalización del saber formal, esto es, en los momentos del primer encuentro se explican a priori los significados del objeto matemático que los niños deberían construir, esta institucionalización por lo general se hace para recuperar los significados de la tarea planteada y es por ello que le llamamos «la institucionalización anticipada».

«La institucionalización a priori le confiere a la tarea una naturaleza particular al momento del primer encuentro, la devolución del problema más que un primer encuentro representa entonces el inicio de una ostensión»<sup>13</sup> (Aguayo, 2005, p. 286), es decir el alumno identifica el objeto matemático como representante de una clase que deberá ser reconocido en otras circunstancias similares. En este caso, el profesor muestra una praxeología o una propiedad de la misma y el alumno lo observa como un espectador que deberá identificar dichos elementos en otras situaciones donde ésta se haga presente.

---

13. En este tipo de contratos «el profesor muestra un objeto y se supone que el alumno ve en él las nociones, los conceptos, las propiedades. Lo que el alumno no percibe de primer golpe, lo descubre y aprende por frecuentación repetida de las mismas circunstancias» (Ávila, 2001, p. 35).

En el fragmento siguiente puede observarse que Luis intenta gestionar la solución colectiva del problema, al parecer quiere provocar que los alumnos expresen ideas y sugerencias para tomarlas como punto de partida y establecer conjeturas sobre la tarea. Además de expresar sus ideas, a través de estos cuestionamientos, los alumnos buscan responder a cuestiones conceptuales vinculadas con la proporcionalidad. Se podría decir que el docente gestiona el momento del primer encuentro mediante la institucionalización de los saberes que se construyeron en la solución de una tarea anterior.

—Luis. Vamos a recapitular un poquito lo de la sesión anterior, la del martes ¿se acuerdan? ¿Qué hicimos el martes con el problema de las cajas de calcetines Diego, te acuerdas?

—Diego. Hicimos lo que decía que aumentaba...

—A1. La proporcionalidad.

—Luis. La proporcionalidad ¿qué hicimos César?

—César. Vimos que si aumenta una caja iba a aumentar el precio de la cantidad, porque si una caja costaba 600 al momento de que aumenta otra caja va a aumentar otros 600, también vimos lo de juntar cajas.

—Luis. ¿Cómo era lo de juntar cajas Sherlyn?

—Sherlyn. Juntarlas con el dinero.

—Luis. Ah caray ¿cómo es eso?

—César. No, es juntar por ejemplo dos cajas del «Cotton» y una caja del «Mexicano», veíamos su precio y luego lo dividíamos entre tres para saber cuánto valía una caja.

—Luis. ¿Si te acuerdas Óscar que en la sesión pasada revolvíamos cajas y sacamos el valor de cajas que eran producto de la combinación de otras?, por ejemplo ¿quién se acuerda cuánto valía la caja «Cotton»?

—A1. 670.

—Luis. ¿Y El Mexicano?

—A2. 915.

—Luis. ¿Y cuánto nos daba la combinación de una caja «Cotton» y una caja del Mexicano?

—As. La suma de las dos cajas y luego la dividíamos entre dos.

—Luis. Ya más o menos se están acordando, muy bien.

Con el planteamiento de cuestiones como: ¿qué se quiere que aprenda con esa situación problema?, ¿qué tiene que ver esto «nuevo» con lo que ya se conoce?, ¿por qué es importante vincular ambos saberes?, parece que Luis modifica el orden de los momentos didácticos dado que hace una especie de institucionalización en el primer encuentro. No obstante, Luis no establece un discurso «sabio» sobre el significado de la proporcionalidad, sino que lo «devuelve» mediante una serie de preguntas a modo de mayéutica socrática, lo que le permite retomarlo como un saber previo para la tarea matemática que planteará en el momento exploratorio. Esta situación resulta favorable dentro del proceso de estudio dado que permitirá en su momento llevar al profesor en formación a la institucionalización del saber formalizado.

Lo anterior permite comprender la idea de Brousseau (1986) cuando afirma que de alguna manera la institucionalización y la devolución se complementan en tanto que es ahí donde se reconocen los dos procesos sobre los roles principales del maestro, es decir con la devolución se le asigna al alumno la responsabilidad de actuar de forma autónoma en la resolución de la tarea, mientras que en la institucionalización se establecen las relaciones entre las producciones libres de los alumnos con el saber cultural o científico.

En el fragmento enunciado también es posible observar una situación de evocación a partir de la cual los alumnos tienen la oportunidad de discutir los saberes adquiridos en las problemáticas de estudio abordadas en días previos. Así, los alumnos se ven confrontados ante la necesidad de hablar sobre lo que ya han realizado sin volver a hacerlo, las situaciones que se derivan de la evocación ofrecen la oportunidad, a los alumnos que no lo han hecho, de reconstruir en el momento de la acción los problemas abordados (Sadovsky, 2005).

A partir del análisis se ha podido observar que la gestión del primer encuentro, en tanto tarea didáctica, tiene ciertas dificultades para los profesores en formación. Iniciar el proceso de estudio puede tener múltiples variantes, en el caso de José esta dificultad se hizo más evidente dado que en todas las tareas que plantea gestiona la «devolución parcial». Por su parte Luis diversifica este momento inicial, en algunos momentos recurre a la devolución con apoyo de la mayéutica socrática y en otros a la institucionalización a priori. Una situación favorable es que en ambos casos no se sugiere explícitamente alguna técnica, lo que indica que este rol se verá determinado en el momento exploratorio. Finalmente, parece que la devolución de la tarea es la técnica más recurrente para

gestionar el primer encuentro entre la praxeología, Luis identifica claramente la necesidad de establecer un momento adidáctico para desarrollar el resto de los momentos de estudio.

### 7.3.2. MOMENTO EXPLORATORIO. UNA TAREA COMPARTIDA

El momento de exploración de la tarea y del surgimiento de la técnica es una parte fundamental del recorrido de estudio, en el caso de Luis la búsqueda inicia con una técnica rudimentaria que le resulta útil al alumno en la resolución de las tareas, a decir de Chevallard (1999):

Se señalará que, contra cierta visión heroica de la actividad matemática, que la presenta como una serie errática de enfrentamientos singulares con dificultades siempre nuevas, lo que está en el corazón de la actividad matemática es más la elaboración de técnicas que la resolución de problemas aislados. A la ilusión moderna del alumno-héroe que supera sin necesidad de lucha toda dificultad posible, se opone también la realidad indispensable del alumno-artesano laborioso que, con sus discípulos, bajo la conducción reflexiva del profesor, elabora pacientemente sus técnicas matemáticas (p. 243).

En correspondencia con esta idea, se trata pues de una dialéctica en la que resolver tareas constituye un medio que permite crear y poner en marcha una técnica asociada a las tareas de un mismo tipo, técnicas que posteriormente serán el medio para resolverlas de modo casi rutinario.

Lo que a continuación se muestra da cuenta de la manera como Luis gestiona los momentos exploratorios incluidos en el recorrido que experimentó, lo importante en este análisis es identificar cómo se establece la interrelación entre el alumno y la tarea, además de observar el papel que toma Luis en la búsqueda y elaboración de las técnicas. Cabe señalar que el grado de dificultad de las tareas varía en función de lo desconocido, la orientación y las variantes planteadas, en tanto el objetivo de los profesores en formación es que los alumnos progresen en la solución de esas tareas.

Cuando se presenta una tarea puede convertirse en una situación de «costumbre» que se trabaja bajo la lógica de la cotidianidad del aula o bien puede convertirse en el preámbulo de conflictos cognitivos que modifican la relación entre alumno y profesor. Una tarea entonces constituye una oportunidad para

que los alumnos se enfrenten a una praxeología de modo habitual sin generarles tensiones que modifiquen las condiciones habituales del proceso de estudio.

Como lo señala Ávila (2001), en las clases de matemáticas es común apreciar una noción empirista del aprendizaje de la que deriva una forma de gestionar la clase que ha devenido en costumbre, en el caso de aritmética señala el uso de estrategias similares como ostentar, interrogar, ejercitar, repetir, entre otras y cuando se trata de la proporcionalidad es común el uso de tablas y gráficas para encontrar el valor faltante, es en esta parte donde se intuye lo habitual de la clase.

Un caso de esta costumbre que se relaciona con el momento exploratorio es precisamente aquel donde el profesor funge como actor central de la clase al orientar y sugerir las acciones para determinar la técnica. A partir de las acciones sobre una tabla proporcional, Luis intenta orientar el uso de la regla de tres como técnica. Este tipo de situaciones en las que el profesor determina las acciones y los alumnos «siguen» indicaciones es un ambiente habitual en la mayoría de las clases de matemáticas.

El momento exploratorio que gestiona Luis utiliza el trabajo individual y en equipo, al igual que José, su experimentación evidencia dos orientaciones para este momento, la primera, más recurrente, es el trabajo autónomo de los estudiantes sin la intervención del docente:

—Luis. Vamos a leer el inciso dos.

—A1. Tomando en cuenta que el precio de los calcetines «Cotton» es de \$625, completa la siguiente tabla.

—Luis. Vamos a llenar la tabla que tienen en su hoja y ahorita lo revisamos.

—As (Trabajan de manera individual en la resolución mientras la maestra dibuja la tabla en el pizarrón).

Como se puede apreciar, el profesor lanza la consigna con el apoyo de un alumno y simultáneamente con la exploración, elabora la representación gráfica que los alumnos deberán completar y que servirá para que identifiquen la técnica. Cabe señalar que el profesor no muestra indicios de la técnica a utilizar, se inclina por una resolución conjunta de la tarea. Lo anterior da cuenta del vínculo que Luis establece entre los momentos del primer encuentro y exploratorio, el primero le permite explorar la tarea de manera grupal para identificar su natura-



leza, luego da la consigna para la búsqueda individualizada de la técnica, la cual, posteriormente será socializada en el momento tecnológico-teórico.

De esta manera, lo que permanece en la clase, las reglas de interacción social que giran en torno al saber matemático y la distribución de responsabilidades en un grupo escolar se conceptualizan a partir de la noción de costumbre en tanto que esta noción da cuenta del modo de regulación del funcionamiento social de la clase, al tiempo que delimita el dominio de validez del concepto de contrato didáctico. Un profesor puede estructurar su clase sobre ciertos principios, suponiendo que las definiciones y los conceptos tienen una forma única; la institucional y supone que debe mostrarlos y los niños captarlos (Ávila, 2001).

La segunda orientación que se da al momento exploratorio es cuando Luis participa en la búsqueda de la técnica, interviene con ciertas interrogantes cuando los estudiantes trabajan en equipo. Durante el momento exploratorio la intervención que pueda realizar el profesor es determinante para orientar a los alumnos ante las dificultades de comprensión de la tarea o la selección y elaboración de una técnica, no obstante, el profesor no siempre tiene el control total de la tarea, cuando la praxeología expresa ciertas irregularidades que son detectadas por los alumnos, como se puede ver en el siguiente fragmento, la clase tiene un deslizamiento cognitivo.<sup>14</sup>

—Luis. Bien ahora, con base en el problema, vamos a contestar las siguientes preguntas en nuestro cuaderno, realizando las operaciones que necesiten.

—As. (Trabajan en equipos) Al día, la fábrica vende 300 cajas. Si por cada 5 cajas de calcetines «Cotton» se venden 2 cajas de calcetines «El Mexicano», ¿cuántas cajas de calcetines «Cotton» venden al día?

—Eq1. Maestro, pero te sobran seis o te falta uno.

—Luis. ¿Por qué?

—César. Porque son 7, 5 del «Cotton» y 2 del Mexicano, entonces para llegar a 300 y 300 dividiendo entre 7, no se puede de siete porque sobran seis o te faltaría uno, tendrían que ser 301 o 294.

—Luis. A ver hágalo, demuéstrelo.

—Eq.1. ¿No importa que sobre?

14. Para Brousseau (1986) el deslizamiento cognitivo se presenta ante el fracaso de una actividad de enseñanza, es decir cuando el profesor muestra sus propias explicaciones como objetos de estudio, en lugar del verdadero conocimiento matemático.

—Luis. O no importa que lo hagan en decimales.

—Eq.1. Pero no se pueden hacer en decimales porque están en unidades.

—Luis. Podemos vender cajas y media, como lo hicimos ayer, ¿o no se podrá?, ayer decíamos de 700 milésimas de partes de una caja,  $4/5$  de una caja, ¿cierto?. Piénsenlo.

*(Después de un tiempo de trabajo en equipo, se inicia la validación).*

En este caso la intervención de Luis parte de las inquietudes de los alumnos del equipo 1, quienes identifican la falta de precisión en la tarea, señalan implícitamente que 300 no es múltiplo de 7. Al observar la tarea es posible identificar que el contexto «cajas de calcetines» rompe con una de las razones de los sistemas de proporcionalidad, la necesidad matemática o lógica, que las cajas de calcetines de cada tipo coincidan con las cajas que se venden al día, situación que numéricamente no es posible con magnitudes enteras.

Durante el momento exploratorio un equipo identifica la contradicción, incluso justifica la dificultad de cumplir con esa tarea, a pesar de ello encuentran dos resultados (301 y 294) no satisfactorios para Luis quien los orienta hacia el uso de decimales o fracciones para dar una aproximación más exacta a las 300 cajas que se venden por día. También intenta establecer una evocación cuando Luis les recuerda que han trabajado con *700 milésimos de una caja y  $4/5$  de una caja*.

La interacción entre Luis y el equipo permite la devolución de la tarea, misma que genera un debate en el que los argumentos de los alumnos se basan en razones que derivan de sus técnicas y del contexto de la tarea, así cuando Luis solicita justificaciones, éstas provocan la ruptura del proceso de estudio porque los alumnos ponen en duda la pertinencia del contrato didáctico en el que el profesor tiene la respuesta a todas las tareas.

A partir de lo observado, se puede identificar lo que Brousseau (1998) denomina deslizamiento cognitivo que aparece cuando una actividad de enseñanza ha fracasado y para continuar su proyecto de enseñanza, el profesor insiste en trabajar sobre un objeto matemático descontextualizado.

En términos generales, el momento exploratorio que buscaba un desarrollo progresivo de la técnica y la generación de técnicas relativamente nuevas, se gestionó con diferentes modalidades: una en la que los alumnos buscan la técnica sin intervención del profesor, otras en las que los alumnos reproducen los

gestos que el profesor realiza frente a la clase, algunas más donde la evocación y la aplicación y el control resultan relevantes para resolver la tarea y otras donde Luis establece una postura más activa para gestionar la justificación de ciertas técnicas o incluso para «devolver» la responsabilidad en la resolución de la tarea.

### 7.3.3. *El momento tecnológico-teórico. Las dificultades de justificar la técnica*

En este momento didáctico la tecnología es un discurso racional sobre la técnica cuya función es justificarla racionalmente para asegurar que permita un buen desempeño en las tareas de cierto tipo, sin olvidar que dicha racionalidad varía respecto a una institución determinada (Chevallard, 1999).

Durante la gestión del momento tecnológico, se observaron diferentes acciones que corresponden con las funciones de la tecnología, desde la justificación de la técnica hasta explicarla, hacerla inteligible y esclarecerla, esto es exponer ¿por qué hace bien lo que tiene que hacer? y una tercera función que se enfoca a la producción de técnicas.

Para analizar las funciones del discurso tecnológico, seguimos la postura de Castela y Romo (2011) con el propósito de identificar aquellas que fueron gestionadas por Luis durante este momento de estudio. Entre los saberes que se hacen presentes en las seis funciones de la tecnología, algunos se encuentran asociados a una teoría matemática mientras que otros se desprenden de la práctica matemática validada en un contexto empírico, estas consideraciones se muestran en varios fragmentos de clase donde se manifiestan diferentes tipos de funciones.

Una de las funciones que pudo apreciarse fue la «descripción de la técnica», en ésta destaca el papel del discurso descriptivo con el vocabulario necesario que en su momento será de utilidad para el proceso de emergencia, institucionalización y transmisión de una praxeología (Castela, 2008). Esta función se observa en el siguiente fragmento:

—Luis. Lee el problema Sherlyn.

—Sherlyn. ¿Cuántas cajas en cada caso serán si sólo se quieren comprar \$700 de calcetines?<sup>15</sup>

—Luis. Ok ¿cómo le hicieron?

---

15. Tomando en cuenta que el precio de los calcetines «Cotton» es de \$625 y del «Mexicano» es de \$885.

- Sherlyn. Dividimos \$700 entre \$885 que es el precio del mexicano y nos dio 0.7.
- Luis. ¿Y 0.7 qué es?
- A1. ¿Son lo que le sobra?
- Luis. ¿Y luego?
- Sherlyn. (sigue desarrollando la división y multiplica  $885 \times 9$  para encontrar el número faltante en el cociente, le da 0.79).
- Sherlyn. Da 0.79 y éste ya sería el resultado del calcetín El Mexicano.
- Luis. ¿0.79 que?
- Sherlyn. Eh.. ¿Pesos?
- Luis. Centésimos de caja. Muy bien, vamos a ver el siguiente con Nancy, ¿tú cómo le hiciste?
- Nancy. Para el Cotton es igual se va dividir 700 entre 625 y va a salir 1.12.
- Luis. Ok siéntense.

En el fragmento anterior se observa que Luis gestiona un discurso tecnológico para la descripción de la técnica, cuando pregunta ¿cómo le hicieron?, con un vocabulario matemático los estudiantes enuncian la división entre el costo de las cajas y el precio unitario según el tipo de calcetines. Esta situación da cuenta de la comprensión semiótica de las estructuras multiplicativas y su descripción, aunque no así del significado de los datos encontrados, dado que cuando Luis cuestiona sobre el significado de 0.79 como cociente de la división, Sherlyn responde que se trata de pesos en tanto que la división alude a \$885 o \$625 entre \$700. Luis corrige la respuesta al señalar que el cociente corresponde a centésimos de caja pues en realidad se trata de una regla de tres simplificada donde una caja cuesta \$625 por ejemplo, y el dato desconocido es el número de cajas que se obtienen con \$700.

Mediante estas acciones Luis no logra que los alumnos justifiquen la técnica, sólo se limita a preguntar cómo le hicieron, la confusión sobre el significado del cociente habría permitido discutir la aplicación de la técnica para tratar de evitar errores semánticos, sin embargo dicha función no se hace presente, lo que representa una de las principales dificultades en el desarrollo del momento tecnológico durante la experimentación del REI. Cabe señalar que la descripción de la técnica se hizo presente en todo el momento tecnológico de las diversas tareas planteadas, no obstante, Luis gestionó otro tipo de funciones de la

tecnología, como la explicación de la técnica, donde los alumnos expresan la comprensión de las causas de la técnica, es decir ¿por qué ésta hace bien lo que se espera que haga?, un ejemplo de este caso se muestra a continuación:

—Luis. Bien vamos a revisar lo que hicieron en la tabla, Diego explícanos lo que hiciste.

(Se revisa la tabla que previamente se había dibujado y se retoma la indicación: Tomando en cuenta que el precio de los calcetines «Cotton» es de \$625, completa la siguiente tabla).

|                 |       |      |        |   |
|-----------------|-------|------|--------|---|
| Número de cajas | 1.5   |      |        | 6 |
| Precio por caja | 937.5 | 1875 | 2812.5 |   |

—Diego. Bueno aquí dice que de 1.5 da 937.5 el precio o sea que es de una caja y media entonces si lo dividimos nos va a dar 625.

—Luis. ¿Qué dividimos y por qué?

—Diego. 937.5 entre 1.5 y nos da 625 y al multiplicarlo por tres nos da 1875 pero como aquí sólo nos da este valor (se refiere a 1875) entonces se divide entre 625 y nos da tres por lo que se pone aquí el tres (señala en la tabla dónde se ubicaría el 3), y acá 4.5 nos va a dar si dividimos 2812.5 entre 625 lo que nos da 4.5, en la última parte ahora si nos da el valor aquí (se refiere al 6) dice que 625X6 el resultado que nos da es 3750. La tabla queda así:

|                 |       |      |        |      |
|-----------------|-------|------|--------|------|
| Número de cajas | 1.5   | 3    | 4.5    | 6    |
| Precio por caja | 937.5 | 1875 | 2812.5 | 3750 |

—Luis. ¿Te queda claro Michael? ¿Qué es lo que hizo Diego para encontrar los valores de la tabla? A ver César levantaste la mano ¿qué hizo Diego para sacar los valores de la tabla?

—César. Sumó.

—Luis. ¿Qué sumó?

—Diego. Los precios.

—Luis. Pero ahí nos dice un valor unitario

—César. ¿Mande?

—Luis. ¿Pero dónde está el valor unitario?

—As. No responden.

—Luis. ¿O sumó qué?

—As. Las cajas y los precios.

—Luis. A ver cómo, pásenle.

—César. Es que, en lugar de sumar, multiplicó el precio por el número de cajas.

En este fragmento se observa que no sólo se plantea la descripción de la técnica. Luis solicita a Diego que explique cómo le hizo (Diego dice que dividió 937.5 entre 1.5) pero al cuestionar ¿qué se divide y por qué?, Diego explica paso a paso la técnica en la que aparece el 625 como valor unitario. Cuando Luis pregunta sobre su significado, la comprensión de la técnica se hace presente, César explica que en lugar de sumar se multiplica el precio por el número de cajas, lo que llevaría a retomar la idea del valor unitario como operador, esta situación era la que Luis intentaba deducir con los alumnos al preguntar sobre dicha técnica.

En el caso de Luis la gestión de la tecnología llevaba a los alumnos de manera progresiva a profundizar más en la explicación de la técnica, pero además a motivarla junto con los gestos que la componen, este hecho llevó a los alumnos a mostrar gradualmente el dominio, comprensión y aplicación de una técnica en particular:

—Luis. A ver el primer problema, ¿cuál es el costo de 4/5 de calcetines «Cotton» y de 4/5 de calcetines El Mexicano?, ¿cómo le hiciste Sherlyn?

—Sherlyn. tomando en cuenta que el precio de los calcetines «Cotton» es de \$625 entonces para saber se divide  $625 \div 5$  y me da 125.

—Luis. ¿Por qué entre cinco?

—Sherlyn. Por la fracción que son quintos.

—Luis. Y luego ¿qué hiciste con los 125?

—Sherlyn. Lo multipliqué por cuatro.

—Luis. ¿Por qué por cuatro?

—Sherlyn. Porque así nos dice la fracción.

—Luis. ¿Si están de acuerdo los demás?

—As. Sí.

—Luis. ¿Y del mexicano no lo sacaste? ¿4/5 del Mexicano, se hace igual o se hace diferente?

- As. Diferente.
- Luis. Porque diferente.
- Sherlyn. Por el precio, porque del Mexicano es 885.
- Luis. ¿Qué tendría de diferente?, ¿cuál es el precio del mexicano?
- As. 885.
- Luis. A ver hazlo Reyna.
- Reyna. (Divide 885 entre 5 y le resulta 177 que multiplica por cuatro, para obtener finalmente 708).
- Luis. ¿Es cierto que es 708?
- Diego. Sí, porque dice que son quintos, entonces 5 es el denominador y así te dice en cuántas partes vas a dividir, entonces dividí 625 entre 5 y me dio 125 que multiplico por cuatro, cuatro es el numerador que nos aparece en el problema y es el que te dice cuántas partes vas a agarrar de todas las partes en que se partió. Cuando multiplico por cuatro me da 500.
- Luis. César, ¿por qué dividen entre cinco y multiplican por cuatro? En lugar de hacerlo al revés.
- César. Porque si lo hacen al revés no nos saldría la cantidad, y el cinco es el denominador y es el número de partes en que se divide y el cuatro es el numerador y es el número de partes que se va a tomar.

Como se puede apreciar, la gestión del momento tecnológico inicia cuando Luis pregunta a Sherlyn ¿por qué hacer una división entre cinco?, ella responde que esto se debe a la fracción planteada en la tarea, si bien esta alumna señala que para encontrar el costo de los  $\frac{4}{5}$  de la caja de calcetines «El Mexicano» es diferente, su argumento distingue los precios de ambos tipos de calcetines más que a la técnica (valor unitario como operador fraccionario). Lo que está haciendo Sherlyn es explicar la técnica.

Para profundizar en la comprensión de la técnica, Luis valida con el resto del grupo la motivación de la misma al preguntar si la explicación de Sherlyn era correcta, ante ello César enuncia las etapas de la técnica al resolver la tarea de modo heurístico, es decir explicitando los principios y reglas que le subyacen, con lo que se identifica ¿para qué se hace tal procedimiento?, ¿cuál es su efecto y qué pasaría si no se hace de esa manera? Con este tipo de gestión Luis ha permitido experimentar un momento tecnológico que a decir de Castela y Romo (2011) deriva de una práctica matemática validada en un contexto empírico,

implícitamente también se desprende de una teoría basada en las fracciones y los números racionales positivos, de manera particular en las operaciones que le subyacen.<sup>16</sup>

Durante la experimentación de Luis se observó la gestión de tecnologías cada vez más elaboradas y la interacción de las mismas durante el proceso de justificación de las técnicas, al parecer mientras más compleja era una tarea Luis buscaba la validación de una técnica o el surgimiento de otras diferentes, tal como se observa en el siguiente registro:

—Luis. Nancy haga el favor de leer la primera pregunta.

—Nancy. Al día la fábrica vende 300 cajas. Si por cada 5 cajas de calcetines «Cotton» se venden 2 cajas de calcetines «El Mexicano» ¿Cuántas cajas de calcetines «Cotton» venden al día?

—Luis. Álvaro pásele y explíquenlos.

—Álvaro. Es que yo lo convertí, lo multipliqué por seis ( $20 \times 6 = 120$  y  $30 \times 6 = 180$ ).

—Luis. ¿Por qué por seis?

—Álvaro. Porque es más de la mitad de los otros calcetines, bueno de los calcetines «Cotton».

—Luis. A ver si dice que por cada cinco cajas de uno se venden dos del otro, ¿cuántas cajas deberían de ser de cada uno si se vendieron 300 cajas? y ¿cuánto salió de resultado?

—Álvaro. 120 de uno y 180 del otro.

—Luis. ¿Y por qué multiplicó por 20 y por qué 30?

—Álvaro. Porque eran dos cajas y de los otros eran tres y ya le agregué un cero y luego ya multipliqué.

—Luis. ¿Está correcto lo que hizo Álvaro?

—As. No.

—Luis. ¿Por qué está mal?

—César. Porque son 300 cajas y no es el procedimiento correcto.

—Luis. Vamos a ver otro procedimiento pásele Sherlyn.

---

16. «La situación que permite entender mejor el sentido del producto de racionales es la partición de un todo plural, un todo que se compone de una colección de objetos homogéneos» (Godino, 2004, p. 115). En el caso de la tarea planteada por Luis se trata de dos cantidades (625 y 885 pesos), identificar el precio de  $\frac{4}{5}$  de cada caja implica descomponer las magnitudes en cinco subconjuntos de 125 y 177 respectivamente y multiplicarlos por cuatro para obtener el valor de la fracción.



—Sherlyn. Escribe  $5+2=7$  Primero sumé las cinco cajas de calcetines «Cotton» con las dos cajas de calcetines «El Mexicano».

—As. Pero no son 77.

—Sherlyn. (Borra un 7 para dejar  $5+2=7$ ) y luego al 300 lo dividí entre siete y sale 42.85, ese 42.85 lo multipliqué por cinco que eran los calcetines «Cotton» y ya me dio 214.25

—Luis. Entonces tú crees que fueron 214 calcetines «Cotton» ... cajas y si entonces 42.85 son la cantidad total de cajas, ¿por qué te sale más? A ver César ¿está bien Sherlyn?

—César. No maestra porque aquí le puso otro resultado.

—Luis. A ver César explica lo que tú hiciste.

—César. Es que como son 300 cajas y son cinco cajas del «Cotton» y dos del Mexicano entonces la sumé y me da siete, 300 cajas que son entre siete me da 42.85.

—Luis. ¿42.85 qué es?

—César. Es un número... ¿O cómo?

—Luis. ¿Pero qué representa el número?

—César. Ah. O sea... una parte de... como del «Cotton» porque se divide entre siete que es el total, luego se multiplican  $42.85 \times 5$  que es del «Cotton» que son 214.25.

—Luis. A ver ¿si está bien Cesar? Este... Diego.

—Diego.

—Luis. ¿Está bien lo que hicieron César y Diego?, Pero sólo me dieron una aproximación del «Cotton», entonces ¿cuál sería el del Mexicano?

—As. El resto.

—Luis. A ver pasen a comprobarlo con una operación.

—César. (Escribe  $42.85 \times 2 = 85.7$ ).

—Luis. Y si los sumamos ¿si nos da 300?

—César. (Suma  $214.25+85.70 = 299.95$ ).

—Luis. ¿Por qué crees que nos sale una cifra diferente Nancy?

—César. Porque es un aproximado.

—Luis. Porque es un aproximado, ¿si están de acuerdo? A ver César, Diego y Sherlyn, lo que hicieron fue sumar las cajas  $5 + 2$  y dividieron el total de cajas del día entre el total de cajas y luego esa parte, ese valor ¿qué sería?, ¿Cómo llamaríamos a este valor?, ¿qué sería el resultado del número total de cajas entre el número de cajas?

—As. ¿La proporcionalidad?

—Luis. ¿Sí será la proporcionalidad como dice Michael?, Bueno ésta después la vamos a ver, entonces luego lo multiplica por cinco que es el número de cajas y luego por dos ¿cierto?, ¿Sí entienden porque lo hicieron así?

—A1. Multiplicaron las cajas.

—Luis. Sí, multiplicaron las cajas.

En este fragmento se puede ver que Álvaro describe la técnica y aunque mediante cuestionamientos el profesor pretende facilitar su aplicación para evitar errores, el alumno no comprende la tarea ni cómo emplear los datos en la multiplicación, pero sí plantea la necesidad de que la suma le de 300 por eso busca un factor común (6) que multiplicado a ciertos números le permitan cumplir con esa condición, aunque no tenga argumentos claros para justificar esa técnica.

Recordemos que en el momento anterior se presentó una discusión donde se planteaba la dificultad de obtener un dato preciso en función del contexto de la tarea (cajas de calcetines). Al hablar de una venta de 300 cajas con una razón de 5 cajas de «Cotton» a 2 cajas «El Mexicano», los alumnos argumentaron que no era posible establecer dicha relación porque el 300 no era múltiplo de siete y no saldría una cantidad exacta, no obstante el profesor sugirió el uso de números decimales para la solución, entonces los alumnos optaron por emplear una técnica basada en decimales como lo expresan Sherlyn y César, quienes implícitamente recurren a una regla de tres dividiendo 300 entre 7 y luego multiplicando por 5 y 2 respectivamente o bien al realizar una de las dos multiplicaciones igualan la cantidad faltante a 300 o expresan un aproximado al obtener 299.95. Las preguntas de Luis piden la explicación y la validación de la técnica al preguntar sobre el significado de los datos, además también se observa que solicita la evaluación de la técnica cuando pregunta *¿Pero sólo me dieron una aproximación del «Cotton», y entonces ¿cuál sería el del «Mexicano»?*

La evaluación de la técnica se expresa al señalar que se trata de una aproximación con números decimales derivada de cierta dificultad en el contexto de la tarea cuyas magnitudes eran enteras. Esta evaluación permite comprender el campo de eficacia y los límites de la técnica en comparación con otras disponibles, como el uso de un modelo tabular que permitiera ver la razón que se establecería entre 5 y 2 cajas de diferente tipo.

A lo largo de la experimentación del REI, se hizo más explícita la gestión

del discurso tecnológico por parte de Luis, al inicio las tareas se desarrollaron a partir de la descripción y explicación de las técnicas empleadas, no obstante para la gestión del momento tecnológico la interacción de Luis con los estudiantes se volvió más profunda, casi siempre basada en una mayéutica socrática. Esto se muestra en el siguiente fragmento.

—Luis. Tomando en cuenta que la caja de calcetines «Cotton» cuesta \$670 y la caja de calcetines «El Mexicano» cuesta \$915. ¿Qué cantidad de calcetines de cada clase debe de contener una caja que tenga un valor de \$800? Álvaro explícanos cómo le hiciste.

—Álvaro. Primero dividí los 915 entre 8 porque es el costo de los calcetines del Mexicano y lo que me salió (114.3) lo multipliqué por siete y me salió 800.1

—Luis. ¿Por qué lo dividiste entre ocho?

—Álvaro. Porque por cuatro salía muy alto y le multipliqué por 2 el cuatro.

—Luis. ¿Y el otro?, ¿por qué lo multiplicas por siete?

—Álvaro. Porque era el que más se acercaba al número.

Como se puede ver, Luis pide la explicación de la técnica al preguntar la razón por la cual Álvaro utiliza la división y la multiplicación con ciertos números, esta gestión permite deducir que el alumno hace aproximaciones para acercarse a la cantidad planteada (\$800), no obstante Luis deja de cuestionarlo para confrontar su técnica con la de otros estudiantes.

—Luis. Nancy muéstranos ahora tú para compararlo con el de Álvaro.

—Nancy. El problema dice que son 800 y pregunta ¿cuántas cajas son? dividí esos 800 entre el precio (670) y me dio 1.19 que es del «Cotton», luego para el «Mexicano» dividí 800 entre 915 pero como no cabía agregué un cero y me salió 0.874, luego sumé lo que me salió del «Cotton» y lo que me salió del «Mexicano» ( $1.19 + 0.874$ ) de eso el total fue 2.064, después para comprobar multipliqué  $1.19 \times 670 = 797.30$  y para «El Mexicano» multipliqué  $0.874 \times 915 = 799.71$ .

—Luis. Entonces tú dices que si sale \$800 una caja.

—Nancy. Bueno es que todavía sigue, pero como ya no me cabía lo dejé así.

—Luis. A ver terminalo.

—Nancy. (coloca más cifras decimales a las divisiones que había hecho).

—Luis. Si quieres hasta ahí.

En la presentación de otra técnica (ver fragmento siguiente), Luis pide la explicación y la validación cuando pregunta a Nancy si está de acuerdo en que una caja cuesta \$800, con ello intenta que la alumna comprenda que su técnica sólo permite identificar el número de cajas del mismo tipo (con valor de \$800), en otros términos lo que Nancy realiza es una regla de tres con cajas de un mismo tipo de calcetines (1 caja de calcetines «Cotton» es a \$670 ¿cuántas cajas de este tipo de calcetines serán de \$800?). No obstante, la gestión que realiza Luis tiene dificultades para identificar el proceso y más aún para evaluar si la técnica es eficiente, hecho que trata de superarse al solicitar a otro alumno la descripción de su técnica ante una tarea similar.

—Luis. Diego continúa leyendo la siguiente parte por favor.

—Diego. De forma individual se pide contesten las siguientes preguntas con base al primer problema ¿Se puede armar una caja con un valor menor de \$670? ¿Por qué?

—As. Sí.

—Luis. A ver una caja que sea combinación de ambos calcetines que tenga un valor menor de 670, ¿se podrá? ¿Por qué?

—Diego. Se puede dividir y sacar cuánto es de cada uno, por ejemplo si te piden tanto de uno y tanto del otro y ya nomás ves cuánto es el total.

—Luis. A ver acuérdesse que las cajas nuevas que estamos creando son combinación de una caja que vale \$670 y una caja que vale \$915 ¿sí se puede hacer una caja que esté combinada que valga menos de 670?

—Diego. Sí.

—Luis. A ver pásale y ponlo ahí.

Mediante esta acción Luis pretende que los alumnos comprendan que se trata de cajas combinadas de calcetines «Cotton» y «El Mexicano», pero además busca que identifiquen los precios de ambos tipos de cajas que determinan el rango del precio de las cajas combinadas, para ello pide a Diego que explique su técnica:

—Diego. Por ejemplo, agarró la mitad de una caja de la más pequeña que es 335 que equivale al 50% del precio de la caja (Cotton) Y 305 que es un tercio (escribe 33%) del precio de la otra caja, al hacer la suma da 640.

—Luis. ¿Sí está bien lo que dice Diego?

- As. Sí.
- Luis. ¿Pero eso si es una caja o es una parte de una caja?, ¿qué porcentaje debemos tener para que sea una caja?
- Diego. 100%.
- Luis. ¿Y ese es un 100% Diego?
- Diego. No.
- Luis. ¿Entonces es una caja?
- Diego. No... 670, si usted quiere que la caja tenga 640 entonces sí es menor que un entero.
- Luis. No, pero yo quiero una caja, ¿se puede o no se puede? No le hace que sea 669, ¿sí se puede?
- Diego. Si quiero una caja con un valor determinado....
- As. Una regla de tres.
- As. 670 por 50 entre el precio de la caja
- Luis. Pero tiene que dar el 100%.
- As. ¿Cómo le hago?
- Diego. A ver es que dígame ¿cuál es el 100% que usted quiere?
- Luis. Aquí la suma de esto (se refiere al  $50\%+33\%$ ) te da  $83\%$  te faltó un  $17\%$ .
- Diego. Este es el  $33\%$  no tiene relación con el otro, tiene relación respecto al precio de los otros calcetines (se refiere a los calcetines «El Mexicano»).
- Luis. Sí, pero si juntamos el  $50\%$  de una caja y el  $33\%$  de otra caja no completamos una caja.
- Diego. A ver si este es el 100% (escribe 640) y lo dividimos entre 335 (realiza la división) y nos da un total de 1.9 veces y si esto lo convirtiéramos a porcentaje y le sumamos lo que genera el otro de porcentaje entonces nos daría el 100%.
- Luis. ¿Por qué nos darían 100%?
- Diego. Porque sería nuestro entero (se refiere a 1.9) y si se tiene una parte y se le suma la otra nos da este total y parece 100% porque cada uno tiene su valor en fracción y con esto si nos da el 100%.

En este fragmento se aprecia la función explicativa del discurso tecnológico al identificar que la técnica produce un efecto determinado asociado con el porcentaje, los cuestionamientos hechos por Luis permiten a Diego establecer proporciones de un tipo de cajas con otro ( $50\%+33\%$ ), si bien la suma de estos porcentajes no lleva al 100% porque se pide una combinación con un valor

menor (\$640) al de las cajas más baratas (\$670), Luis gestiona la evaluación de la técnica para dar cuenta de su pertinencia, eficacia y límites para el propósito de la tarea, ante las dificultades en su comprensión opta por cuestionar a los alumnos sobre el razonamiento solicitado.

—Luis. Fíjense bien, si decíamos que no podemos formar cajas combinadas menores de \$670 porque no quedarían completas, entonces ¿qué pasaría si queremos una caja que cueste más de \$915?

—As. Dividimos las dos y las sumamos.

—Luis. ¿Cuánto cuesta la caja más cara?

—As. 915.

—Luis. ¿De qué es esa caja?

—As. De calcetines «El Mexicano».

—Luis. ¿Y si ya dijimos que no podemos armar cajas menores de 670 porque son incompletas que pasa si queremos cajas de más de 915?

—Jesús. Tampoco se puede.

—Luis. ¿Por qué no se puede Jesús?

—Jesús. Porque se pasa.

—Luis. ¿Cómo que se pasa?

—Jesús. Si de 915 y ese es el más caro.

—Luis. Bien ¿si entendieron todos?

—As. Siii.

A partir de las funciones del discurso tecnológico solicitados (descripción, explicación y evaluación), los alumnos logran comprender el valor mínimo y el máximo que puede tener una caja combinada con ambos tipos de cajas («Cotton» y «El Mexicano») y a pesar de que las magnitudes enteras provoca ciertas inquietudes en los alumnos porque sus técnicas no corresponden con la lógica social y funcional de la tarea (como el uso de decimales y porcentajes), la gestión tecnológica de Luis permitió que al final los alumnos dieran una respuesta acertada a los planteamientos.

En el caso de la gestión de Luis se observa un mayor número de funciones del discurso tecnológico-teórico, la descripción de la técnica aparece de manera recurrente pero sólo al inicio del momento tecnológico dado que conforme se avanza en la discusión de las técnicas se gestiona la validación, la explicación, la

motivación, la facilitación de la aplicación de la técnica y sobre todo la evaluación de la misma.

#### 7.3.4. *La institucionalización progresiva*

La institucionalización tiene como propósito preservar el conocimiento y garantizar su permanencia a través del tiempo, de manera particular en los salones de clase. Este momento opera con una versión de los saberes escolares que provienen de una fuente de conocimiento escolar, los libros de texto y los programas de estudio en los cuales se plasma un enfoque de enseñanza que se hace presente en las diversas actividades matemáticas desarrolladas por el profesor (Castañeda, Rosas, Molina, 2012).

Como se ha señalado, desde la perspectiva de Brousseau (1988), la institucionalización constituye un momento esencial en la transformación de los conocimientos en saberes, es aquí donde el profesor necesita identificar aquello que han realizado los estudiantes para describir lo que ha pasado y dar un *estatus* al conocimiento, de manera que a partir de lo que hicieron alumnos y profesor con el objeto de estudio se pueda llegar a una doble consideración: como objeto de enseñanza por parte del profesor y como objeto de aprendizaje por parte del alumno.

En este sentido, cuando el alumno se enfrenta a una tarea encuentra un conocimiento, pero esto no es suficiente para lograr el aprendizaje, es necesario que esos conocimientos sean etiquetados como saberes socialmente reconocibles, que se presenten en un espacio teorizado de los fenómenos de enseñanza propios de la institución en la que ese saber «se estudia» y que se reconozcan los límites de su estudio. Bajo este argumento, enseguida se presentan fragmentos de clase en los que Luis gestiona momentos de institucionalización para hablar de la convencionalidad de un objeto matemático.

—Luis. ¿Cómo se llamará la relación que existe entre el costo de la caja y el número de cajas?

—Nancy. ¿Proporcionalidad?

—Luis. ¿Y qué será la proporcionalidad?

—A1. La igualdad.

—Luis. ¿La igualdad de qué?

—A1. Eh...de (no dice nada).

- A2. La igualdad de la caja.
- Luis. ¿De la caja, igualdad de la caja?
- César. Es como la regla de tres, mmm por ejemplo...
- A1. Perros con perros gatos con Gatos.
- Luis. A ver ¿cómo es eso?
- A2. Dice que ordenar los perros con los perros y los gatos con los gatos
- A1. En el problema el precio con los precios.
- A3. Poner lo que se debe... por decir dinero con dinero.
- Luis. O sea que no podemos revolver el dinero, el costo, con el número de cajas.
- Michael. O revolver el dinero con el número de personas.
- Luis. ¿Eso es una proporcionalidad?
- As. Sí, parecido.
- Luis. A ver César ¿qué es la proporcionalidad?
- C. ¿La proporcionalidad? Comparar, por ejemplo si tienes una caja y otra caja y una caja cuesta 625 por otra caja va aumentar el precio porque van a ser dos cajas entonces aumenta el precio por el número de cajas. Es como las multiplicaciones.
- Luis. Ah, a ver la proporcionalidad es como las multiplicaciones ¿es cierto Nancy? A ver dígame qué es la proporcionalidad usted que lo dijo.
- Nancy. Son comparaciones por ejemplo en una caja su precio es de \$625 por tres cajas son \$1875.
- Luis. Entonces ¿cuál es la función del valor proporcional que decías hace rato?, ¿cuál es su función en esta tabla?
- Nancy. Que tengo que ir comparándolo para ver qué número puede llegar a lo que es el equivalente.

Puede verse que durante este momento de institucionalización Luis se apoya en el trabajo con el discurso tecnológico-teórico, porque al parecer hay una aproximación a la Teoría de las Razones y Proporciones desde la explicación y justificación que hacen los alumnos sobre el significado de la proporcionalidad, en este fragmento se observa el uso de elementos como la multiplicación, el valor proporcional, la regla de tres y la variación proporcional (si aumenta el número de cajas aumenta el costo a pagar).

Si bien es cierto que Luis no establece un cierre donde puntualice for-



malmente el concepto de proporcionalidad y de aquellos que le circunscriben, recurre a lo que para ese grupo social significa tal concepto y a partir de los conocimientos planteados por los alumnos, cierra la tarea. Esta idea muestra lo que Chevallard (1999) señala sobre el proceso de reconstrucción de una OM, es necesario institucionalizar progresivamente los elementos matemáticos considerados por una comunidad de estudio o por una institución, para distinguirlos de aquellos que sirven sólo como instrumentos auxiliares de la construcción.

En otro tipo de institucionalización, Luis no explica un concepto matemático sino la relación que se establece entre las magnitudes implicadas en la tarea, al igual que en el ejemplo anterior se basa en los conocimientos de los alumnos para establecer un saber sobre una técnica que valide los resultados discutidos en el momento tecnológico-teórico, el término del porcentaje es retomado para confirmar los rangos mínimo y máximo que pueden darse entre los precios de las cajas combinadas de calcetines:

—Luis. Muy bien entonces no podemos formar cajas que cuesten menos de 670 porque eso cuesta la caja más barata sino la caja quedaría incompleta, ahora ¿se puede armar una caja con un valor superior a \$915?<sup>17</sup>

—As. (No contestan).

—Luis. Fíjense bien, si decíamos que no podemos formar cajas combinadas menores de \$670 porque no quedarían completas, entonces ¿qué pasaría si queremos una caja que cueste más de \$915?

—As. Dividimos las dos y las sumamos.

—Luis. ¿Cuánto cuesta la caja más cara?

—As. 915.

—Luis. ¿De qué es esa caja?

—As. De calcetines «El mexicano».

—Luis. ¿Y si ya dijimos que no podemos armar cajas menores de 670 porque son incompletas ¿qué pasa si queremos cajas de más de 915?

—Jesús. Tampoco se puede.

—Luis. ¿Por qué no se puede Jesús?

—Jesús. Porque se pasa.

---

17. La tarea consistía en armar cajas combinadas con las cajas de diferente tipo, la más barata con un costo de \$670 y la más cara con un precio de \$915. La intención de Luis era que los alumnos identificaran el rango del precio que se tendría que pagar en cajas de calcetines combinadas.

—Luis. ¿Cómo que se pasa?

—Jesús. Sí, de 915 y ese es el más caro.

—Luis. Bien ¿si entendieron todos?

—Luis. No podemos armar cajas más baratas de lo que cuesta la caja del «Cotton» que es de 670 y no podemos armar cajas más caras de lo que cuesta la caja del «Mexicano» que es de 915, acuérdense de lo que hizo Diego con los porcentajes, no alcanzábamos el 100%, faltaba. Entonces no es posible armar una caja que tenga un valor menor o mayor al precio de las cajas, por lo que tiene que estar siempre dentro del rango establecido, es decir entre 670 y 915 puesto que 670 es una caja completa del calcetín más económico y un menor precio significa una caja de ese mismo calcetín pero incompleta. Lo mismo sucede con el de mayor costo, pero si es más de 915 sería más de una unidad.

En este momento de institucionalización Luis, recurre a la mayéutica socrática para solicitar la justificación de los argumentos que esgrimen los alumnos y al igual que el profesor José, pretende formalizar la relación que se establece entre las magnitudes, las respuestas acertadas de los alumnos le permiten llegar progresivamente a una conclusión que ha sido comprendida por el grupo.

El siguiente fragmento corresponde al cierre de la experimentación del REI, donde el propósito de Luis es que los alumnos identifiquen la evolución de las técnicas que utilizaron en las diferentes tareas. En lo que sigue se muestra cómo se hace el cierre de dicho proceso de estudio, pero sobre todo el saber que es institucionalizado como producto del REI.

—Luis. Por último, ¿ustedes creen que pudiera haber una fórmula general para que pudiéramos conocer los porcentajes que debe incluir una caja de cada clase de calcetines para obtener determinado precio final?

—As. (Se quedan pensando).

—Luis. Acuérdense de lo que hicieron Diego y Nancy con los porcentajes, ¿creen que podemos sacar una fórmula?

—As. ¿Igual que en Geometría?

—Luis. Sí algo así. ¿A ver díganme sus respuestas?

—Israel. Multiplicando y dividiendo.

—Luis. ¿Cómo? O ¿qué?

—Israel. Las cajas de Cotton y las mexicanas.

- Luis. ¿Alguien más?
- César. Multiplicando y dividiendo, sacando decimales y sumándolos y después dividirlo.
- Jocelyn. La regla de tres.
- Luis. ¿Por qué la regla de tres?
- Jocelyn. Porque ahí multiplicamos y dividimos las cajas.
- Luis. Pero si quisiéramos una fórmula donde digamos qué es lo que vamos a dividir y qué es lo que vamos a multiplicar, ¿cómo la haríamos?

En este fragmento se observa la intención de Luis por institucionalizar un modelo que vaya más allá del modelo aritmético, para ello les cuestiona sobre la posibilidad de construir una fórmula general que permita conocer los porcentajes de cada caja con diferente tipo de calcetines en las cajas combinadas. Los alumnos intentan responder el cuestionamiento al describir una serie de técnicas con fundamento aritmético:

- A2. Se multiplican las cajas entre los calcetines.
- Óscar. Dividimos el costo por la cantidad para sacar el problema.
- Jesús. Dividir lo que hay en cada caja es igual al 100%.
- Luis. Muy bien ahí tenemos varias formas de sacar los resultados, alguien nos puede dar otra, a ver Diego ¿tú que tienes?
- Diego. Dividir lo que va a pagar el cliente entre la caja que más quiera, multiplicarlo por el precio de la caja y hacer lo mismo con el precio de la otra caja.
- Luis. Entonces, para una fórmula se tiene que hacer lo que en todos los ejercicios de las mezclas, pero en la fórmula tenemos que sustituir los números por letras de manera que no importen los precios de los calcetines siempre que haya dos tipos distintos que mezclar para utilizarla por ejemplo podemos usar la fórmula  $a+b = c$ .
- As. (Parecen no comprender).
- Luis. A ver por ejemplo a y b son las distintas clases de calcetines, a serían los calcetines «Cotton», b «El Mexicano» y c sería la nueva mezcla. Con la fórmula se hacen diferentes operaciones para llegar a las cantidades que debe tener cada mezcla, en este caso la suma de dos elementos diferentes mezclados dan un tercer elemento. Vamos a verlo con un ejemplo si tenemos 2.4 cajas que son a, de los calcetines «Cotton» más 1.6 cajas de b que son los calcetines «El Mexicano», entonces

vamos a encontrar que  $c$ , que es la mezcla o suma, vale 4. (Escribe en el pizarrón  $2.4$  de  $a + 1.6$  de  $b = 4 c$ . ¿Si entendemos?

—As. Más o menos.

—As. Es que está muy difícil usar letras.

—Luis. ¿Qué se les hace difícil?

—As. No saber cuánto valen.

—As. Es que necesitamos la cantidad.

—Luis. Cuando usamos letras, hacemos uso del Álgebra, pero en lugar de números usamos letras como la  $a$ , la  $b$  y la  $c$ . Con esas letras se hacen operaciones como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y otras. Si saben hacer las operaciones en primaria no deben tener miedo al Álgebra porque es muy parecido.

Como se puede observar, la intención de Luis es institucionalizar un modelo algebraico para las mezclas de las cajas de calcetines, pero es perceptible la dificultad de los alumnos para transitar de un modelo aritmético a un modelo algebraico. Cuando institucionaliza la fórmula  $a+b=c$ , más que hablar del precio de una mezcla trabajada en tareas previas, se refiere sólo a la unión de dos tipos de cajas de calcetines, este hecho simplifica la tarea pues sólo muestra a los alumnos los valores de  $a$  y  $b$  para encontrar el valor de  $c$ .

Cabe señalar que el contexto de cajas de calcetines planteado en el REI tuvo ciertas dificultades en la resolución de tareas, principalmente en aquellas tareas relativas a la mezcla de cajas, donde los alumnos dudaban si la mezcla era del número de calcetines o de cajas, es tal vez debido a esta dificultad que se presentaron problemas también en la institucionalización, en tanto que ésta constituye una síntesis o generalización de las actividades y producciones de los alumnos para comprender un objeto que es normado y legitimado por el discurso del profesor.

En este último momento del REI que gestionó Luis se observa la relación que existe entre la acción institucionalizadora y la construcción de un conocimiento que ha tenido ciertas dificultades para concretarse en un saber, por lo que se vuelve necesario preguntar ¿si los tipos de tareas fueron suficientes para llegar a una institucionalización de este tipo (modelo algebraico)?, ¿si las técnicas previas fueron trabajadas de manera suficiente?, ¿si fueron pertinentes para el tipo de tareas planteadas? y sobre todo ¿hasta qué punto permitieron la evolución de ciertas técnicas hacia otras más elaboradas?.

Por último, puede decirse que de los momentos gestionados por Luis a lo largo del REI, el que mejores resultados mostró fue el momento tecnológico-teórico, donde desplegó una gran variedad de funciones de la tecnología para describir, explicar, validar, motivar y hasta evaluar la técnica, mientras que el momento que más debilidades mostró fue la institucionalización, sobre todo por la dificultad de diversificar los dispositivos discursivos que se aproximaran a la organización matemática de estudio.

## APUNTES PARA UN CIERRE PROVISIONAL

Dentro del campo de la Didáctica de las Matemáticas la línea de estudios sobre la formación de profesores es quizá la de más reciente consolidación, dado que existen desarrollos teóricos que han permitido mejorar los análisis sobre los procesos de formación de profesores, específicamente se han desarrollado numerosos estudios sobre los tipos de conocimiento de los profesores de Matemáticas.

En este sentido puede verse que el campo de la Didáctica de las Matemáticas se torna cada vez más estructurado; su evolución en las últimas décadas lo ha convertido en una de las áreas de investigación con un gran número de estudios sobre los fenómenos de transmisión del saber matemático que han generado numerosas propuestas para transformar los currículos de diferentes partes del mundo. Sin embargo, el diseño de dispositivos para la formación de profesores es todavía una línea de investigación incipiente, sobre todo, cuando de formación inicial de profesores se trata. En este contexto, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) ha representado en los últimos años un soporte conceptual para este tipo de investigaciones, es precisamente en esta perspectiva en la que se ha centrado este trabajo, específicamente en dos dimensiones, la primera consideró al profesor en formación como aprendiz de matemáticas y la segunda como eventual profesor.

A lo largo de la investigación se hizo un análisis sobre la formación inicial de los estudiantes normalistas tomando en cuenta cuestiones relativas a los saberes académicos y las concepciones personales sobre un saber matemático, en este caso la proporcionalidad y el conocimiento práctico reflejado en los diseños de las praxeologías didácticas. Con este análisis se identificó la dificultad que desde el plan de estudios vigente en las instituciones formadoras de docentes se tiene para especificar las competencias de un profesor que va a enseñar matemáticas, dificultad que se manifiesta institucionalmente a través de un «generalismo pedagógico» que establece un conjunto demasiado amplio de competencias, explícitas de manera ambigua en el tipo de organizaciones matemático-didácticas que requiere un profesor en formación.

Otro de los objetivos de la investigación fue la revisión de la proporcionalidad en el texto del saber de las instituciones formadoras de docentes (Plan de estudios 2012). Se revisaron las praxeologías matemáticas y didácticas incluidas en el programa de la asignatura de *Aritmética: su aprendizaje y su enseñanza* tomando como referencia la noción de praxeología, específicamente el tipo de tareas, técnicas, discursos tecnológicos y teorías que pudieran fundamentar el estudio de la proporcionalidad. Una vez revisado el texto del saber, donde se incluyen cuatro temáticas de estudio: razón y proporción, concepto de porcentaje y su representación gráfica, resolución de problemas de porcentaje y variación proporcional directa, se observó un desequilibrio en la programabilidad del tiempo didáctico dedicado al estudio de la proporcionalidad.

Otro rasgo es la extrema generalidad de las competencias en esta unidad del programa puesto que se expresa la necesidad de que los profesores en formación identifiquen las propuestas teórico-metodológicas para la enseñanza de la aritmética y su transposición en la escuela primaria con la generación de ambientes de aprendizaje favorables, además de la identificación de los obstáculos de enseñanza y de aprendizaje y los instrumentos de evaluación. Dichas propuestas se basan en el «monumentalismo» y el «generalismo», puesto que se anteponen praxeologías existentes y generalizadas sobre el estudio particular de las problemáticas de formación ante un saber determinado.

En cuanto al número de tareas que se asignan a cada temática, la mayoría de tareas son para el estudio de las praxeologías matemáticas en las que el profesor en formación asume un rol de aprendiz de Matemáticas para establecer la relación entre los saberes aritméticos convencionales de la escuela normal y los de la escuela primaria, para tal propósito se plantean tareas que intentan que el estudiante obtenga el dominio matemático. No obstante, en el programa es visible la reducción de momentos de institucionalización con los cuales los profesores en formación podrían reconocer y nombrar los objetos matemáticos desde la convencionalidad, aunque no desconocemos que dichos momentos pueden ser gestionados por el formador aun cuando no se incluyan en los programas.

En las praxeologías didácticas, no se presenta un discurso teórico que justifique el tipo de tareas y técnicas, si bien se habla de un enfoque basado en competencias y ocasionalmente del diseño de situaciones didácticas, no hay una postura teórica que las defina, es decir, no hay un bloque tecnológico-teórico que permita el análisis sobre el hacer didáctico.

El tipo de tareas didácticas se orienta principalmente hacia los análisis sobre las técnicas, logros y dificultades que podrían tener los alumnos de la escuela primaria en la solución de tareas matemáticas, sólo se plantea una tarea en la que se pide el diseño de situaciones problemáticas similares a los de los textos oficiales, sin embargo no se plantea un momento para que el profesor en formación realice la experimentación de alguna situación didáctica de proporcionalidad.

Si se considera que los «saberes a enseñar» devienen en «saberes a hacer» en los que se muestran componentes teóricos y prácticos, los dispositivos de formación precisan de dicha consideración para ser implementados, de tal forma el *REI-FP* que aquí se experimentó intentó por una parte dar respuesta a las dificultades encontradas en el texto del saber ante el desequilibrio de las praxeologías matemáticas y las didácticas incorporando tareas didácticas que paliaran tal desequilibrio, y por otro lado mostrar el desarrollo de éstas sobre un concepto matemático. El dispositivo de formación permitió abordar cuestiones institucionales y estrategias que orientaron la práctica de los profesores en formación en el estudio de la proporcionalidad. Desde la vivencia, el análisis, el diseño y la experimentación de un REI se permitió la movilización de saberes tanto matemáticos como didácticos.

En el primer módulo del REI-FP, el profesor en formación se posicionó como aprendiz de Matemáticas, se identificaron diversas técnicas y discursos tecnológicos con los cuales se llevó a cabo la reconstrucción de una praxeología vinculada a la proporcionalidad, el propósito de este módulo consistió en mostrar la evolución de técnicas en el tránsito de un modelo aritmético hasta un modelo algebraico, se esperaba que la secuencia de tareas llevara al profesor en formación al uso de una técnica en particular. Lo relevante en el primer módulo («Vivir un REI») fue por un lado la transición gradual del tipo de tareas que permitió a los profesores en formación evolucionar de técnicas aritméticas hacia técnicas algebraicas y por otra parte la identificación de técnicas y discursos tecnológicos propios de la proporcionalidad.

En el módulo dos (analizar un REI), resultó indispensable el análisis de las praxeologías vividas así como los alcances y restricciones que una institución establece para el estudio de un saber, en ambos casos la identificación de las cuestiones planteadas, las tareas enunciadas, las técnicas demandadas, el discurso tecnológico que justifica y la teoría que sustenta la razón de ser de ese saber,



constituyen elementos necesarios para el diseño y posterior experimentación de OD en la escuela primaria por los profesores en formación.

Desde la perspectiva del profesor analista resalta la identificación de conceptos matemáticos implícitos en la «Situación Petróleo» y las técnicas a que dan lugar las tareas resueltas. En cuanto a los conceptos identificados destaca el de proporcionalidad, el factor constante, la variación proporcional directa y en algunos casos el de razón. Respecto al tipo de técnicas la mayoría señaló la regla de tres como aquella que mayor relación tenía con tareas de proporcionalidad, además del valor unitario, la constante de proporcionalidad y en menor medida la técnica algorítmica, esta situación muestra que aunque las características institucionales especifican ciertas cuestiones para ser «enseñadas», los profesores en formación también recuperaron elementos «estudiados» desde el REI vivido.

Las principales dificultades que se presentaron en el módulo dos tuvieron que ver con la identificación de algunas nociones vinculadas a la proporcionalidad así como la distinción entre tarea y técnica, este hecho subraya la necesidad de revisar desde la institución formadora los tipos de tareas y de técnicas que se incluyen en el texto del saber de la escuela primaria, pero sobre todo la vinculación entre conceptos y la naturaleza con que las técnicas pueden evolucionar a partir de esa estructura curricular.

En cuanto a las planeaciones de los profesores en formación, en ambos casos el diseño del REI seguía la misma secuencia de tareas planteada en el REI «vivido», sólo modificaron la situación principal, en lugar de la «Situación Petróleo» PF5 planteó la «Situación Refrescos», mientras que PF7 estableció la «Situación Cajas de calcetines». En sus recorridos, los dos estudiantes normalistas plasman una serie de tareas que generaron la aparición de técnicas diferenciadas. Con esas tareas se observa que los dos profesores en formación buscan permanecer dentro de los límites del texto del saber de la escuela primaria al elegir tareas semejantes a las planteadas en el currículo escolar.

En cuanto a las praxeologías didácticas, ambos profesores en formación plantean casi los mismos momentos de estudio: el primer encuentro, la constitución del entorno tecnológico-teórico y ocasionalmente la institucionalización, este último momento se caracteriza por las dificultades en la especificación del objeto de saber formalizado y en la descripción de la funcionalidad y eficacia de las técnicas.

La experimentación didáctica que hacen los profesores en formación cons-

tituye la actividad fundamental del módulo cuatro, en éste se identificaron las tareas, las técnicas y los elementos tecnológico-teóricos que los profesores en formación gestionaron, con ello se observó el tipo de praxeología didáctica reconstruida por los profesores en formación en su papel de aprendiz de profesor, gestión que derivó de la reconstrucción del REI elaborado en el módulo tres. Ambos gestionaron el «primer momento» a través de la «devolución de la tarea» aunque con ciertas diferencias, José (PF5) no se preocupa por devolver el medio, lo que indica que no realiza acciones con las cuales los alumnos de sexto grado comprendan el significado de la tarea, Luis (PF7) por su parte cuestiona a los alumnos sobre la intención y la estructura conceptual de la tarea como preludio para la devolución.

En cuanto al momento exploratorio se refiere, fue visible cómo los profesores en formación asumieron dos tendencias, por un lado y la más persistente se dio en el caso de José, fue una gestión de poco acompañamiento en la que no intentaba que los alumnos comprendieran la tarea, más bien buscaba la resolución radicalmente autónoma por parte de los alumnos. Desde la perspectiva de Luis se observaron diferentes aproximaciones, algunas en las que los alumnos de manera autónoma se acercan a la tarea para la búsqueda de la técnica, hasta aquellas donde la evocación, la aplicación y el control se hicieron presentes. A diferencia de Luis la postura de José se mostró un tanto alejada en la gestión de estos dos primeros momentos, lo que resulta coherente con las mínimas oportunidades que se tienen desde la formación inicial para el análisis y la experimentación de las praxeologías didácticas, aunque resulta contradictorio con los propósitos del REI-FP desarrollado.

En la gestión del momento tecnológico-teórico Luis buscó que surgieran tecnologías cada vez más formalizadas mientras más compleja se volvía una tarea, sus cuestionamientos buscaban una validación con mayor rigor. Por su parte José gestiona también los momentos tecnológicos a partir de cuestionamientos con los cuales provocó la aparición de cuatro funciones de la tecnología: la descripción, la facilitación de su aplicación, la motivación y la validación de la técnica. A partir de estos hallazgos se puede afirmar que la gestión del momento tecnológico-teórico es el de mayores fortalezas en la experimentación de los REI y aunque el texto del saber no incluye tareas en las que se requiera explicitar las funciones de la tecnología, los estudiantes normalistas justifican con un discurso tecnológico las técnicas empleadas a lo largo de su experimentación.

En el momento de la institucionalización no hubo variantes significativas; la gestión de José se centra en retomar las técnicas de los alumnos para explicarlas y justificarlas sin mostrar un concepto o praxeología matemática formalizados, se podría decir que la evolución técnica y tecnológica que mostraron los alumnos derivó de la naturaleza de las tareas planteadas en el REI más que del momento de institucionalización. La gestión de Luis se apoya en el discurso tecnológico-teórico presentado por los alumnos, quienes aluden a técnicas y justificaciones de la Teoría de las Razones y Proporciones, aunque tampoco expresa formalmente el concepto de proporcionalidad y sus nociones sí recupera los conocimientos construidos por los alumnos para realizar una «institucionalización parcial». Cabe señalar que Luis fue el único que planteó una tarea del tipo algebraico que consistía exclusivamente en la transición de una representación aritmética a una algebraica ( $a+b=c$ ), sin embargo ante las dificultades mostradas por los alumnos la institucionalización se centró en «comentar» las ventajas de generalización del Álgebra frente a la Aritmética. Se puede afirmar entonces que el momento con mayores dificultades fue el de la institucionalización, mismas que derivan de las pocas o nulas oportunidades que tienen los profesores en formación para establecer la vinculación entre las praxeologías matemáticas y didácticas cuando la mayoría de las tareas de formación se centran en la resolución de tareas matemáticas.

La intención de este estudio era identificar las praxeologías de formación en torno a la proporcionalidad que resultaran efectivas al experimentar un REI para la formación de profesores en las escuelas normales, en este sentido y a partir de los resultados encontrados se puede afirmar que la implementación del REI-FP resultó pertinente en tanto que permitió la reconstrucción de Organizaciones Matemáticas vinculadas a una cuestión matemática como la proporcionalidad. Otro de los logros identificados radicó en la superación de los problemas de articulación del estudio de la proporcionalidad encontrados en el texto del saber tanto en la institución formadora de docentes como en la escuela primaria puesto que mientras en estos el estudio se basaba en nociones aisladas y la poca explicitación de las técnicas pertenecientes a cierto tipo de tareas, el diseño y la gestión del REI permitió a los estudiantes comprender la forma en que esta desarticulación puede ser superada a partir de una situación problemática eje y una cuestión generatriz previamente determinada.

Desde esta perspectiva, un acierto más del REI-FP lo constituyó la descrip-

ción y análisis de un MER matemático que dio cuenta de la factibilidad de la Teoría de Razones y Proporciones para comprender los nexos que se establecen entre las nociones matemáticas que, desde otra perspectiva sería difícil identificar, dada la desarticulación y falta de secuencia entre los objetos de saber matemático propuestos en los programas educativos de la escuela primaria. Otro de los aciertos palpables fue la experimentación de dos procesos de estudio del profesor en formación: por un lado como aprendices de Matemáticas tuvieron la posibilidad de «vivir» un conjunto de praxeologías gradualmente más complejas que permitieron la evolución técnica y tecnológica de la proporcionalidad «clásica» a la relación funcional; por otro lado como aprendiz de profesor en el que se diversificaron las tareas didácticas más allá de las explicitadas en el reducido espacio del texto del saber.

Ahora bien, desde la TAD uno de los elementos de mayor relevancia son las cuestiones problemáticas que puedan llevar a la (re)construcción de nuevas tareas a la emergencia de nuevas técnicas y a la justificación tecnológica, una de las principales dificultades que se identificaron fue el diseño de un proceso de estudio que diera respuesta a la naturaleza de las praxeologías matemáticas, pero también la identificación de una cuestión que justificara su pertinencia ante las restricciones institucionales de la escuela primaria que le diera una razón de ser no sólo desde el contexto matemático sino también desde las necesidades didácticas de los profesores en formación.

En cuanto a las praxeologías didácticas, uno de los principales obstáculos fue la carencia de un Modelo Didáctico de Referencia Didáctico que permitiera justificar el proceso de estudio. Esta dificultad se vio manifiesta en el módulo cuatro, del REI-FP dónde los profesores en formación tuvieron dificultades desde el diseño hasta la experimentación del REI en la escuela primaria, puesto que no identificaban con precisión los momentos didácticos o las situaciones didácticas que les permitieran puntualizar los contratos didácticos más factibles para el desarrollo de una clase escolar. En este sentido se podría decir que en el diseño mismo del REI-FP faltó mayor precisión para la integración de tareas didácticas que permitieran a los profesores en formación la elaboración de planes de clase bajo un Modelo Didáctico de Referencia estudiado a profundidad.

Un aspecto a considerar para la elaboración de futuros REI-FP, es que el desarrollo de éstos y de los REI en la escuela primaria requiere mayor tiempo es-

colar del que se plantea en una clase convencional, así como una estructuración diferente de los objetos de estudio.

El REI-FP permitió apreciar las dificultades de gestionar momentos donde los profesores en formación actúen con un dominio didáctico, hecho que también se deberá considerar para la elaboración de próximos dispositivos de formación en los que se amplíe el número de tareas de este tipo, sobre todo aquellas que les permitan un mejor desempeño en el momento de la institucionalización. La superación de esta dificultad lleva pues a la ruptura de los contratos didácticos vigentes en las escuelas formadoras de docentes, pero también a la reconsideración de las restricciones matemáticas y didácticas de un sistema educativo que puede ser abierto a la experimentación de otras propuestas de intervención.

También se pueden especificar algunos alcances de la investigación, así como las ventajas y limitaciones del enfoque teórico y metodológico empleados. En función de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, se encontró que las organizaciones praxeológicas de los profesores en formación están fuertemente determinadas por las restricciones institucionales, desde las técnicas y tecnologías expresadas en el módulo uno (Vivir el REI) hasta los momentos de estudio desarrollados en el módulo cuatro (Experimentación del REI). Los estudiantes normalistas despliegan praxeologías muy cercanas al texto del saber.

Por otra parte, cabe destacar que se observaron logros significativos con la experimentación del REI-FP, visibles en la evolución técnica y tecnológica de las praxeologías matemáticas, es decir, los profesores en formación identificaron la relación entre las diversas nociones vinculadas a la proporcionalidad con lo cual se vio reforzado el uso y el discurso de elementos propios de la Teoría de Razones y Proporciones inscrita en el Modelo Epistemológico de Referencia. En cuanto a las praxeologías didácticas, los alcances se hicieron visibles en el diseño de un REI para la escuela primaria, de igual forma durante la experimentación los profesores en formación mostraron dominio respecto a los momentos de estudio implicados en la gestión didáctica, principalmente se mostraron hábiles para gestionar el momento tecnológico-teórico.

Se puede decir que la diferencia entre las praxeologías matemáticas y didácticas estuvo determinada por algunas restricciones institucionales que limitaron un alcance más equilibrado del REI-FP, la principal fue el tiempo didáctico para su implementación, puesto que tuvo que diseñarse en función de los momentos

en los que los profesores en formación se encontraban en la Escuela Normal, ello implicó que no pudiera ampliarse el número de tareas didácticas ni pudieran gestionarse discusiones colectivas (de validación) sobre los diseños del REI de la escuela primaria.

Finalmente, puede decirse que los resultados obtenidos en esta investigación permiten determinar las ventajas de que en las instituciones formadoras de docentes se implementen REI-FP en diversas áreas, sectores, cuestiones y temas matemáticos desde los primeros años de formación en la escuela normal estableciendo un equilibrio teórico y metodológico entre las praxeologías matemáticas y las didácticas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguayo, L. (2005). *La transposición del «saber didáctico». Un estudio con profesores en formación en el contexto de los números racionales* (Tesis Doctoral). Universidad Pedagógica Nacional. México.
- Aguayo, L. M., Mendoza, J.M. (2015). Tecnologías didácticas de los profesores en formación. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM XIV*. 3-7 mayo, Chiapas, México.
- Artaud, M. (2006). «La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fonctions», en L. Ruiz, A. Estepa, F. J. García, (Eds). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 241-259. España, Universidad de Jaén.
- Artigue, M. (1995). «El lugar de la didáctica en la formación de profesores», en M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, P. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Iberoamérica, México, pp. 7-23.
- Atriano, R. A., Benítez, A., Ramírez L. V. (2013). «El reto de las escuelas formadoras de docentes en el Estado de México ante la reforma educativa», en *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. México.
- Ávila, A. (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar* (Tesis de doctorado). Universidad Nacional Autónoma de México. México.
- Balderas, R. G., Block, D. y Guerra, M. T. (2011). «La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros», en *Memorias del XI Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE, A.C.
- Balderas, R. G., Block, D. y Guerra, M. T. (2014). «Sé cómo se hace, pero no por qué». Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria», en *Educación Matemática*, 26(2), pp. 7-32.
- Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2011). «Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias», en A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, & C. Ladage (Eds). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. II congrès international sur la TAD*, pp. 527-549.

- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón J. (2013). «Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática», en *Educación Matemática*, 15(1), pp.1-28.
- Bauersfeld, H. y Skowronek, H. (1976). «Research related to the mathematical learning process», in Athen & Kunle (eds), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*, pp. 231-245.
- Bkouche, R. (s.f). *Proportionnalité et règle de trois*. Recuperado de <http://michel.delord.free.fr/rb/rb-gien2006.pdf>
- Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México, D.F. SM de Ediciones, S.A. de C.V.
- Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* (Memoria realizada para la obtención del título de doctor). Universidad de Zaragoza, Provincia de Zaragoza.
- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). «La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad», en *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 21(2), pp. 237-304.
- Boisnard, D., Houdebine, J., Julio, J., Kerboeuf, M.-P. & Merri M. (1994). *La proportionnalité et ses problèmes*. Paris: Hachette.
- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* (Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias). Facultat de Ciències. Barcelona.
- Bosch, M., Gascón, J. (2002). «Organiser l'étude 2. Théories & empiries», in J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris, (eds). *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 23-40.
- Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). «El profesor como director de procesos de estudios. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas», en *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(1), pp. 79-135.
- Bosch, M., Gascón, J. (2007). «Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los «talleres de prácticas matemáticas» a los «recorridos de estudio e investigación»», in A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, & C. Ladage (Eds.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action, II<sup>e</sup> congrès international sur la TAD*, pp. 55-91.
- Bosch, M., Gascón, J. (2009). «Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria», en M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander: SEIEM, pp. 89-113.



- Brousseau, G. (1980). «L' échec et le contrat», en *Recherches* 41, pp. 177-182.
- Brousseau, G. (1982). *Préambule*, Documento presentado al Ministère de la Recherche, Talence, Francia.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B. *Trabajos de Matemática*, núm. 19.
- Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. y Saiz, I. (comps) *Didáctica de la Matemática. Aportes y Reflexiones*. Buenos Aires, Paidós Educador, 1994.
- Brousseau, G. (1994a). «Perspectives pour la didactique des mathématiques», in M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot, & N. Balacheff, (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La pensée sauvage, pp. 51-66.
- Brousseau, G. (1994b). *Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques*. Washington: ICMI Study 94.
- Brousseau, G. (1995) Glossaire de didactique des mathématiques, en *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*, Copirelem, IREM d' Aquitaine & LADIST.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Brousseau, G. (2000). «Educación y didáctica de las matemáticas», en *Revista Educación Matemática*, núm. 12 (1). Iberoamérica, México.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al Estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Butlen, D. y Peltier, M. L. (1994). Enseigner la didactique des mathématiques aux futurs professeurs d'école. *Document de travail pour la formation des enseignants*. Université Paris 7-IREM.
- Carrillo, J., Coriat, M y Oliveira, H. (1998). Teacher Education and investigation into teachers knowledge. In K. Krainer, F. Goffree, P. Berger, (Eds), *On research in teacher Education. From a Study of Teaching Practices to issues in Teacher Education. Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 1)*. Osnabrück, Germany, pp. 99-145.
- Castañeda, A., Rosas A., Molina, J. G. (2012). La institucionalización del conocimiento en la clase de matemáticas. Un estudio sobre el discurso del aula. *Perfiles educativos*. 34(135), pp. 26-40.
- Castela, C. (2008). «La noción de praxeología: un instrumento de la Teoría Antropológica

- de lo Didáctico posiblemente útil para la socioepistemología», en P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C, pp. 1195-1206.
- Castela, C. & Romo, A. (2011). «Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs», en *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), pp.123-162.
- Ceballos, E. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja* (Informe de práctica presentado para optar por el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- Cedillo, T. y Cruz, V. (2012). *Desarrollo del pensamiento algebraico*. México. Pearson.
- Cedillo, T., Isoda, M., Chalini, A., Cruz, V., Ramírez, M. E. y Vega, E. (2012). *Matemáticas para la Educación Normal: guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética*. México: Pearson/SEP.
- Celis, A.B., Pérez, M.G., Torres, E. (2013). «El uso de algunas herramientas que ofrece Internet, en la formación docente», en *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. Guanajuato, México.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE, Buenos Aires.
- Chevallard, Y. (1994) Les processus de transposition didactique et leur théorisation In G. Arsac, Y. Chevallard, A. Martinand. *La transposition didactique à l'épreuve*, Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 135-180.
- Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997) *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. España, Editorial ICE/Horsori.
- Chevallard, Y. (1997a). «Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique. Communication au Colloque International Savoirs scolaires, interactions didactiques et formation des enseignants (Marseille, 28-30 avril). Paru dans Skholê», núm. 7, pp. 45-64.
- Chevallard, Y. (1997b) L'enseignement des SES est-il une anomalie didactique? Skholê. *Cahiers de la recherche et du développement*, núm. 6, IUFM de l'Académie d'Aix-Marseille, pp. 25 - 37.
- Chevallard, Y (1997c) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, núm. 17 (1), pp. 17-54.
- Chevallard, Y. (1998a). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. AIQUE Grupo Editor, Buenos Aires.

- Chevallard, Y. (1998b). Sur l'inadéquation de la formation première des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire français. Etude préliminaire à la conférence préparatoire à l'*ICMI Study on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Singapour, 8-12 décembre).
- Chevallard, Y. (1999). «L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique», en *Recherches en didactique des mathématiques* 19 (2), pp. 221-266.
- Chevallard, Y. (2000). «Individualisation de la formation ou apprentissage collectif des savoirs?», en *Notes pour un exposé à la librairie Páidos*. Marseille.
- Chevallard, Y. (2001) «Aspectos problemáticos de la formación docente», en *Conférence donnée le 1er avril 2001 dans le cadre des XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM) tenues à l'Escuela de Magisterio de Huesca* (Université de Saragosse).
- Chevallard, Y. (2002a). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée: raisons d'être, fonctions, devenir. Communication aux *Journées de la commission inter-IREM Didactique* (Dijon, 24-25 mai 2002). Paru dans les actes correspondants, IREM, Dijon, pp. 1-26.
- Chevallard, Y. (2002b). «Organiser l'étude. 1.Structures & Fonctions», in J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble La Pensée Sauvage, pp. 3-22.
- Chevallard, Y. (2002c). «Organiser l'étude. 3.Ecologie & Régulation», in J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble La Pensée Sauvage, pp.41-56.
- Chevallard, Y. (2007). «Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique», en L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F.J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica*, Jaén: Universidad de Jaén. pp. 705-746.
- Contreras, L. C. y Carrillo J. (2000). «Formación inicial de los maestros y resolución de problemas», en *La Gaceta* 3(6). Universidad de Huelva, pp. 1-11.
- Dalmau, J. (1938). *Aritmética Razonada y nociones de Álgebra*, Dalmau-Pla, Girona, 79ª Ed.
- Dorado, I., Díaz, J. L. (2014). «Uso de la función exponencial para modelar crecimiento microbiano», en *El cálculo y su enseñanza*, 5(5), pp. 75-90.
- Farnham-Diggory, S. (1994). «Paradigms of knowledge and instruction», en *Review of Educational Research*, 64(3), pp. 463-477.
- Fennema, E., Franke, M. (1992). «Teacher's knowledge and its impact», in: D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan, pp. 147-164.

- Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional un estudio con alumnos de primaria* (Tesis Doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. Valencia, España.
- Fernández, V. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: Traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas* (Tesis para obtener el grado de magíster en enseñanza de las matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima-Perú.
- Ferrer, M. (2000) *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana* (Tesis de doctorado). Instituto Superior Pedagógico «Frank País García», Santiago de Cuba.
- Fonseca, C.; Casas, J.M.; Bosch, M.; Gascón, J. (2009). «Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización», en M. J. González, M. T. González, J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander.
- Fonseca, C. (2011). Recorridos de Estudio e Investigación: Una propuesta dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico para la creación de secuencias de enseñanza y de aprendizaje. *Paradigma*. 32 (1). pp. 55-70.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México: CINVESTAV, 2001.
- García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis Doctoral). Universidad de Jaén. Departamento de Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Matemáticas y Sociales). Andalucía, España.
- Gascón, J. (1998). «Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica», en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1 (52), pp. 7-33.
- Gascón, J. (1999). «Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas», en Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, pp.129-150.
- Gascón, J. (2001). «Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes», en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 4 (2), pp. 129-159.
- Gascón, J. Bosch M. (2007). «La miseria del generalismo pedagógico, ante el problema de la formación del profesorado», en L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, F. J. García, (Eds). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 201-240. Jaén: Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones.

- Gascón, J. (2011). «Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental», en *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. 14 (2), pp. 203-231.
- Godino, J. D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. España: Gami, S.L.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2003). *Matemáticas y su Didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada, España: Gami, S.L.
- Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). «La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño». Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME 8 con el título, «*Didactic engineering as design-based research in mathematics education*». Turquía.
- Gómez, P. (2001). «Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas», en F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico, J. Roldán, (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI*. Granada: Grupo Editorial Universitario, pp. 1245-1258.
- Hernández, S. (2013). Capital cultural en la formación inicial de la docencia en la Escuela Normal de Tlalnepan. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. Guanajuato, México.
- Houdement, C. (1995). *Projets de formation des Maîtres du premier degré en mathématiques: programmation et strategies* (Thèse de doctorat). IREM VII, Paris.
- Houdement, C., Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 289-322.
- Huraux-Masselot, P. (2000). *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre I.U.F.M.) aux pratiques quotidiennes en mathématiques en classe, des Professeurs d'Ecole (une étude de cas)*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7. France.
- Isoda, M., Olfos, R. (2009a). *La enseñanza de la multiplicación: el estudio de clases y las demandas curriculares*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Isoda, M., Olfos, R. (2009b). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

- Isoda, M. y Cedillo, T. (Eds.). (2012a). *Matemáticas para la Educación Normal*, tomo V, Vol. 2. México: Pearson/SEP.
- Isoda, M. y Cedillo, T. (Eds.). (2012b). *Matemáticas para la Educación Normal*, tomo VI, Vol. 2. México: Pearson/SEP.
- Kuzniak, A. (1994). *Etude des stratégies de formation en mathématiques utiles par les formateurs de maîtres du premier degré* (Thèse de doctorat). IREM VII. Paris.
- Lamon, S.J. (2005) *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.
- Lorenzano, C. J. (2010). Concepción estructural del conocimiento científico, metodología de los programas investigativos y criterios para formular políticas de investigación. *Electroneurobiología*. 18(1), pp. 3-254.
- Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo.
- Martínez, C, Perea, E., Piña, M. Y., (2013). La actualización y capacitación en la fase de implantación de la reforma curricular: el caso de la licenciatura en Educación Primaria en la BENM. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. Guanajuato, México.
- Mellado, V. (2003). Cambio didáctico del profesorado de ciencias experimentales y filosofía de la ciencia. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), pp. 343-358.
- Minor, J. M. (2013). La construcción de identidades en el hacer docente de los catedráticos de Educación Normal. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. Guanajuato, México.
- Neyret, R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants; nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts universitaires de formation des maîtres*. Thèse de Doctorat. Université J. Fourier, Grenoble.
- Olbrich, M., Paredes, S. (2011) Dispositivos de formación profesional: diálogos entre el campo de la investigación y de la formación profesional. *VIII Encuentro de Cátedras de Pedagogía de Universidades Nacionales Argentinas. Memoria Académica*. Universidad Nacional de la Plata. Argentina.
- Oller, A. M, (2012). *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, Departamento de Didáctica de las CCSS y de las CCEE. Valladolid.
- Peltier, M.L. (1995). *La formation initiale en mathématiques des professeurs d'école: «entre con-*

- joncture et éternité»: étude des sujets de concours de recrutement et contribution à la recherche des effets de la formation sur les professeurs stagiaires. Thèse de doctorat. Université de paris VII Denis Diderot, France.*
- Perrin, M.J. (1993) Questions Didactiques soulevées à partir del' enseignement des mathématiques Dans des classes «faibles». *Recherches en Didactique des mathématiques*, 13/1.2, pp. 5-118.
- Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L., Fernández, F. (2003) *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer. Una empresa Docente*, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Pezard, M. (1985). *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs*. Thèse de 3ème cycle, Université Paris VII, France.
- Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Suisse: Exploration Peter Lang.
- Pugalee, D.K. (2010). Strategies and activities to develop proportional reasoning in the middle grades. *National Council of Teachers of Mathematics Southern Regional Conference*, New Orleans, LA.
- Rivas, M. A., Godino, J. D., Castro, W. F. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Bolema*, 26(42B), pp. 559-588.
- Rodríguez, E., Bosch, M., Gascón J. (2006). Los recorridos de estudio e investigación en la reformulación didáctica del problema de la metacognición. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, F.J. García (Eds.). (2007). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 481-506.
- Rodríguez, M., Piña, C. y Soto, M. (2013). La construcción de un sujeto social: retos en la formación inicial de profesores. *Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. Guanajuato, México.
- Romo, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs: Mathematical education for undergraduate engineers* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot (Paris 7).
- Ruiz, L., García, F. J. (2007). Didáctica de las matemáticas y formación de maestros: respuestas y desafíos (desde la TAD) en A. Brooner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. II Congès International sur la TAD*, pp. 171-213.
- Ruiz, M. E. (2007). La proporcionalidad como noción disponible del docente. *Reunión Anual REM*, Universidad Nacional del Comahue.

- Ruiz, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. (Memoria de Tesis Doctoral). Facultad de formación de profesorado y educación. Departamento de Didácticas Específicas, Madrid.
- Sadovsky, P. (2005). «La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática», en H. Alagia, A. Bressan, P. Sadovsky, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* (Tesis Doctoral). Universitat Ramon Llull. Catalunya.
- SEP. (2011). *Documento base para la consulta nacional de la Reforma Curricular de la Educación Normal: Licenciatura en educación primaria, Licenciatura en educación preescolar y Licenciatura en educación preescolar intercultural bilingüe*. México.
- SEP. (2012a). *Plan de estudios de la Licenciatura en Educación Primaria*. DGESPE, México.
- SEP. (2012b). *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza. Licenciatura en Educación Primaria*. Programa del curso. DGESPE. México.
- SEP. (2012c). *Álgebra: su aprendizaje y enseñanza. Licenciatura en Educación Primaria*. Programa del curso. DGESPE. México.
- SEP. (2013a). *Desafíos Matemáticos. Quinto grado. Docente*. DGMIE/SEP, México.
- SEP. (2013b). *Desafíos Matemáticos. Sexto grado. Docente*. DGMIE/SEP, México.
- Shulman, L. S. (1986). «Paradigms and research program in the study of teaching: A contemporary perspective», in M.C. Wittrock (Ed). *Handbook of research on teaching*. New York, MacMillan.
- Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid. España.
- Simon, M. (1993). «Prospective Elementary teachers knowledge of division», en *Journal of Researches in Mathematics Education*, núm. 24(3). pp. 233-254.
- Simon, M. (1994). Learning Mathematics and Learning to Teach: Learning Cycles in Mathematics Teacher Education, *Educational Studies in Mathematics*, 26 (1), pp. 71-94.
- Simon M. (1995). «Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective», en *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 26(2), pp. 114-145.
- Souto, M. (1999). «Los dispositivos pedagógicos desde una perspectiva técnica», en Souto, M, et-al. Grupos y dispositivos de Formación. *Serie Los Documentos 10*, Novedades Educativas. Bs. As.



- Tanguy, L. (1995). «Questions de sociologue aux didacticiens sur les savoirs professionnels et leur enseignement», en G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Tiberghien, *Différents types de savoirs et leur articulation*, Paris, Ed. La Pensée sauvage, Grenoble, pp. 81-91.
- Thompson, A. G. (1992): Teachers beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: MacMillan, pp. 127-146.
- Tortosa L., Santacruz, J. (1997). Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la forma escalonada reducida de una matriz. *Suma*, 24, pp. 39-45.
- Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada. España.
- Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), pp.133-170.
- Wozniak, F. (2010). Transposition didactique interne et dialectique des médias et des milieux. In A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, & C. Ladage (Eds.). *Diffuser les mathématiques* (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: IUFM de l'académie de Montpellier, pp. 859-878.
- Wilson, S.M., «Shulman, L.S., & Richert, A.E. (1987). 150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching», en J. Calderhead (ed.), *Exploring teacher's thinking*. Sussex, England: Holt, Rinehart, & Winston, pp. 104-124.



**Taberna Librería  
Editores**

**ENSEÑAR A ENSEÑAR MATEMÁTICAS  
UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN  
PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES**

de Maricela Soto y Luis Manuel Aguayo,  
se terminó de imprimir en el mes de marzo de 2020,  
en los talleres gráficos de Signo Imagen.

Email: [simagendigital@hotmail.com](mailto:simagendigital@hotmail.com)  
Cuidado de edición a cargo de los autores.  
500 ejemplares

Actualmente, la formación de profesores es un objeto emergente en la investigación educativa. De manera particular la formación de profesores para la enseñanza de las Matemáticas ha sido un objeto de estudio recurrente en los últimos años. Diferentes perspectivas teóricas destacan la necesidad de otorgar una formación adecuada a los profesores, y en especial aluden al alcance y los efectos de los saberes del profesor respecto de la calidad de los aprendizajes de los estudiantes; por esta razón, no son pocos los estudios de alcance nacional e internacional sobre el bajo rendimiento escolar en Matemáticas que han ligado dicho aprovechamiento con la formación del profesorado.

En este contexto, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) ha representado en los últimos años un soporte conceptual para este tipo de investigaciones, es precisamente en esta perspectiva en la que se ha centrado este trabajo.

La investigación que aquí se presenta da cuenta de una manera alternativa de formar a los profesores de educación primaria para la enseñanza de las matemáticas, es decir, de un Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP) sobre la proporcionalidad, cuyos resultados dan contenido a este libro.

*Luis Manuel Aguayo Rendón*. Maestro en Educación y doctor en Educación con especialidad en Educación Matemática por la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), ha sido profesor de educación primaria, de educación media superior (Matemáticas), de la Unidad de Matemáticas (UAZ) y de educación normal. Actualmente es profesor de la Maestría en Educación Básica en la Unidad Zacatecas de la UPN y coordinador del Doctorado en Desarrollo Educativo en el Capítulo Noreste de la misma UPN. Contacto: l\_aguo@yahoo.com.mx

*Maricela Soto Quiñones*. Licenciada en Educación Primaria por la Benemérita Escuela Normal «Manuel Ávila Camacho» (BENMAC), maestra en Ciencias de la Educación por la Universidad Autónoma de Zacatecas y doctora en Desarrollo Educativo por la Universidad Pedagógica Nacional, ha sido profesora de educación primaria y normal. Actualmente es catedrática y coordinadora del Departamento de Investigación en la BENMAC. Contacto: soquima@gmail.com