UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIDAD UPN 321

GUADALUPE, ZAC.

Programa de Doctorado Regional en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
CAPÍTULO NORESTE

UNIDAD 321 ZACATECAS

"EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA Y ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES COMO MEDIDA. NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS PARA UNA REINVENCIÓN GUIADA"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR
EN DESARROLLO EDUCATIVO CON ÉNFASIS EN FORMACIÓN DE PROFESORES

PRESENTA

IVETTE ANEL DELGADO VALDEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN

GUADALUPE, ZAC. **SEPTIEMBRE DE 2022**

Doctorado Regional en Desarrollo Educativo

con Énfasis en Formación de Profesores

Estados que integran la Región:

Coahuila

Nuevo León

Tamaulipas

San Luis Potosí

Zacatecas

SEGE
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
DE GOBIERNO DEL ESTADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD UPN 241
SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

DICTAMEN DE TRABAJO DE TESIS

San Luis Potosí, S.L.P., 11 de agosto de 2022.

C. MTRA.
IVETTE ANEL DELGADO VALDEZ
P R E S E N T E. –

En mi calidad de Coordinador Regional del programa de Doctorado Capítulo Noreste, de la Universidad Pedagógica Nacional, y después de haber sido analizado el **Trabajo de Tesis** titulado: ***"Educación matemática realista y enseñanza de las fracciones como medida. Normas sociomatemáticas para una reinvención guiada"***, encuentro que reúne los requisitos a que obligan los reglamentos en vigor para ser presentado ante el H. Jurado del examen para la obtención de Grado, por lo que deberá entregar los 9 ejemplares y 4 Cd's requeridos como parte de su expediente institucional.

A T E N T A M E N T E

DRA. YOLANDA LÓPEZ CONTRERAS
Coordinadora Regional del Doctorado

Vo. Bo.

S.E.G.E.
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 241
SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

JOSÉ JAVIER MARTÍNEZ RAMOS
Director de la Unidad

Agradecimientos

Las pequeñas oportunidades son el principio de grandes cosas; por eso agradezco a la vida, destino, universo o Dios que me dio esta oportunidad y me agradezco a mí de haberla sabido tomar y aprovechar para concluir con éxito mi trayecto en este Doctorado. Sin el tiempo, dedicación y pasión que he puesto en esta tesis no podría decir “lo logré”.

A mis padres, hermanos y familia que en todo momento tuvieron una palabra de afecto, fé y amor para demostrarme su apoyo y confianza.

Al Dr. Luis Manuel Aguayo Rendón por en todo momento creer en mí y compartir su conocimiento conmigo; mucho de esto no sería posible sin él.

A mis amigos y compañeros de generación, gracias por demostrarme cariño, compartir su tiempo y brindarme siempre un nuevo saber.

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

De la problemática

La noción de fracción y su enseñanza, desde Freudenthal (1983) puede entenderse desde dos perspectivas. La primera hace referencia a la fracción como fracturador cuyas situaciones fundamentales son aquellas en las que "se presentan un todo que se ha dividido o se está dividiendo, cortado, rebanado, roto, coloreado en partes iguales o se experimenta, imagina, piensa como tales" (Freudenthal 1983, p. 140). La segunda forma de interpretarlas hace referencia a la fracción como comparador, en este caso "las fracciones también sirven para comparar objetos que están separados entre sí o son experimentados, imaginados, pensados como tales" (Freudenthal 1983, p. 145).

La fracción como fracturador a la que hace referencia Freudenthal es muy similar a la que describe Kieren (1981) cuando habla del significado parte-todo de la fracción,[1] en la enseñanza plantea que los primeros acercamientos del niño con la fracción deben darse en términos de los números racionales, es decir, en su opinión el niño debería conocer los diferentes significados de la fracción (medida, razón, cociente y operador), pero comenzando con el significado parte-todo.

Desde esta perspectiva se propone que el primer acercamiento de los alumnos con las fracciones sea mediante situaciones en las que un todo ha sido dividido en partes iguales de las cuales se "toma" una o varias de esas partes, las más frecuentes tienen que ver con un pastel o una pizza divididos en rebanadas iguales, esto es, el círculo es una figura geométrica privilegiada en estas situaciones y como es de suponerse, las cantidades continuas (superficie) también lo son.

A partir del conocimiento de las fracciones como parte de un todo, se espera que el alumno conozca los otros significados de la fracción y una vez que los estudie todos,

[1] Además del significado parte-todo, para Kieren la fracción también adquiere significados como el de operador, razón cociente y medida.

mediante un proceso que no se explica, los alumnos deberán integrar todos estos significados en un mismo macroconcepto de fracción. Este conocimiento, propio de los matemáticos para trabajar con los números racionales, resulta complicado para los alumnos y les genera múltiples dificultades de comprensión.

Freudenthal (1983) considera que la fracción como fracturador es algo convincente y de fascinante concreción, pero también como algo fenomenológicamente muy restringido, esto es, tiene pocos fenómenos o situaciones en los que se puede utilizar y aunque esta condición brinda una cierta sencillez para comprender el origen de la fracción, termina siendo una limitante para que pueda construir otras nociones ligadas a este objeto matemático.

Pongamos un ejemplo de tales limitantes. Cuando se pide a un niño que identifique la parte correspondiente a ¾ de una pizza le resulta sencillo dividir la pizza en cuatro partes iguales y tomar 3 de esas cuatro partes, con ello ha comprendido que la pizza es "el todo" que se ha equidividido y las partes que tomó son los ¾ del todo. Empero, en este contexto resultaría extraño explicar el significado de la expresión 5/4 de pizza, pues dividir el todo (una pizza) en 4 partes y tomar 5 resulta imposible, en este caso "el todo" pueden ser dos pizzas o más, con ello la unidad de referencia se pierde y la comprensión de lo qué es una fracción se desdibuja, por lo tanto se generan múltiples dificultades para que el alumno comprenda la fracción impropia, aunque haya tenido ciertas facilidades para comprender la fracción propia.

Al considerar las dificultades que generan las situaciones del tipo 5/4 de un todo, autores como Cortina, Visnovska y Zuñiga (2007, 2014, 2017, 2018), Tzur (1999, 2007), Thompson y Saldanha (2003) y Steff (2002) han realizado aportes para estructurar una propuesta de enseñanza de las fracciones que permita a los alumnos comprender a éstas como comparador, lo que eliminaría las dificultades para comprender las fracciones impropias, también implicaría dejar de lado la enseñanza enfocada en el significado "parte-todo" que actualmente se plantea en los programas de estudio para la escuela primaria mexicana. Al contrario de esto se pretende orientar la enseñanza hacia la idea de que la fracción es un número que permite comparar el tamaño de objetos que están separados entre sí.

Sobre este respecto Freudenthal (1983) reconoce que este enfoque fenomenológico (comparador) puede relacionarse con las ideas matemáticas de magnitud, es decir que la enseñanza de las fracciones podría estar vinculada a la comparación de medidas de longitud, también hace énfasis en que se pueden matematizar ideas en las que se cuantifique un objeto independiente de otro, por ejemplo el tamaño de la puerta es cinco veces el tamaño de la ventana, lo que quiere decir que la ventana es $1/5$ parte de la puerta (relación recíproca de tamaño relativo). Bajo estas ideas, la medida de un atributo cuantificado por una fracción puede ser iterado sin restricciones dando lugar a nociones como las fracciones impropias, que desde las ideas de fracturador, podrían resultar limitadas. En este sentido las fracciones se ven como un número capaz de cuantificar y que, por consiguiente, está separado de la unidad de referencia dando la oportunidad de ser iterado más allá de dicha unidad.

De la solución posible

Ahora bien, para enfrentar las dificultades que genera la enseñanza que parte del significado parte-todo, en el año de 2006-2008 un equipo de investigadores estructuró un experimento de diseño[2] basado en la perspectiva teórica de la Educación Matemática Realista ya que proporciona heurísticas de diseño para encontrar e interpretar el aprendizaje matemático. Cabe mencionar que las figuras más emblemáticas del equipo de diseño son los doctores Jana Visnovska de Australia y José Luis Cortina de México.

Este experimento de diseño tiene por objetivo apoyar una reorganización matemática en torno a las fracciones para que, con la guía del docente, los alumnos participen en una reinvención del objeto matemático. Para ello se echa mano de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en la que se incluyen formulaciones y conjeturas sobre los procesos de aprendizaje y los medios para apoyarlo (aspectos de la práctica en que maestros y estudiantes participan).

[2] De manera general podemos definir al experimento de diseño como una metodología de investigación de Educación Matemática que implica el desarrollo de diseños instruccionales para apoyar formas de aprendizaje (Cobb, 2003). En el cuerpo de la tesis se describe con más detalle.

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se integra con actividades instructivas, herramientas para representar ideas matemáticas, conversaciones colectivas y la organización de las actividades del aula (Cobb, 2003). Ahora bien, el diseño instruccional requiere aprovechar las investigaciones relacionadas con la problemática con el fin de establecer los objetivos y el desarrollo de la agenda de enseñanza, por ello el equipo de diseño encontró el apoyo en las ideas de Stephan (2003) Steff, (2002) Thompson y Saldanha (2003) y Tzur (2002) para definir la Teoría de la Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE).[3]

Es importante aclarar que este trabajo de investigación gira en torno a una TEDE diseñada especialmente para hacer que el proceso de enseñanza haga posibles las conjeturas que sobre el aprendizaje de los alumnos se plantearon. Pero además, debemos decir que la experimentación que aquí se analiza no es la primera que se realizó con esta TEDE, ha habido anteriormente experimentaciones que sirvieron para discutir sus resultados y proponer mejoras. Dichas experimentaciones y mejoras no han roto con el marco teórico metodológico que las sustenta puesto que un objetivo de los experimentos de diseño es que el equipo que participa en su diseño, experimentación y análisis la transforme hasta tal punto que puedan convertirse en una secuencia de instrucción confiable para los profesores, aunque no deban interpretarla como una receta sino como una guía que puede ser susceptible a cambios.

La reinvención de las fracciones tiene que ver entonces con la idea de transformar los esquemas del alumno, esto es que pase de reconocer la fracción como parte de un todo a reconocerlas como una relación multiplicativa con un todo de referencia, es decir que construya un esquema de fracción iterativa, lo que no significa borrar sus esquemas anteriores sino reorganizar las estructuras conceptuales conocidas para posibilitar una nueva conceptualización.

En un enfoque comparativo de la fracción, la reinvención de éstas como medidas de longitud debe iniciar incluso antes de abordar la relación recíproca del tamaño relativo, ya que a través de diversas investigaciones hechas por Cortina, Visnovska y Zuñiga (2008, 2014,

[3] Sucintamente puede decirse que una TEDE se trata de teorías formuladas con el propósito principal de apoyar a los docentes en su tarea de enseñanza de un tema matemático específico, con una progresión de objetivo de aprendizaje (Gravemeijer, 1994). En el capítulo III la describimos con mayor profundidad.

2017, 2018) se ha visto que es necesario reorganizar las ideas de medida, necesidad que generó la obligación de hacer modificaciones a la agenda diseñada (TEDE).

La secuencia de instrucción en la que estamos inmersos tiene como base una narrativa acerca de un pueblo imaginario llamado los Acajay (Ver Anexo 1 y Anexo 2) y comienza cuando los alumnos se involucran en el uso de medidas no convencionales (mano, cuarta, dedos, etc.), posteriormente reconocen la importancia de contar con una unidad de referencia, en este caso una vara de 24 cm llamada Tije, que ayudará a los alumnos a establecer ciertas medidas de forma convencional. Sin embargo, esta situación trae consigo una nueva problemática cuando la unidad no sea suficiente para "cubrir" completamente una longitud, en dicha situación será necesaria la creación de diversas subunidades que se puedan utilizar para cubrir la longitud de un objeto en su totalidad. Con el Tije y sus subunidades se trabajará la relación recíproca de tamaño relativo (fracciones unitarias) y serán concebidas como una separada de la otra, es decir la subunidad independiente del Tije (unidad), lo cual permitirá reconocer cuando una fracción unitaria es menor, mayor o igual a otra y, posterior a ello, razonar sobre cuando la fracción es menor, igual o mayor a la unidad de referencia. [4]

Por su parte, el docente ayuda a razonar sobre cada uno de los aspectos de la agenda e introducir a los alumnos en las narrativas de tal manera que los hace sentirse parte del pueblo Acajay y ayuda a razonar sobre la importancia de cada una de las herramientas empleadas a través de problemas genuinos haciendo matemáticas escolares y, a la vez, resolviendo problemas de la vida "real".

Sobre la perspectiva teórica

Como mencionamos líneas atrás, la TEDE, al igual que esta investigación se basan en las nociones fundamentales de la EMR.

La Educación Matemática Realista es una teoría que nace en 1968 como respuesta a una enseñanza de la matemática tradicionalista y las denominadas matemáticas modernas bajo las ideas de Hans Freudenthal en el Instituto de la Universidad de Utrecht, en los Países

[4] En el capítulo tres se describe más ampliamente el diseño de instrucción

Bajos (IOWO). Con la EMR Freudenthal (1968) plantea una teoría que apoya principalmente a los maestros en el diseño de recursos para la enseñanza, siendo una teoría empíricamente fundamentada.

En la EMR se considera a las matemáticas como una actividad humana por lo que en un salón de clase los alumnos matematizan fenómenos del mundo real, lo que les permite "reinventar" los conceptos matemáticos. Cuando hablamos de situaciones reales nos referimos a situaciones imaginables para los alumnos y no sólo aquello que puede ser tangible, estas ideas han de permitir al alumno crear objetos mentales que contribuirán a la construcción de un objeto matemático.

Freudenthal (1971) consideró la idea de matematización como el elemento clave en la educación matemática: en primer lugar porque la matematización es la actividad de los matemáticos, en segundo porque ayuda a ver las situaciones de la vida diaria desde un enfoque matemático y finalmente porque matematizar está directamente relacionada con la idea de reinventar conceptos desde las intuiciones informales que se irán desarrollando para lograr una matematización progresiva. "Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma" (Freudenthal, 1973, p.63).

Lo interesante de la propuesta en la EMR es que se considera que las simbolizaciones convencionales no deben tomarse como punto de partida (un acto anti-didáctico) porque la actividad de los matemáticos se realiza en el sentido opuesto, es decir el objetivo de la educación matemática es apoyar el aprendizaje de la disciplina dentro de un proceso de "reinvención guiada" que parte de la realidad hacia la formación de estructuras generales, abstractas y formales de las matemáticas.

Para apoyar las ideas centrales de la EMR se cuenta con una serie de herramientas conceptuales denominadas "Principios de la Educación Matemática Realista" y que orientan tanto a procesos de enseñanza como de aprendizaje (Freudenthal, 1983).

- Principio de actividad: la matemática es pensada como actividad humana.
- Principio de realidad: la matemática surge como matematización de la realidad (lo que la experiencia del sentido común toma real).

- Principio de reinvención guiada: la oportunidad guiada por el maestro de reinventar las matemáticas.
- Principio de niveles: matematización progresiva, pasando por distintos niveles de comprensión.
- Principio de interacción: aprendizaje de la matemática como una actividad social.
- Principio de interconexión: aplicación de un alto rango de comprensión y herramientas matemáticas.

Las nociones de la EMR en conjunto con la perspectiva metodológica de los experimentos de diseño son las bases conceptuales sobre las cuales se orientó la presente investigación, de hecho lo que aquí presentamos es un análisis retrospectivo (a la manera del experimento de diseño). La pregunta central que guió esta investigación está enfocada en la actuación del docente, se trata de analizar cómo desarrolla su intervención en el aula desde una perspectiva teórica como la EMR, la cual definimos así:

Pregunta principal:

- ¿Cuáles son las normas matemáticas que el profesor instaura en el aula para cumplir los objetivos planteados para el experimento de enseñanza y la TEDE relativos a las fracciones?

Preguntas secundarias:

- ¿Cuáles son las normas generales que apoyan el desarrollo de las clases de matemáticas en relación con la TEDE?
- ¿Qué papel juegan los principios de la EMR en el desarrollo de la secuencia de instrucción empleada?
- ¿Cuál es la pertinencia de enseñar las fracciones a partir de reconocer la iteración de la medición de longitudes como un primer acercamiento al objeto matemático?

De las cuestiones anteriores se desprende el objetivo general siguiente:

- Describir las normas matemáticas empleadas en el experimento de diseño que permiten alcanzar los ideales en cada una de las prácticas matemáticas desarrolladas en la TEDE y apoyar la enseñanza de las fracciones.

Objetivos específicos:

- Identificar las normas generales necesarias para el desarrollo de una clase de matemáticas y la manera como apoyan a las normas matemáticas.
- Describir la relación entre los principios de la EMR, las normas matemáticas y las normas generales que potencian el desarrollo de la TEDE.
- Definir los alcances de la enseñanza de las fracciones a partir de la iteración de una medida de longitud como una forma de introducir a los alumnos en el aprendizaje de este objeto matemático.

Para cumplir los objetivos, como ya se mencionó, nos basamos en la perspectiva de la Educación Matemática Realista cuya característica principal es constituirse como teoría para el diseño e instrucción de recursos para la enseñanza de las matemáticas. En esta perspectiva se piensa al aprendizaje como resultado de la actividad de los alumnos a través de la matematización de fenómenos reales para avanzar a conocimientos cada vez más formales.

Sobre el proceso metodológico

Para la elaboración de esta tesis se analizó el desarrollo de un experimento de diseño que se realizó con base en una TEDE. La puesta a prueba del experimento se llevó a cabo en un quinto grado de una una escuela de turno matutino en la Cd. de México, el grupo tenía una matrícula de 31 alumnos (16 mujeres y 15 hombres). En total fueron 26 clases que se trabajaron entre el nueve de septiembre y el 16 de diciembre de 2019, cada sesión tuvo una duración de entre 60 y 90 minutos en las cuales se desarrolló la agenda (TEDE). Cabe mencionar que entre una y otra sesión se hicieron ajustes y adecuaciones a la TEDE. En esta investigación, nos centramos en las primeras 15 clases videograbadas en éstas se desarrollaron las primeras cuatro prácticas que dan cuenta de la introducción de las fracciones (propias e impropias) como un tamaño relativo que permiten su comparación; para ello se trabajó en el aula una secuencia que comienza con la medida con una unidad de referencia, posteriormente se crean subunidades que permiten complementar la longitud (fracciones unitarias) y después se pasa a la comparación de dichas subunidades.

Como lo hemos mencionado, los experimentos de diseño y el desarrollo instruccional se llevan a cabo de manera colaborativa por un equipo de investigación, en este experimento, el diseño y la ejecución de la agenda corrió a cuenta del Dr. José Luis Cortina quien fue apoyado por las doctoras Claudia Zúñiga y Jana Visnovska, quienes son los responsables de la creación y perfeccionamiento de la agenda de trabajo, también ellos realizaron el análisis iterativo, es decir la reflexión que permitió realizar los ajustes necesarios a la agenda. Como parte del equipo participamos dos estudiantes del Doctorado en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores de la Universidad Pedagógica Nacional de México (Unidad Zacatecas) quienes, como parte de nuestra investigación, apoyamos el experimento de enseñanza en relación a las fracciones como comparador, en colaboración de nuestro asesor Dr. Luis Manuel Aguayo.

La Mtra. Christine Luna y yo (estudiantes del Doctorado) nos enfocamos en la parte del análisis retrospectivo que tiene lugar después de la aplicación de la agenda, análisis que permite reconocer los alcances y limitaciones de la misma, es importante aclarar que cada una de nosotras nos enfocamos en aspectos importantes de la TEDE, en el caso de esta investigación centramos nuestros esfuerzos en los medios didácticos que el maestro utiliza para lograr los objetivos de la TEDE así como las normas matemáticas que son necesarias en dicho proceso de instrucción y que además se interrelacionan con los principios de la EMR.

El análisis que se realizó fue encaminado hacia el reconocimiento del papel del maestro como parte fundamental del proceso de enseñanza, no sólo de las fracciones sino de cualquier objeto matemático ya que, si bien la agenda cubre una parte esencial del experimento de diseño, la acción del docente cubre otra parte primordial, Tzur (2002) ve al maestro como una pieza clave para que los esquemas fraccionarios iterativos se reorganicen, pues es él quien transforma las operaciones conocidas en una experiencia retadora y guía la reflexión sobre esa experiencia, lo cual ayudará a cambiar el enfoque a través de dichas reflexiones. Se trata entonces del análisis de las normas matemáticas en el aula que enmarcan el actuar docente.

El análisis y categorización que hacemos de las interacciones entre alumno y docente toman en cuenta tres elementos clave: los medios didácticos (normas generales) entre los que podemos destacar las "conversaciones colectivas"; el desarrollo de las normas generales en cada una de las prácticas y; las normas matemáticas mediante las cuales se busca lograr los objetivos planteados en cada una de ellas y que han de permitir a los alumnos reorganizar sus esquemas en torno a las ideas fraccionarias que han adquirido. Finalmente, también son importantes los aspectos de las normas generales y matemáticas que se vínculan directamente con los principios de la educación matemática, desde el de realidad (vista como algo imaginable) hasta la misma reinvención guiada y matematización progresiva (niveles).

Sobre la estructura del documento

Del análisis de las prácticas desarrolladas en el aula surge el contenido de este documento, que ha sido sistematizado con la siguiente estructura.

En el primer capítulo se intenta dar cuenta y reconocer los problemas con el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones que hasta el día de hoy se identifican en las aulas, en ese sentido es un capítulo donde se plasma la problematización. En él, a través de la revisión de la literatura en investigación, se aborda aquello que identificamos como problemas actuales que obstaculizan la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, problemas que podemos leerlos desde tres perspectivas. La primera hace alusión a las situaciones de los alumnos, abarcan desde aspectos como sus conocimientos previos sobre números naturales que obstaculizan la adquisición de nuevas reglas para los números fraccionarios (entendidas como obstáculos epistemológicos), hasta los que van construyendo y los orilla a conceptualizar aspectos del objeto matemático de forma errónea como ideas de congruencia y operaciones con números fraccionarios. La segunda tiene que ver con el currículum y la enseñanza, trata de evidenciar las limitaciones de la enseñanza que comienza con el significado parte-todo y que busca la concreción con el resto de los significados (plasmado dentro de los programas y los libros de texto), asimismo identificamos algunas limitaciones de los docentes que dificultan su actuar en las aulas. Finalmente en la tercera analizamos la idea de número racional como un megaconcepto que se intenta abordar en las clases a pesar de que es un conocimiento propio de los matemáticos y que de forma forzada se intenta introducir en la educación primaria.

En el segundo capítulo retomamos las ideas de la Educación Matemática Realista que forman parte de nuestro marco teórico para reconocer que el experimento de diseño (como metodología) y el experimento de enseñanza guían el desarrollo de la misma agenda, asimismo se recuperan aspectos como el análisis fenomenológico y la fenomenología didáctica que orientan las ideas de instrucción, también reconocemos las normas matemáticas como quehaceres propios de un aula de matemáticas, dichas normas, manifestados en los principios de la EMR, guían la estructuración de la agenda y el hacer docente, tales como el principio de realidad, interacción, reinvención guiada y niveles, todos importantes para llevar la TEDE al cumplimento de sus objetivos.

En el tercer capítulo retomamos algunas ideas de la EMR y presentamos de manera puntual en qué consiste nuestra Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico, cómo está dividida y qué objetivos tendría cada una de las prácticas matemáticas que en ella se desarrollan, permitiendo al lector reconocer las fases por las que atraviesa que intentan que los alumnos reconozcan a las fracciones como números capaces de cuantificar, pero que sobre todo reconozcan que las fracciones son una magnitud independiente de la unidad de referencia. Además en este capítulo se da un contexto general de la aplicación y los antecedentes de los conocimientos de los alumnos al momento de ser aplicada. Posteriormente, en los capítulos del cuatro al ocho presentamos el análisis retrospectivo de las primeras cuatro prácticas de la TEDE.

En el cuarto capítulo se analizan las normas generales que son necesarias para el desarrollo de la TEDE y que además son parte fundamental de las normas matemáticas. Se habla de normas generales porque no son exclusivas de una clase de matemáticas sino que se hacen presentes en cualquier clase como un contrato entre los involucrados y ayudan al docente para desarrollar los objetivos de enseñanza. En términos de la la EMR, las normas generales son los medios didácticos que el docente puede emplear para trabajar el principio de interactividad[5], en el cual sobresale la importancia de las "conversaciones colectivas" que requieren ciertas formas de participación, por ejemplo una escucha atenta, un ambiente de respeto y el derecho a expresar incomprensión, los cuales han de permitir a los alumnos desenvolverse en un ambiente favorable para el desarrollo de conocimientos en torno a la fracción y a los mismos valores de la clase de matemáticas.

En los siguientes capítulos se analiza lo que sucedió con el trabajo de la agenda, fundamentalmente es una mirada a los haceres del profesor y a las normas matemáticas que se desarrollan para alcanzar los objetivos en cada una de las prácticas y reconociendo, a partir de estos, los principales resultados que nos permiten mostrar una nueva forma de introducir a los alumnos al mundo de las fracciones desde una perspectiva que hace énfasis en la medida de longitudes.

En el capítulo cinco se reconoce la norma matemática que gira en torno a que el profesor guíe a los alumnos a que "reconstruyan" las ideas de medida, es por ello que analizamos los medios didácticos que en la primera práctica usa el profesor para hacer que los alumnos reconozcan la necesidad de una unidad convencional de medida (vara) para las problemáticas que anteriormente se resolvían con medidas arbitrarias, esto permite al docente ayudar al alumno a identificar una unidad de referencia y generar una nueva problemática, los espacios que no se pueden cubrir con la totalidad de la vara, además esta práctica ha de ayudar a establecer criterios de medición que permitirán ejecutar de forma idónea la iteración.

En el capítulo seis se analiza la segunda práctica matemática en la que la norma matemática gira en torno a que los alumnos reinventen, con ayuda del profesor, subunidades que ayuden a cubrir cada uno de los huecos de las medidas de longitud, así las fracciones se reconocen a partir de su tamaño relativo en relación a la unidad de referencia lo cual permitirá que las comprendan como independientes una de la otra y que, aunque se relacionan para determinar su tamaño (cuántas veces debe ser iterada la subunidad para completar la vara),

[5] El principio de interactividad se refiere a que el aprendizaje matemático no es sólo una actividad individual sino también una social.

la subunidad no está contenida en ella. En este capítulo el docente guía a los alumnos para descubrir las fracciones unitarias y reconocer cuál es menor o mayor que otra.

En el séptimo capítulo se aborda la tercera práctica donde las acciones del docente están encaminadas a lograr que los alumnos adquieran una norma matemática que gira en torno a comparar fracciones en relación a la unidad de referencia y establecer cuáles son menores, mayores o iguales que ésta, todo a partir de razonamientos (que son base de un discurso basado en la iteración) del tamaño relativo. Es en este capítulo donde el docente pretende que los alumnos reconozcan que las fracciones pueden ser iteradas más allá de la unidad, con ello reinventan y comprenden las fracciones impropias.

En el capítulo ocho se aborda la cuarta práctica en la que se pretende que los alumnos identifiquen fracciones que son mayores, menores o iguales a una medida dada a partir de la iteraciones de la unidad de referencia, pues se pretende reconocer por ejemplo que $5/2$ es mayor a dos unidades pero menor a tres. Para ello se echa mano de una nueva herramienta definida como "recta de medición" la cual hace referencia a la recta numérica; se analiza cómo los quehaceres del docente han permitido que los alumnos desarrollen razonamientos que les permiten reconocer las fracciones impropias más allá de la unidad de referencia.

Luego, al final se presentan una serie de conclusiones acerca del estudio siguiendo la lógica de nuestra perspectiva, específicamente considerando que es un análisis retrospectivo de la puesta a prueba de la TEDE, valoramos las normas que se institucionalizaron sin dificultad, aquellas que deberán tener un tratamiento distinto para ser instauradas en la clase y también discutimos los diferentes roles que el profesor jugó durante el desarrollo de las prácticas.

I
LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES. UNA PROBLEMATIZACIÓN

Desde hace tiempo, las fracciones son una dificultad para quien las enseña y para quien las aprende, es decir representan un problema en su enseñanza y aprendizaje, y a pesar de que en el escenario internacional se han realizado múltiples estudios sobre este tema, los resultados obtenidos no han sido los esperados por lo que sigue siendo un problema latente. Por su escasa comprensión, las fracciones y su proceso de enseñanza son considerados como un proceso con múltiples dificultades, en pocas palabras la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones puede verse como un proceso lleno de fracasos, pues existe insatisfacción respecto a los niveles de comprensión (Cortina, et al., 2013).

La enseñanza de la aritmética por lo general se centra en las características y propiedades de los números naturales y las cantidades discretas, dejando de lado los números fraccionarios, esta acción tiene como consecuencia que más adelante los alumnos confundan las propiedades de unos y otros números, por ejemplo, es común que al multiplicar fracciones piensen que el producto debe ser un número más grande, como lo es al multiplicar con los números naturales. Anudado a esto, encontramos que las fracciones no sólo son un número con ciertas propiedades, sino que es un megaconcepto que requiere ser visto desde diferentes perspectivas.

En diversos estudios (Ávila, 2006; Cortina, 2013; Llinares, 2014; Thompson y Saldanha, 2003 y Valdemoros, 2010), se ha encontrado que los alumnos no logran una construcción óptima del concepto fracción, esto trae como consecuencia que los alumnos no las representen ni operen con ellas. Esto es un tema preocupante para los docentes porque tiene efectos colaterales a lo largo de la educación, por ejemplo, cuando un alumno no domina ni construye las concepciones básicas de fracción en la escuela primaria obstaculiza la posibilidad de construir conocimientos de carácter algebraico, por un lado, y los conocimientos de la proporcionalidad (tamaño relativo), por el otro, los cuales son vinculados con las fracciones (Pruzzo, 2012).

Actualmente en el Programa de Estudios en México (SEP 2009-2011) el número fraccional se trabaja con el modelo Kieren que hace alusión a la fracción como número racional y no como una fracción aritmética. Este modelo plantea diversos significados de la fracción (parte-todo, cociente, medida, razón y operador), los cuales nos señalan que hay un mismo ente matemático (fracción) que se utiliza para diversas situaciones y conceptos (Pruzzo, 2012). Para algunos autores (Cortina, 2013; Pruzzo, 2012) esa multiplicidad de casos es lo que complejiza la construcción y consolidación del concepto creando dificultades en su enseñanza y aprendizaje, pues se pretende introducir este concepto centrándose en el desarrollo de las matemáticas teóricas construidas algebraicamente, para alcanzar este conocimiento el alumno debería aprender todos los significados de la fracción y su aplicación. Un modo diferente consistiría en tomar a la fracción como un número genuino con propiedades implícitas, es decir, como número concreto, con significado cuantitativo.

Las dificultades que comienzan alejadas del profesor, como el cumplimiento del currículum y las nociones previas de “número”, representan un problema para el docente. ¿Cómo enseñar las fracciones y complementar con todos las propiedades que emanan de ella si no se cuenta con un conocimiento didáctico mínimo o si no tiene dominio del contenido que pretende transmitir? Estas cuestiones hacen preguntarnos si la “equipartición” y el cómo de la equipartición son el camino correcto (Cortina et al., 2013), pues no son sólo los alumnos de primaria quienes no logran reconocer los diferentes usos de fracción en diversos contextos, sino también aquellos que se preparan para ser docentes.

Por las razones anteriores, el objetivo del presente capítulo es analizar las investigaciones que dan cuenta de las dificultades tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las fracciones, de esta manera, pretendemos caracterizar el problema del cual se desprende nuestra investigación. Para lograr este objetivo hemos dividido el capítulo en tres apartados. En el primero daremos cuenta de cómo los conocimientos sobre los números naturales adquiridos interfieren con la construcción de conocimientos relacionados con fracción. En el segundo apartado analizamos las dificultades inherentes al currículum y cómo éstas interfieren en la enseñanza de las fracciones. Finalmente, en el tercer apartado describiremos las dificultades que presentan los docentes en la enseñanza de este contenido.

1.1. LOS NÚMEROS NATURALES, UN OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO PARA COMPRENDER LAS FRACCIONES

Para desarrollar este primer apartado utilizamos la noción de obstáculo, concepto empleado por Brousseau (1998) en la Didáctica de las Matemáticas. Este autor menciona tres tipos de obstáculos que se pueden presentar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; el primero hace referencia a un obstáculo cognitivo que se reconoce como de carácter ontogénico, o sea que se refiere a ciertas limitaciones que los alumnos tienen y que les dificultan la adquisición de conocimientos más complejos. El segundo es el obstáculo didáctico, se refiere al profesor y se relaciona con los"recursos y métodos didácticos" utilizados dentro del salón de clase. Según sean estos recursos y métodos, el profesor puede provocar ciertas dificultades para los niños. El tercero es el obstáculo epistemológico que hace referencia a la manera como la comprensión de cierto concepto matemático influye en la comprensión de otro más complejo.

A pesar de que en este capítulo los apartados sobre la problemática de enseñanza-aprendizaje de fracciones no está basada totalmente en estos obstáculos, tomamos este último, el obstáculo epistemológico, para categorizar una de las dificultades que hemos reconocido en torno al tema de fracciones. El obstáculo epistemológico consiste en un conocimiento que en un ámbito resulta verdadero y útil, sin embargo en otros contextos resulta falso y/o inútil, es decir las nociones creadas en el campo de los números naturales obstruyen la adquisición de las nociones necesarias en los números fraccionarios, y en muchas ocasiones hasta las obstaculizan.

Un poco ya en contexto en primera instancia identificamos una de las primeras dificultades en el desarrollo del concepto de fracción cuando los alumnos han venido desarrollando la noción de número natural que ha de servir de apoyo y obstáculo para el aprendizaje de la fracción y sus propiedades (Bonotto, 1992 como se citó en Figueras, 2009), ya que han ido concretando reglas y regularidades al operar con los naturales, un conocimiento cierto y aplicable en un ámbito discreto y de situaciones aditivas, no obstante al cambiar al ámbito de los números fraccionarios aparece un obstáculo de carácter epistemológico porque las reglas adquiridas en el contexto de los números naturales no siempre son aplicables en el nuevo contexto:

> El paso de un ámbito a otro no venía marcado por un cambio de significado sino por la consideración de nuevos objetos matemáticos con propiedades distintas a las que cumplían los objetos matemáticos a los que uno ya estaba acostumbrado (Zaragoza, s/f).

A pesar de que el reto para la enseñanza es encontrar la forma en que puedan ser introducidas las fracciones como continuación de los números naturales, capaces de cuantificar magnitudes discretas y continuas, parece ser que nos alejamos de ello y las consideramos como contenidos aislados y separados. Este alejamiento tiene como consecuencia confusiones en los alumnos entre las propiedades de uno y otros números.

La dificultad que tiene el alumno para operar con los números fraccionarios comienza cuando se enfrenta a una cantidad menor que uno o cuando hay uno o varios números entre 0 y 1, 1 y 2, 2 y 3… (Llinares y Sánchez, 1997), esto en contraparte a lo que anteriormente había interiorizado, que el número uno es la "cantidad más pequeña o menor". Aunado a esto, otro de los principales cambios de significado es aquel que nos dice que dentro de los número naturales

> el siguiente número es siempre una unidad mayor que él, es decir el número siguiente de 27 es una unidad más, o sea 28, y en ese momento suele pensar que entre esos dos números no hay otro número más; sin embargo, en los números fraccionarios esto no se mantiene así porque el término "siguiente" no tiene sentido, no podemos considerar que el número siguiente de ¼ es 1/5, a pesar de que estén muy cercanos entre ellos, puesto que existen una infinidad de posibilidades de "números siguientes" (Zaragoza, s/f).

Es decir que "entre dos números racionales, por más cercanos que estén, hay otros infinitos racionales" (Fandiño, 2009, p. 31). Este obstáculo genera una contradicción en el alumno porque la propiedad de densidad no aparece en los naturales por ello la idea de que entre 5 y 6 no hay otro número viene a ser quebrantada al involucrarse con las fracciones.

Otro obstáculo epistemológico que encontramos es aquel que indica "mayor o menor que". A lo largo de la enseñanza de los números naturales se ha desarrollado la idea de que un número es más grande que otro cuando presenta más cifras o cantidades mayores, por ejemplo 25 es mayor que 9 simplemente porque el primero tiene dos cifras, y al hablar de colecciones representa más objetos. Este problema es muy difícil de superar cuando se tiene contacto con la fracción, Pruzzo (2012) en su estudio realizado con alumnos de primero de secundaria mostró que superar la noción "mayor que" dentro de los fraccionarios es una tarea difícil. La autora realizó una prueba a 433 alumnos de nivel secundaria donde intenta reconocer si han construido los aprendizajes sobre números fraccionarios en cuarto año de primaria, dentro de su análisis mencionó que existen lagunas de aprendizaje y errores conceptuales al comparar fracciones y números naturales a través de distintos procedimientos.[1]

Este tipo de obstáculo genera dificultades al comparar fracciones porque la noción "mayor que" no se relaciona directamente con el "número más grande", por ejemplo, 1/8 no es mayor que 1/5 por el simple hecho de ser el ocho un número mayor. En el contexto de las fracciones "mayor o menor que" es una relación que depende de la construcción operativa en la que interviene el denominador y el numerador, significa reconocer que 1/8 es menor que 1/5 porque la primera fracción requiere mayor número de iteraciones para completar la unidad, es decir, que es una magnitud más pequeña.

Otro obstáculo epistemológico significativo está relacionado con la ejecución de técnicas y el significado que representan en el cambio de un contexto a otro, es el caso de los algoritmos de suma y resta. Cuando el alumno tiene buen dominio de estos algoritmos en el campo de los naturales tiende a traslapar los conocimientos construidos al operar con los números naturales hacia el campo de las fracciones. Por ejemplo, cuando realizan sumas o restas con fracciones suman directamente numeradores y denominadores como si fueran entes separados y no como un mismo número. Cuando se les plantea sumar 1/2 + ¼ los alumnos recurren a la idea de sumas 1+1 (numeradores) y 2+4 denominadores para obtener como resultado 2/6. Llinares (1997) consideró el origen de este error en la similitud de notaciones que existen entre ambos números, el alumno visualiza la fracción como dos cantidades independientes una de otra y no como aquellas que forman un número, orillando a emplear los procedimientos aditivos ya aprendidos en el trabajo con los naturales.

Sobre este respecto Pruzzo (2012) menciona que "cuando el alumno no ha asimilado el concepto de número fraccionario emplea los esquemas asimilados anteriormente (números naturales)" (p.7); es por ello que el cambio de un ámbito a otro trae consigo el uso inadecuado

[1] Consigna del problema planteado: "Protocolo 9 (C8) Compara las dos fracciones y coloca igual, mayor o menor. Representar gráficamente (1/2 – 2/3).

de propiedades, todo lo aprendido anteriormente es algo que el alumno ha interiorizado como verdadero y en este nuevo mundo de las fracciones es difícil reconocerlo como equívoco, con esto se impide operar con ellas de manera efectiva y reconocer sus propiedades como números.

Otro caso en esta categoría es el que aparece cuando se trabaja con la multiplicación. En el trabajo con los números naturales construimos la idea de que el resultado de una multiplicación siempre será más grande que cualquiera de los factores y que una multiplicación puede verse como una suma iterada, entendiendo que para multiplicar dos cantidades es necesario sumar uno de ellas consigo misma tantas veces como indica la otra, y que al aplicar esto en los números fraccionarios crea un obstáculo epistemológico, porque el alumno intenta aplicar la misma regla y no "comprende" cómo sumar $1/3$ de veces $1/5$ en la idea de multiplicar $1/3\,x\,1/5$, simplemente porque no tiene sentido que $1/3$ exprese una cantidad de veces (Ruiz Higueras, 2003 citado por Zaragoza, s/f).[2]

El significado de la multiplicación cambia al cambiar la naturaleza de los números con los que se trabaja, porque la regla desarrollada sólo tiene sentido en los números naturales y pierde su significado en los fraccionarios, por esta razón es difícil que el niño entienda que el producto de dos fracciones puede ser menor que cualquiera de ellas, de forma contraria a como sucede en los números naturales, es decir, la concepción de $1/3$ de $1/5$, que tiene como resultado $1/15$, no es asimilada como multiplicación, pues se considera que debería aumentar como sucede en los número naturales,

Junto con la problemática de multiplicación de fracciones viene el de la división de fracciones. Regularmente los alumnos presentan dificultades en el trabajo con la división de fracciones que se generan por sus conocimientos sobre los números naturales y las técnicas adquiridas en torno a ellos. Ahora, entre las cuatro operaciones básicas con fracciones, la división puede considerarse como la que más dificultades tiene para los alumnos, ya que no suele darse de manera natural e intuitiva como en los números naturales (Sanz, Figueras y Gómez, 2018). Generalmente, para resolver estas dificultades los alumnos conciben al numerador y denominador como entes separados sin reparar en la incongruencia de los resultados obtenidos, por ejemplo para dividir $1/5$ entre $1/2$ divide 1 entre 1 (igual a 1) y 5 entre

---

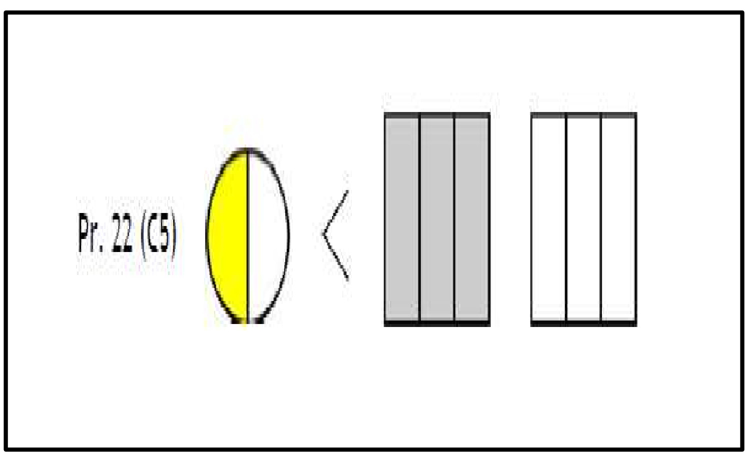
[2] Aunque cuando se multiplica 5 x ½ si es posible comprenderla como "cinco veces ½", pero si invertimos los factores dicho significado no es posible porque ½ x 5 significaría "un medio de 5 enteros".

2 (igual a 2.5), lo que lo llevaría a redondear o incluso a considerar el decimal dentro de la fracción. Todo esto puede llevar a “resultados absurdos” tales como fracciones con cero en el denominador (Llinares, 1997).

Un obstáculo más en los primeros acercamientos con los números fraccionarios está relacionado con su representación numérica (tal y como es enseñado regularmente), por ejemplo 2/5 no se ve como un solo número sino como dos números naturales separadas por un guión, 2 y 5 independientes uno del otro, es decir “las fracciones se consideran como un par de números naturales que no están relacionados entre sí” (Llinares y Sánchez, 1997, p. 157). De este modo en su representación como parte-todo encontramos que los alumnos son capaces de representar tantos enteros como el número de su numerador lo indique; de esta manera la representación de 2/5 quedaría representada con dos enteros dividida en 5. Pruzzo (2012) realizó una prueba en la que pedía a los alumnos representar dos números fraccionarios (1/2 y 2/3) para determinar cuál es mayor. Como se puede observar en la Figura 1, el alumno define 2/3 como números separados, el dos representa el número de unidades y el tres la noción de las partes en las que está dividida cada uno de ellas, esta representación nos remite a la identificación de la fracción como dos números naturales que se relacionan y el único vínculo entre ellos es el que los lleva a una noción de parte-todo.

Figura 1.

La fracción parte-todo

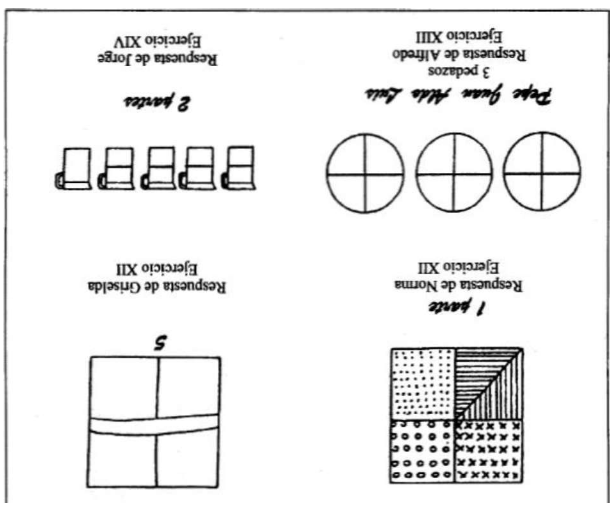


Nota. Representación de alumno respecto a comparación de fracciones. Tomado de Pruzzo (2012).

Valdemoros (2004) por su parte, al analizar los resultados de un cuestionario exploratorio relativo al significado de fracción como cociente[3] que aplicó a alumnos de cuarto grado de educación primaria, encontró un obstáculo que nace didáctico y luego se mezcla con un obstáculo epistemológico. En su estudio Valdemoros observa el impacto que tiene el número natural en los resultados cuando se considera que “las situaciones de reparto constituyeron previamente uno de los recursos didácticos susceptibles de respaldar la enseñanza de los números naturales” (Valdemoros, 2004, p. 242), lo cual tiene como consecuencia que comprendan el problema, pero que no puedan expresar los resultados en números fraccionarios y que recurren al empleo de los números naturales (ver Figura 2).

Figura 2.

Uso de número natural en fracciones



Nota. Tomado de Valdemoros, 2004.

La respuesta de la figura 2 nos muestra el reconocimiento semántico del problema, puesto que el alumno realizó la actividad conforme al reparto solicitado, sin embargo, en las respuestas se alude al lenguaje de los números naturales al señalar que le tocaría “1 parte” o “3 pedazos”. El uso del número natural y sus significados es algo difícil de “desaprender” a la hora

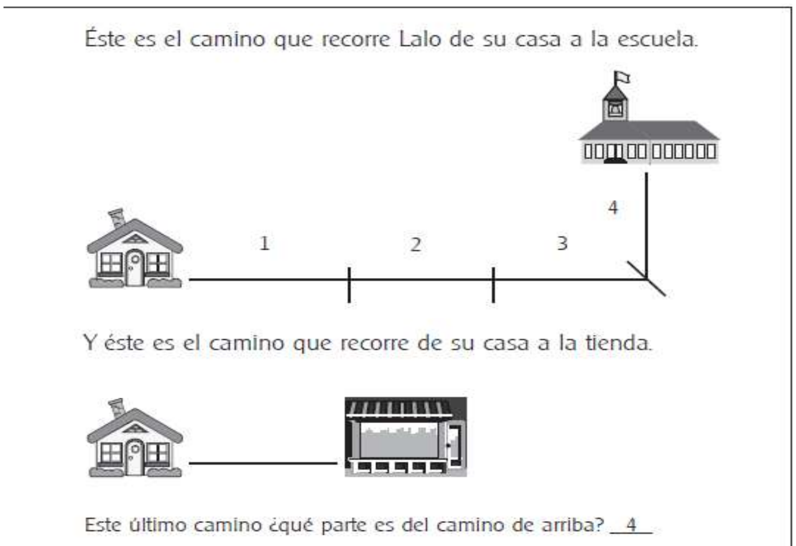
[3] Actividad basada en Kieren (1984) quien señala que el significado de cociente está ligado a situaciones de reparto equitativo en cierto número de objetos, entre un número determinado de personas (Valdemoros, 2004, p.238)

de adquirir nuevos conocimientos y por lo tanto es utilizado como indicador de cantidad en esta situación.

En otro estudio realizado por Perera y Valdemoros (2009) encontraron un problema similar al anterior, ellas muestran el resultado de una alumna en una actividad correspondiente al significado de medida (¿Qué parte es del camino de arriba?), en la que se observa un procedimiento correcto, pero una respuesta incorrecta:

Figura 3.

La fracción como medida



Nota. Tomado de Perea y Valdemoros (2009)

Como se puede observar en la figura 3 hay dos escenarios, en el primero vemos una representación correcta de la división que significa las veces que "cabe" (4) el camino de abajo en el de arriba, lo que demuestra una comprensión del problema, sin embargo el otro escenario muestra una respuesta alejada del número fraccionario (como medida) con el cual se espera encontrar la solución y en lugar de eso se recurre al uso del número natural (cuatro) para ejemplificar las veces en que fue divido el camino de arriba.

El contacto de los alumnos con los números fraccionarios es difícil desde el momento en que las reglas y significados creados dentro del objeto matemático "número natural" tratan de cambiar sus percepciones básicas y además, lo hacen de manera radical. El hecho de reconocer, por ejemplo, que “mayor que” no significa lo mismo que en los conocimientos anteriores, lo lleva a confundir sus concepciones; esta pluralidad de significados en contextos diferentes es capaz de crear obstáculos epistemológicos que hacen aún más difícil la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

1.1.1 Las Fracciones en el Curriculum

La enseñanza de las fracciones en el currículum puede ser categorizada como una problemática en el proceso didáctico, es bien sabido que los docentes marcamos nuestro ritmo en clase bajo la supervisión y guía de un Programa de Estudios. Actualmente en México, en lo que concierne al tema de las fracciones, encontramos un modelo que propone el desarrollo de este objeto matemático (fracción) en diferentes direcciones, atendiendo a diversos significados (parte-todo, cociente, medida, razón y operador), lo que resulta poco útil para organizar la enseñanza del concepto ya que esta categorización corresponde al número racional en su generalidad y no a la concepción fraccional específicamente.

Enseñar fracciones orientados por esta trayectoria significa un gran número de cosas, es decir que estamos relacionándonos con un “megaconcepto” cuyo origen se encuentra en el período de las matemáticas modernas y que involucra muchos hilos entrelazados. Este modelo surge luego del fracaso de modelos anteriores basados en el cómo de las fracciones más que en el qué son; la idea radica en familiarizar a los alumnos con situaciones que involucren todas las ramificaciones (significados) del concepto y esperar que estos, mágicamente, lo integren en uno sólo (Kieren, 1993).

Los componentes desarrollados bajo este megaconcepto implica concebir diversas situaciones, significados e interpretaciones para un mismo ente matemático, las fracciones, (Pruzzo, 2012). El propósito del modelo Kieren radica en enfrentar de la manera más amplia posible a los alumnos con las interpretaciones y significados mencionados y esperar que sean ellos mismos quien encuentren coherencia y lo conviertan en un sólo concepto.

La comprensión de la fracción es un problema desde el momento en que tiene poca interacción y uso en la vida diaria, después las dificultades crecen cuando se presenta a la fracción como una mezcla de concepciones dentro de un mismo concepto, tenemos entonces “una dispersión de casos, que complejiza la construcción del concepto, sin aportes a su consolidación" (Pruzzo, 2012), por lo que el significado de la palabra fracción, en todas sus interpretaciones se torna complejo.

En el sentido de las ideas anteriores Thompson y Saldanha (2003) analizaron las repercusiones que existen al incorporar múltiples significados y representaciones en una gran idea (fracciones) que aún no ha sido desarrollada por los alumnos. Los significados diferentes de las fracciones pueden encaminar al alumno a concebirlas como cosas alejadas unas de otras y "se corre el riesgo de que los educandos conciban los racionales como números utilizados en contextos y situaciones múltiples e independiente sin que desarrollen una comprensión integral del concepto" (Cortina et al., 2013, p.17); es decir, una de las dificultades más significativas en la enseñanza de las fracciones consiste en tomar a los números racionales y su categorización como eje rector. No queremos decir que la fracción deba ser entendida con una sola definición (aunque haría la labor de enseñanza más sencilla), sino que hacemos referencia a la manera en que se introduce a los alumnos y cómo se busca que se comprenda, aún cuando vemos la simultaneidad de significados propuesta por el curriculum, siempre ha tenido un éxito limitado.

1.1.2 Enseñar Fracciones desde la Noción de "Parte Todo". Una Solución Problemática

En la didáctica de las matemáticas, considerar la complejidad de las fracciones no es un tema reciente, ni un problema resuelto, una muestra de ello es que autores como Wilson y Darymple (1937, citados en Llinares y Sánchez, 1997) realizaron una investigación del uso social y comercial de las fracciones y sus resultados apuntaban hacía la propuesta de reducir los contenidos sobre las fracciones en los currícula, ya que consideraban que este tema se estudiaba meramente como un asunto de "cultura general".

Mientras autores como Wilson y Dalrympe (1937) o Groff (1994) debatían la pertinencia o no de las fracciones dentro del currículum de los primeros grados de enseñanza, otros como Llinares y Sánchez se preocuparon por encontrar la forma de vincularlas con la vida cotidiana, por ejemplo sostenían que era difícil comprender la expresión "3/5 de mujeres trabajadoras de hogar" porque era preciso simplificar la expresión a la forma "3 de cada 5 mujeres se dedican a quehaceres del hogar". Su conclusión era que "una mejor enseñanza del concepto de fracción haría aumentar inmediatamente su utilización dentro de la vida cotidiana" (Llinares y Sánchez, 1997, p. 25). Reflexionar entonces sobre la enseñanza de las fracciones implicaría pensar más allá de los números naturales y las cantidades discretas, creemos que su enseñanza es esencial puesto que las fracciones engloban a los decimales, los porcentajes y las subunidades del sistema métrico, además de que se relacionan con enseñanzas futuras, tal es el caso del álgebra donde no se usan decimales sino fracciones.

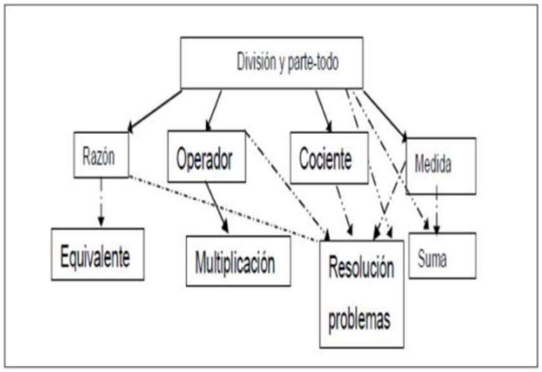
La necesidad de mejorar la enseñanza de las fracciones generó gran interés en múltiples autores como Freudenthal (1983), Kieren (1980) y Thompson (2003), quienes pretendían abonar a la enseñanza-aprendizaje de este concepto. La idea de reconocer un concepto integrando diferentes subcontratos (las fracciones ligadas con sus diferentes significados) tomó fuerza e hizo que se convirtiera en una de las teorías más conocidas y aceptadas en Latinoamérica, incluido México. En el contexto de esos esfuerzos, Kieren (1993) y Llinares (1997) analizaron la estructura cognitiva (números racionales) por la que se debe y puede dar este proceso y concluyen que en un primer momento, la formación debe orientarse en dirección de la relación "parte-todo" y las actividades deben estar dirigidas a que adquieran el manejo de estos atributos basados en modelos continuos en contextos de área que pueden considerarse los más naturales para estas ideas; posterior a esto aparecerán más ideas referentes a la fracción.

A pesar de la gran aceptación, comenzar la enseñanza de las fracciones por la equipartición ha generado opiniones en contra de otros investigadores que, además, señalan el poco avance que esta idea ha tenido en términos de los aprendizajes de los niños, esto es, aún con la implementación del modelo de Kieren la comprensión del tema no ha sido el esperado y ha generado gran insatisfacción.

A continuación presentamos un esquema que da cuenta de las relaciones que se articulan en torno de la noción de fracción, las flechas continúas ilustran un vínculo directo entre noción y sus significados, mientras que las flechas discontinuas subrayan las relaciones que se conjeturan y ponen el acento en que el punto de partida es la "división y parte-todo" (ver Figura 4).

Figura 4.

Relaciones que se derivan de la noción de fracción



Nota. Tomado de Llinares y Sánchez (1997)

1.1.3. Los Límites del Significado Parte-Todo, los Contextos Continuos

En un primer momento y por la facilidad de comprensión que representa la equipartición (parte-todo en contexto continuos) es considerada, si no como la única, sí como la vía más favorable y sencilla, un medio por el cual los alumnos desarrollan la noción inicial de fracción. Sin embargo, los conocimientos involucrados en la partición y repartición equitativa (en contextos continuos o discretos) constituyen un obstáculo para la comprensión integral de las fracciones, ya que "es razonable que la equipartición oriente a los estudiantes a entender las fracciones en formas que dificultan el desarrollo de concepciones maduras de los números racionales" (Cortina, Zúñiga y Visnovska, 2013, p. 7).

En este sentido, las actividades que implican partición, separación o doblez de objetos pueden resultar significativas y fáciles para los niños en un primer momento, pero en este caso podemos aplicar el refrán "lo barato sale caro" o "lo fácil resulta difícil", ya que si bien la acción de partir pasteles o chocolates permite comprender las nociones fraccionarias básicas como el tamaño relativo de fracciones unitarias (½), comparación (¼ < ½) o las equivalencias ($2/4 = 1/2$), a la larga obstaculiza una comprensión madura de las fracciones, incluso cabría preguntarse si realmente las entienden. Sobre este respecto, Cortina et al. (2013) realizaron una investigación en la que reconocen que la equipartición es un obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones, su idea principal es que ésta dificulta la adquisición del concepto, por esta razón, aseguran, hay tres limitantes por las cuales desconfiar de la enseñanza a través del modelo de equipartición.

La primera limitante, referida en investigaciones hechas por Freudenthal (1983), tiene que ver con la fracción como fracturador. A pesar de que ésta es la manera más concreta y fácil de presentar las fracciones, dice el autor, resulta "restringida". Las fracciones como fracturador son vistas como el resultado de transformar un objeto de manera irreversible, es decir, existe un entero representado en algo que puede ser partido fácilmente (pastel-chocolate) y el resultado de esa partición es una fracción unitaria (rebanadas o trozos). Bajo esta idea se concibe que el alumno no tendrá dificultades, por ejemplo, para dividir un pastel o un chocolate (el entero) en seis partes iguales, posterior a esto la fracción será la cantidad de partes que tomemos, por ejemplo dos partes de esas seis, a las cuales se le denominará $2/6$.

Partiendo de este ejemplo reconocemos que $2/6$ representa la transformación del pastel de forma física e irreversible, la existencia de seis pedazos de lo que solía ser un pastel completo, el cual no se puede concebir como entero de nuevo fácilmente. Encaminar a los alumnos a esta conceptualización de fracción concebida desde la equipartición imposibilita en un futuro comprender una relación recíproca, o sea que un entero es seis veces $1/6$; esto en el sentido de que la idea de partir "algo" y tomar un tanto no corresponde a la idea de unir seis veces $1/6$, por qué tendría que unir o cómo podría unir algo que ha sido cortado o partido, cómo se "desparte" un pastel. La fracción es concebida como parte de un entero, pero no un entero como el cúmulo de fracciones.

La segunda limitante está en la definición más sencilla y más utilizada que damos a su representación gráfica, "el tanto de tantos". Mucha veces hemos escuchado que la "fracción" es fácil de interpretar puesto que el denominador es el número en que se divide el entero y el numerador la cantidad de partes que se "toma" del entero (Clarke y Roche, 2009), esta idea analizada por Cortina y otros (2013) deriva en la concepción de la fracción como un conteo, es decir que se forma un conjunto (el denominador) para luego formar un subconjunto (el numerador) que pertenece al conjunto. Por ejemplo, si se tiene la fracción $2/5$ el alumno divide el entero en cinco y "colorea" dos partes; con esto sigue la idea de tomar dos partes creando un subconjunto que pertenece a un conjunto de cinco, esto se relaciona con un proceso aditivo al agrupar dos elementos de un conjunto de cinco y dejando fuera del subgrupo a tres elementos.

La tercera limitante a la que hace mención Cortina y otros (2013) aparece cuando la equipartición es concebida como "tantos de tantos", como se explicó anteriormente la fracción está concebida obligatoriamente dentro de un entero, pues la concepción del alumno gira en torno a un pastel o chocolate dividido en cinco y del cual se han tomado dos para representar $2/5$, esto implica que la fracción se traduzca en algo menor o igual a la unidad (m veces $1/n$ únicamente ≤ 1). En su mayoría los alumnos comprenden este tipo de casos, pero qué pasa cuando se dice "$7/5$ de pastel", ¿el alumno comprende que es mayor a la unidad? ¿O se remite a tomar el número más grande como denominador para poder realizar la partición y "tomar" el menor? Sin duda esto es absurdo, pues no se interpreta de qué manera la parte es mayor que el todo.

Para Freudenthal (1983) la enseñanza de este modo remite a "un comienzo muy limitado" que conduciría solamente a la comprensión de fracciones propias, lo cual hace de su aprendizaje algo muy pobre y corto. También menciona otra problemática que resulta de pensar la fracción como contenida dentro de un entero, la imagen que el alumno hace de $2/5$ de pastel habla del mismo pastel y así sería si la actividad gira en torno de chocolates, pizza o terreno, la fracción tiene algo físicamente en común con el entero. No obstante, esta forma de concebir las fracciones "obstruye el hecho de que los estudiantes entendieran las fracciones como números que pueden cuantificar el tamaño de algo relativo a algo que está separado" (Cortina et. al., 2013, p. 14), situación que limita comprender que la fracción juega un papel independiente, lo que dificulta la comprensión, por ejemplo, de que un objeto como $4/7$ es mayor que otro, en el sentido de que uno no está contenido dentro del otro.

Por su parte Ávila y Mancera (citados por González, 2018) encontraron que la interpretación de las fracciones de los alumnos no está integrada en los diferentes significados, sino que se remite solamente a un único significado (tal y como es enseñado) es decir la fracción como parte de una figura plana (parte-todo en contextos continuos) lo que nos lleva a reconocer la limitante de la enseñanza de las fracciones dentro de este significado, puesto que $2/6$ no significa más que la parte de algo, "la palabra fracción alude a la idea de que algo ha sido fragmentado en partes" (Cortina, s/f).

Sin embargo, y muy en contra de las limitaciones que este tipo de enseñanza trae consigo, muchos docentes implementan este tipo de enseñanza, entre otras cosas porque así lo marca el currículum (por obligación o convicción) de manera que ocasiona aún más complicaciones que la equipartición misma. A continuación, mencionamos cuáles pudieran ser esas "nuevas" dificultades.

1.1.4 La Enseñanza de las Fracciones por Equipartición. Concepciones de los Alumnos

Siguiendo con la idea en la enseñanza de las fracciones a partir del significado parte-todo (en el contexto de superficie) podemos encontrar más dificultades durante y después de la introducción de este concepto matemático. Varios estudios demuestran que existen complicaciones en las percepciones que los alumnos construyen por el "tipo de enseñanza" y la manera cómo interiorizan esas nociones.

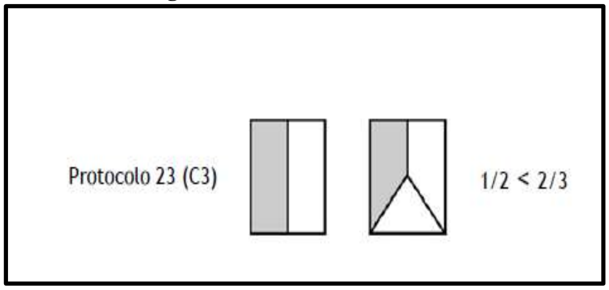
Una de las primeras nociones en la relación parte-todo con representaciones continuas es la de "dividir en partes iguales" el entero para obtener una relación entre el número de partes y el número total de partes (Llinares y Sánchez, 1997), es decir, para representar $2/5$ de un pastel se tendrá que dividir el pastel en cinco partes iguales y coloreando dos de esas partes. Cuando la fracción se introduce desde esta perspectiva una de las condicionantes para obtener las fracciones es tener "partes congruentes", como si se tratara solamente de un tema geométrico donde se presentan las mismas dimensiones sin importar su posición.

Sin embargo, esa noción puede ser introducida de forma tal que crea conflictos en los estudiantes cuando el docente representa el entero en diferentes figuras (cuadrado, rectángulo, triángulos o círculo), los estudiantes van perdiendo la noción de congruencia al ir conociendo formas diferentes de realizar la equipartición y en consecuencia, son capaces de representar la equipartición sin una de sus composiciones más importantes. Un ejemplo de esto se observa en la investigación de Pruzzo (2012)[4], ya que en sus resultados aparece que los alumnos representan una fracción en contexto del área donde sus partes no son congruentes (ver Figura 5).

[4] Problema: Compara las fracciones y coloca igual, mayor o menor. Representa gráficamente.

Figura 5.

Parte-todo congruente



Nota. Tomado de Pruzzo (2012).

Aunque en primera instancia el problema plantea la comparación de fracciones, en el segundo rectángulo (Figura 5) se puede ver que la partición no es congruente, es decir, la manera en que el alumno representa 2/3 en el rectángulo no corresponde a una división de partes iguales puesto que el triángulo es de menor área que los dos trapecios. Esta equipartición ha perdido una de sus principales propiedades en el significado parte-todo; la confusión puede desprenderse de la asociación que se tiene con la equipartición que se ha visto en diferentes tipos de áreas, incluso con diferentes formas de realizar la equipartición, lo que ocasiona la necesidad de dividir sin importar cómo se divide, es decir, "el alumno pierde el concepto de que las partes deben mantenerse congruentes (equivalentes como cantidad de superficie)" (Pruzzo, 2012, p.9), ya sea por la confusión heredada en las clases o por la "necesidad" de que no le queda ningún espacio aun cuando exista una parte más grande o más chica que el resto, además de que la noción de área puede ser que no se haya visto como un atributo cuantificable.

Una segunda dificultad en relación con la manera cómo se presenta la noción de equipartición (en un contexto de parte-todo), tiene que ver con esta misma idea de usar diferentes tipos de áreas (pizzas, terrenos, etc.), en muchos casos los alumnos no discriminan entre el tipo de área que se puede usar aunque en ocasiones no presenta complicación alguna, por ejemplo, cuando se trata de representar gráficamente 2/3, sin embargo la idea de poder usar cualquier área prevalece aun cuando se trata de problemas de comparación (mismo que la situación anterior). Esta dificultad surge porque los alumnos pueden utilizar la "figura" que más les facilite la equipartición en la representación gráfica, el resultado de esto es que cuando existe una situación de comparación y al no discriminar una misma unidad como medida, los alumnos emplean dos tipos de áreas diferentes, obteniendo un resultado que a simple vista parece correcto, por ejemplo, Pruzzo (2012) encontró que los alumnos realizan comparaciones empleando dos tipos de gráficas diferentes (ver Figura 6).

Figura 6.

Comparación de fracciones

Nota. Tomado de Pruzzo (2012)

La enseñanza de la representación por equipartición no sólo limita futuras adquisiciones de otros conceptos, también provoca obstáculos como la representación de partes a través de la combinaciones de diferentes tipos de figuras geométricas (Pruzzo, 2012) en los que, aunque el resultado pudiera estar bien, la concepción de "menor que" va a corresponder a la apreciación perceptiva (menos espacio ocupado) y no a una construcción operativa, la cual dependerá, en todo caso, del tipo de área utilizado. Así, cuando se comienza la enseñanza de las fracciones por la noción de equipartición se orienta al alumno a la partición de un todo, y un todo es un todo, entonces concebir un todo más grande depende de la percepción de tamaño y no de la fracción como número que cuantifica.

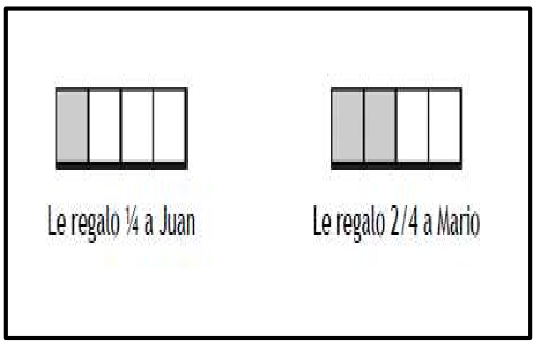
También en el estudio de Pruzzo encontramos una dificultad generada por la enseñanza a partir del significado parte-todo en contextos discretos y que está relacionada con lo que el profesor asimila y con una forma práctica de interiorizar la equipartición, nos referimos a las representaciones gráficas que debieran facilitar el entendimiento y asimilación del número fraccionario.

Sobre este respecto Pruzzo (2012) menciona que algunos alumnos son capaces de representar tantas unidades como operaciones se plantean y encuentra en cuadernos y carpetas la manera cómo el docente ha enseñado la relación parte-todo; en ellos se observa la representación de una fracción con distintos enteros como si se fuesen diferentes, quizá con la intención de que el alumno pueda visualizar de mejor manera la equipartición y, a pesar de que sólo se genera confusión al tratar de introducir la fracción desde un contexto de equipartición.

Un ejemplo de esto es cuando el docente les plantea el problema siguiente: *Si le regalo ¼ de chocolate a Juan y* 2/4 *de chocolate a Mario ¿Cuál es la cantidad de chocolate regalado?,* la intención del docente es que mediante la equipartición los alumnos determinen cuánto chocolate se regaló, sin embargo muchas veces para "facilitar" la comprensión se hace la representación de lo que le dio a Juan y lo que le dio a Mario de forma separada, creando la noción de que no es el mismo chocolate (ver Figura 7)

Figura 7.

Unidades en fracción como operador.



Nota. Tomado de Pruzzo (2012).

La intención del docente es buena, el resultado no tanto porque el problema se representa como si se tratase de dos chocolates, posiblemente algunos alumnos comprendan que aunque se representa en dos unidades se trata del mismo chocolate, pero en este gráfico se "obstaculiza la comprensión de que la unidad se mantiene estable a pesar de que se opere con sus partes" (Pruzzo, 2012, p. 5). La consecuencia de presentar la equipartición así es que los alumnos quizá tengan en mente varias unidades aun cuando se trate de la misma. A pesar de que las representaciones gráficas, en contexto de equipartición, debieran mejorar y facilitar el proceso de adquisición de las fracciones, en algunos casos lleva a los alumnos a confusiones que los hacen alejarse de propiedades simples de ésta, tal es el caso de la congruencia.

Una problemática más gira en torno a la manera en cómo los alumnos representan una fracción en un entero ya dividido y las dificultades que tienen para relacionar la equivalencia de un denominador y representarlo dentro del todo ya dividido, es decir cuando se pide a los alumnos representar 5/6 dentro de una figura dividida en 12 partes por lo regular tienden a ignorar el denominador y tomar sólo en cuenta el numerador para obtener como resultado 5/12. Este tipo de problemáticas fue detectado por Ávila y Mancera (1989, citados por González, 2018) y concluyen que los alumnos no han logrado interpretar correctamente la fracción como una relación parte-todo, sino que ven la parte y el todo de manera aislada. En muchos casos las fracciones no son vistas como una relación sino como un par de números independientes que pueden manejarse por separado

En la misma investigación, Ávila y Mancera (1989) encontraron que aunado a la poca relación que se encuentran entre las partes y un todo, los alumnos tienen dificultades para percibir la fracción fuera de un solo entero, lo que se relaciona con lo dicho por Cortina y otros (2013), que se concibe a la fracción como un tanto de tantos. Cuando los alumnos se encuentran con la oposición entre el numerador y denominador en una fracción mayor a la unidad, por ejemplo 5/2, los lleva a invertir la fracción, es decir, al enfrentarse a una fracción de 5/2 sus representaciones y percepciones cambian a 2/5, la manera de expresarla se invierte para así poder obtener una fracción menor a la unidad, aquello a lo que han estado acostumbrados; en la lógica de lo que se les ha enseñado esto es aceptable, pues la fracción se ha venido manejando dentro de un entero y la idea de encontrar algo mayor a ello parece absurda e incomprensible.

1.2. DEL PARTE-TODO A LOS OTROS SIGNIFICADOS

En apartados anteriores hablamos de las complicaciones que se generan a partir de un currículum que pretende ver las fracciones en múltiples escenarios (los significados), lo cual tiene como principal consecuencia que el alumno piense en la fracción en diversos contextos y como cosas totalmente diferentes, pero estas complicaciones no son sólo para el alumno sino que también se convierte en una complicación para el maestro ya que la manera como el alumno identifica la fracción depende de cómo es el modelo de enseñanza, por ejemplo, Ávila y Mancera (1989) plantearon a 293 niños mexicanos la pregunta ¿Qué quiere decir 4/6? Y en sus respuestas puede verse que basan su interpretación en un único significado, en la definición parte-todo; ¿Cómo esperar otro resultado a partir de la enseñanza que se prioriza?

Cuando el alumno tiene esta concepción se debe a que la única manera que ha trabajado las fracciones es mediante el tanto de tantos, en la cual, aunque se refiera al significado parte-todo predomina el contexto continuo sobre el discreto, por ejemplo en un cuestionario aplicado a alumnos de bachillerato (Sanz et. al., 2018), el 71.1% de los alumnos pudo responder cuestiones relacionadas con el contexto continuo, en contraposición de un 30.6% que pudo hacerlo en el discreto, concluyendo que la enseñanza se centra o predomina en un solo contexto. Lo que significa que los alumnos han iniciado el mundo de las fracciones con la noción de equipartición, donde $2/5$ representa la idea de partir un pastel (un todo) en cinco partes de las cuales se han tomado dos. Al relacionar la fracción parte-todo con los otros significados estamos expuestos a desarrollar obstáculos didácticos y ontogénicos pues el desarrollo cognitivo del niño se ve limitado por los conocimientos anteriormente adquiridos (equipartición) para desarrollar conocimientos más complejos (demás significados).

Sobre este respecto Cortina et. al. (2013) mencionan que los alumnos sólo conciben la fracción en un mismo objeto, es decir $2/5$ de pastel o $1/3$ de chocolate y aun siendo fracciones no deja de pertenecer al pastel o chocolate que alguna vez fue entero, esas fracciones nunca dejan de estar contenidas en el entero, sin embargo cuando se habla de cucharadas de azúcar por las cucharadas de café las relaciones entre parte y entero no se piensan del mismo modo, pues la relación con la razón es inconcebible después de ver parte-todo.

En este mismo orden de ideas encontramos la complejidad de vincular la noción de razón con la noción de fracción (Block, 2000, 2006, 2009) ya que, de inicio no está clara en el currículum y mucho menos en la enseñanza en el aula, Ramírez y Block (2009) encuentran que "la relación entre la noción de razón y fracción en las matemáticas escolares es sutil, versátil y también confusa" (p. 64). La noción de razón ha sido objeto de estudio no sólo en su papel de fracción sino también en contextos como la proporcionalidad, para el punto que nos ocupa profundizaremos en la primera relación. Observamos que las dificultades en la relación de razón y fracción se detonan cuando se introduce a la escuela primaria la enseñanza de los números racionales con la inclusión de los diversos significados posibles de las fracciones (Kieren, 1988) y todo el interés recae en enseñar las fracciones en términos algebraicos (significado de razón en términos de funciones lineales).[5]

Cuando estos modelos teóricos se introducen al aula, no sólo se tornan difusos en los programas, sino también en la manera de enseñarlos y en la manera cómo los alumnos construyen su significado. Las observaciones realizadas por Ramírez et al (2009) a un docente de sexto grado nos muestra el interés que se vive en el aula por definir la razón como una fracción "la razón de 6 a 30, con el sentido de 5 veces, se convierte en 1/5[6]" (p. 72); de esta forma los alumnos introducen el tratamiento de las razones como fracción al reconocer que se habla de una quinta parte, sin embargo el docente no está conforme y expresa "las razones también se pueden escribir como fracciones comunes… pero no se leen como tales" (p.73).

Aunque razón y fracción sean dos cosas diferentes, porque la razón es un significado del número racional, el docente encuentra la manera de expresar la razón como si fuera una fracción, pero sólo a nivel de escritura porque en términos orales enfatiza que debe expresarse como "6 cm a 30m" o "6 sobre 30". Ante la necesidad de considerar la razón como un significado de la fracción el conflicto del docente es que relaciona la expresión 1/5 con el significado parte todo (uno de algo dividido en cinco) y puede resultar incongruente que se exprese la fracción ante algo que se quintuplica.

Luego los problemas continúan cuando se introduce la constante de proporcionalidad en términos de equivalencia, en esta situación busca que en todos los casos los alumnos encuentren un resultado "igual", porque pretende presentar el paso de una razón a otra equivalente, pero intervienen en el nivel de lenguaje las fracciones. Además aparece una dificultad para reconocer el uso de números naturales en la noción de razón, lo que es visible por el sentido que le ha dado a la razón dentro de la fracción, como si esta también debiera estar contenida dentro de un entero. Por ejemplo, en otra situación planteada donde un auto gasta 3 litros de gasolina al recorrer 48 km, se pide encontrar la razón de km alcanzados por un litro; esta situación se puede resolver al

[5] El número racional expresado de la forma m/n, donde m y n son números enteros siendo n diferente de cero, no tiene como fin "advertir la relación entre una cantidad, el número y el contexto, sino el de cumplir una función numérica en una secuencia algorítmica, o ser un elemento de un sistema matemático que cumple con ciertas propiedades… siendo pues una abstracción en términos numéricos" (González Isidro, 2018 p.91)

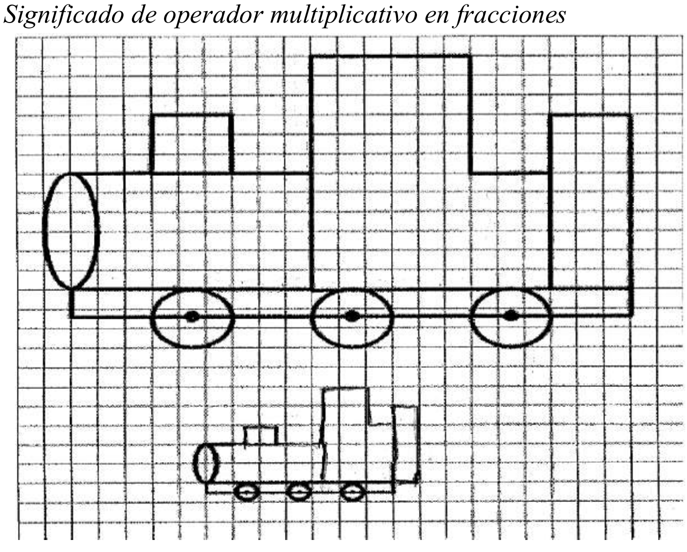
[6] El maestro planteó un problema de escala para introducir la noción de razón; consistió en que los alumnos calculan la medida de la ampliación basándose en la altura en el dibujo de un árbol 6cm y la ampliación 30m. (Ramírez y Block, 2009, p. 72)

encontrar la constante de proporcionalidad en $48km/3l$ o sea $16km/1l$, no obstante al no estar conforme con la respuesta (porque representa 16, un número entero), el docente usa la fracción 1/16 como la razón buscada sin darse cuenta de que representa la fracción de litro por kilómetro. La simplificación o equivalencia de razones en términos de fracciones, junto a las expresiones usadas por el docente no deja claro a los alumnos de qué se está hablando, si de razones o de fracciones; “cabe la duda de si permanecerá un sentido amplio de las fracciones o sólo un nuevo ostensivo, una nueva manera de leer una fracción, en la que la barra horizontal se sustituye por la expresión “de cada” (Ramírez y Block, 2009, p. 79).

Por otra parte, las fracciones también pueden ser vistas como algo que transforman, “algo que actúa sobre una situación (estado) y la modifica. Se concibe aquí a la fracción como una situación de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa” (Llinares y Sánchez, 1997, p.72). La ampliación o reducción del valor de un conjunto, por ejemplo en escalas, representa para la enseñanza y el aprendizaje un reto, principalmente porque las fracciones no se analizan como implícitas; es decir, disminuir una figura por la mitad no se asocia con ½ de las medidas de dicha figura. Sobre este respecto, Perera y Valdemoros (2008) encuentran algunas dificultades vinculadas al significado de operador multiplicativo (Ver Figura 8).

Figura 8 .

Significado de operador multiplicativo en fracciones



Nota. Tomado de Perea y Valdemoros (2008)

Los autores del estudio señalan, “observamos que los niños no reconocieron que la parte dibujada de la locomotora que tenía que completar correspondía a un tercio de las dimensiones de la de arriba” (Perera y Valdemoros, p. 48), y describen cómo las líneas que los alumnos trazan dejan de lado el factor operativo y no se toman en cuenta para unir líneas y trazar lados de la locomotora, lo que produjo figuras distorsionadas. Los alumnos no relacionan “aumentar y disminuir”, aun cuando en esta interpretación la fracción (como razón en un contexto de número racional) asume el papel de transformador multiplicativo de un conjunto, ya sea para su reducción o ampliación, en otros términos, el alumno ignora o desconoce su aplicación multiplicativa.

Respecto del significado cociente en términos de la introducción de fracción desde el mundo de los racionales, los alumnos presentan dificultades para realizar la equipartición en contextos continuos y en el tránsito de un significado a otro. Valdemoros (2004) encontró detalles similares a los de Pruzzo (2002) al analizar las dificultades de los alumnos para realizar un “reparto equitativo” en un significado de cociente indicado, observa que considerar cada elemento del reparto como un todo independiente les impide articular una estrategia adecuada de partición (repartir cinco jarras de agua entre ocho niños). Lo que se observa entonces es que los alumnos ignoran la concordancia entre los objetos repartidos y los receptores de los mismos, imaginan que uno es independiente del otro por no estar contenidos en un todo congruente; por ejemplo hubo alumnos que dieron como resultado “un medio para seis niños y para los otros dos un entero” ignorando por completo el reparto equitativo.

1.3. LAS DIFICULTADES DE LOS MAESTROS O EL PROBLEMA DE LOS MAESTROS

En su mayoría, los problemas de aprendizaje de los alumnos se corresponden con las dificultades de enseñanza de los docentes, tal vez como resultado de una concepción errónea y un planteamiento curricular desarticulado que se sale de sus manos. La manera cómo un docente presenta un contenido tiene cierto impacto en la manera como los alumnos lo aprenden, las investigaciones en torno de las fracciones (concepto-didáctica-aprendizaje) y sus múltiples fracasos en la instrucción primaria nos hacen preguntarnos qué está pasando en las aulas, porque a pesar de todas las investigaciones realizadas, no se logran obtener mejores resultados. En este apartado analizaremos las problemáticas en torno a la enseñanza de las fracciones y aunque la mayoría de las investigaciones giran en torno al aprendizaje de los alumnos, la idea es reconocer aquello que está pasando en el docente como parte fundamental del proceso educativo para comprender los factores que obstaculizan el aprendizaje efectivo del contenido.

Una de las causas que más preocupa es que las fracciones han sido identificadas como uno de los contenidos matemáticos que más ocasionan problemas a los docentes, "la gran mayoría de los profesores… consideran que las fracciones es el tema de las matemáticas más difícil de abordar en la escuela primaria, o al menos uno de los más difíciles" (Izquierdo, 2006 citado en González, 2018, p. 23), además de ser el más confuso. Partimos del supuesto de que hay cierto temor a lo desconocido, es decir, del limitado dominio que existe en torno a este tema (no sólo de los docentes), la poca comprensión por parte de los docentes tendrá un impacto negativo en el desarrollo de una planificación didáctica y de la enseñanza misma, sobre este respecto Charalambous (2011, citado por Castro et al., 2015) afirma que "la falta de conocimiento del contenido sobre fracciones… puede incidir en los niveles mostrados en su conocimiento didáctico de este contenido" (p.10).

En un estudio realizado por Castro, Rico y Gómez (2015) se demostró que 73% de 82 docentes en formación realizaron una propuesta didáctica muy "vacía" para la introducción de las fracciones, los docentes en formación se limitaban al uso instrumental, a una explicación sin incluir problemas contextualizados, la pura explicación sobre lo que es una fracción como parte de un todo (una pizza dividida en cuatro, cada parte es ¼). Ante una explicación de ese tipo, podemos inferir que los docentes en formación desconocían (quizá por sus antecedentes en su aprendizaje y la propuesta en el programa) los usos y aplicaciones que puede tener la fracción, de ahí sus dificultades para elaborar una planeación didáctica donde el alumno pueda obtener más y mejor información en torno al tema.

Otro estudio de Valdemoros (2010) sostiene la misma tesis, en las entrevistas de una primera fase de su investigación ella encuentra que la docente de un estudio de caso (Delia) presenta dificultades con el tratamiento didáctico de las fracciones y lo expresa de la siguiente manera "Yo acostumbraba a organizar mis clases a partir de las lecciones y actividades contenidas en el libro de texto para el niño" (p.430). El caso de Delia no es raro, lo podemos encontrar en muchos docentes que usan únicamente el libro como soporte fundamental para la enseñanza de las fracciones, pues desconocen una estrategia didáctica que se pueda emplear para ello.

Al parecer, utilizar el libro de texto como único elemento didáctico para la enseñanza de las fracciones tiene que ver con el temor de que el alumno tenga dudas sobre lo que está realizando y no poder resolverlas o bien que se concluyan las lecciones con muchas preguntas sin respuesta. Esto no es la intención del docente, sino más bien una consecuencia de la falta de dominio del contenido "¿Cómo voy a enseñar algo que no entiendo suficientemente?" (Valdemoros, 2010, p. 430). La idea de que sea el libro quien dicte la clase y no exista una estrategia del profesor para la enseñanza de las fracciones ocasiona una "desdibujada intervención como docente".

En esta misma problemática podemos hablar de una variante, en su afán de no perder su figura de enseñante los docentes pueden enseñar a los alumnos ideas erróneas sobre las fracciones, por ejemplo, uno de los problemas de enseñanza relacionados con la noción parte-todo tiene que ver con reconocer las fracciones impropias y no sólo las propias, en una situación puede aparecer la fracción 5/3, pero si el docente no reconoce a la fracción fuera de la unidad (pero sí contenida en un entero), enseñará a los alumnos de manera equivocada ya que la la expresión se refiere a un todo dividido en cinco partes donde se toman tres, como si se representara 3/5. Por las razones anteriores Gallardo et al., (2008) mencionan que "el significado de parte-todo viene acompañado de una confusión acerca del papel que desempeñan y la posición que ocupan la parte y el todo en la representación numérica" (p. 378). Desconocer la resolución de situaciones, como lo hace Delia (Valdemoros, 20109) es sin duda un problema y por esta razón frecuentemente varias lecciones en las que se incluyen propiedades de la fracción, como las impropias, no son tomados en cuenta por la complejidad que representan.

Ahora bien, a partir de la Reforma Educativa de 1993 en México con la introducción de los números racionales (como constructo algebráico), el uso de diversos significados vino a representar un reto para los docentes, en primer lugar por el desconocimiento que los maestros en servicio y en formación tenían de dichos significados, por lo general sólo reconocían el significado parte-todo. Por otra parte, la distancia entre lo que planteaba el programa de estudios y los libros de texto distaba mucho de lo que el docente realizaba en el aula, mientras que en el libro se trabaja la interpretación de la fracción como división indicada, en la propuesta del maestro predomina la idea de fracción como parte de un todo (Ávila, 2010), esto quiere decir que el docente tenía dificultades para reconocer en la fracción $2/5$ una situación de reparto o razón.

Cuando el docente enseña las fracciones mediante un significado de la fracción que ha creado para sí, se generan consecuencias en el aprendizaje, los alumnos consideran la fracción contenida dentro de un todo y eso les imposibilita ver a la fracción en otros contextos. Relacionar la fracción sólo con la equipartición es una manera fácil de abordar el tema, pues resulta sencillo para el profesor explicar, siempre y cuando sea una fracción contenida en un entero.

El problema es que esta concepción del docente no nace en las aulas de las escuelas primarias, estudios desarrollados por González (2005) y Aguayo (2005) muestran que la situación se viene arrastrando desde la enseñanza en las escuelas normales; "la evidencia recabada lleva a establecer que el término "fracción" es entendido por los estudiantes normalistas interrogados principalmente de dos formas: como la "división de un todo en partes" y como la "parte de un entero" (González, 2005, p. 81). Los profesores en formación no han incorporado en sus conocimientos los diversos significados de la fracción introducidos en el currículum, aun cuando en las escuelas normales se pretende precisamente eso, el uso de distintos significados de las fracciones[7].

A través del planteamiento y resolución de problemas con fracciones hechas a los alumnos que cursan la escuela normal, Aguayo (2005) encontró una estrecha relación entre su desempeño en las pruebas y las inseguridades que expresan ante la idea de enseñar este contenido. Los alumnos se muestran incapaces de enseñar fracciones por falta de dominio de contenido, lo cual se ve reflejado en los resultados obtenidos en los problemas que intentan resolver. Los docentes en formación y en servicio comparten un mismo patrón, los miedos e inseguridades de trabajar con los diversos significados de la fracción incluidos en los programas de estudio, miedos e inseguridades que son consecuencia de su desconocimiento, el cual los

[7] Que el estudiante normalista desarrolle las competencias algebraicas y sus didácticas, para atender los desafíos que presentan los contenidos de la educación primaria. (SEP, 2019, p. 6)

conduce a utilizar el método que más facilita "cumplir" con la enseñanza de las fracciones, la equipartición; partir una hoja, una tira o áreas para demostrar el tanto de tantos.

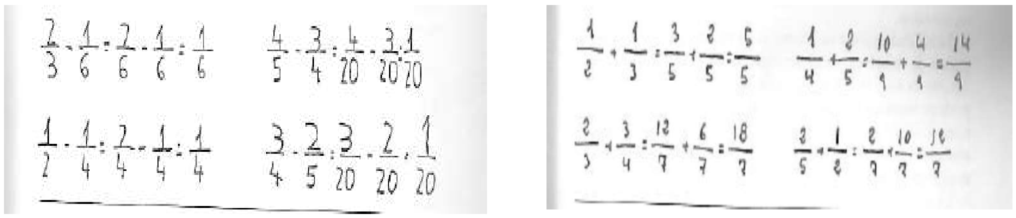
Para Valdemoros (2010), aun cuando los diferentes significados de la fracción aparecen en los programas y libros de textos, los profesores denotan la falta de herramientas necesarias para desarrollar situaciones que impliquen los diferentes significados de los racionales y por esta razón en ocasiones los abordan sin saber a qué se refieren y no se profundiza en su estudio, quizá el problema más grande es que no hay quien les ofrezca una didáctica mejor para su enseñanza y "en tanto no se disponga de un amplio saber en ese terreno, (el profesor) difícilmente podrá esclarecer cómo estructurar y articular entre sí los distintos pasajes de enseñanza previstos para las fracciones" (Valdemoros, 2010, p. 431).

Entonces en la mayoría de las aulas prevalece la idea de parte-todo, que frecuentemente se presenta mediante un círculo (pizza o pastel) dividido en cinco partes con tres partes sombreadas (3/5), luego se plantean actividades para identificar "qué es una fracción", se adentran en la enseñanza de equivalencias y el uso de algoritmos privilegiando la enseñanza de técnicas que por su introducción temprana, pueden estar llenas de errores. Este tipo de "enseñanza mecanizada", como la definió Valdemoros (2010) es un obstáculo para la enseñanza de las fracciones, pues los docentes enseñan bajo el método que ellos fueron instruidos aportando al alumno mecanismos automáticos de resolución carentes de sentido.

Por otra parte, tanto los problemas aditivos como multiplicativos con números fraccionarios representan un reto en la enseñanza porque las reglas operativas pueden ser diferentes a las usadas con números naturales. La forma más sencilla de introducir el tema es mediante la exposición de las técnicas que se utilizan para la solución de las operaciones, por ejemplo buscar un común denominador, usar productos cruzados, multiplicar numeradores y denominadores, etc. La explicación de técnicas genera una aplicación descontextualizada y muchas veces errónea, sobre este respecto Llinares (1997) señala que los métodos utilizados por los niños puede ser alternativos a los enseñados, ya sea porque los modifican u olvidan algún paso de algoritmo enseñado, es decir, que los usan de manera mecánica porque no comprenden a ciencia cierta que están haciendo, pues no han interiorizado el proceso, por esta razón realizan operaciones con técnicas de suma o división sin predecir su error porque realizan los pasos que se le dieron, sin importarle a qué tipo de situación se refiera. (Ver Figura 9).

Figura 9.

Operaciones con fracciones



Nota. Tomado de Llinares (1999).

Ambos ejemplos muestran concepciones mezcladas y erróneas que han ido desarrollando los alumnos al intentar imitar lo explicado por el profesor, sin embargo en una parte del camino han perdido todo lo que se les dijo. En el primer caso el alumno ha reconocido que debe obtener un denominador común divisible entre los dos denominadores de las fracciones, pero por otra parte se ha olvidado de modificar los numeradores en la misma proporción, esto nos indica que ha olvidado algo de los pasos enseñados. En la siguiente figura vemos que el alumno sabe que debe ser un denominador igual para poder realizar las operaciones, el cual obtiene de sumar los dos denominadores, posteriormente, al recordar que los numeradores deben ser alterados de igual manera, obtiene los numeradores de multiplicar los dos números naturales contenidos en la fracción; como vemos el alumno ha creado un procedimiento sistemático propio al tener una interferencia de las diferentes técnicas aprendidas.

Cuando la enseñanza de las fracciones se realiza mediante clases tradicionalistas donde el docente es quien dicta las clases y los alumnos las reproducen mediante ejercicios, tenemos un retroceso que en otras áreas de las matemáticas ya se ven superadas si no por completo si en mayor medida. Cuando se enseñan técnicas alejadas de un contexto, los alumnos difícilmente pueden comprender la funcionalidad y el significado de las operaciones, por ejemplo el hecho de que al multiplicar dos fracciones no se obtenga un producto mayor, como es el caso de los números enteros.

Sobre el tema de las operaciones Sanz et al. (2018) realizaron un estudio sobre las habilidades de alumnos de educación media superior (15 a 16 años), uno de los aspectos evaluados fue el "cálculo con fracciones". Dentro de los resultados se encontraron situaciones en las que los alumnos presentan errores en la aplicación de reglas al operar con las fracciones, reglas que son evocadas sin precisión debido al proceso de memorización previa, por ejemplo en una operación de multiplicación los alumnos realizan una división, trayendo así lo que una vez le enseñaron, pero de manera equivoca. Podemos concluir que la enseñanza mecánica de los algorítmicos tiene repercusiones negativas, no sólo en una mala resolución, sino también en encontrar muy poca relación en contextos, en otro de los resultados de este estudio, los alumnos son capaces de sumar y restar fracciones en operaciones, pero no lo hacen dentro de la resolución de problemas. En este mismo sentido Ávila (2006) encontró que

> El número racional implica una relación entre dos números (a/b, con b diferente de cero) y que admite múltiples interpretaciones puesto que puede modelar una amplia variedad de situaciones, y otra, que sus propiedades son distintas de las de los números naturales(Ávila, 2006, p.182).

La misma complejidad de las fracciones como números racionales, nos dice la autora, alejan al alumno de lo que ha construido anteriormente, entrando a nuevas reglas que muchas veces se oponen. La dificultad para enseñar radica en que ni el mismo docente reconoce que las fracciones representan un número capaz de cuantificar y medir como los número naturales (en su aplicación), y simplemente se ve como una parte de algo que puede ser operada con problemas aditivos y multiplicativos que responden a ciertas técnicas, muchas veces sin sentido.

1.4. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Las dificultades presentes en la enseñanza aquí mencionadas nos hacen pensar en todas esas confusiones y mitos que giran alrededor de la fracción, lo alejado que está de considerarse un número capaz de cuantificar y expresar cantidades y como un número funcional en las múltiples situaciones en que pueden aparecer. El desconocimiento, la mala praxis y las instrucciones repetitivas son la realidad de la enseñanza de las fracciones en México y muchos más lugares.

Un gran número de estudios han demostrado que estamos lejos de tener éxito en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones por diversas causas, entre las más reconocidas está aquella que profesa la introducción del contenido desde la idea de parte-todo, el cual es base y debiera facilitar la adquisición de los demás significados, y como por una especie de magia permitiría a los alumnos construir un megaconcepto, donde lo comprendiera y fuera capaz de utilizarlo, sin embargo estamos en un panorama completamente opuesto.

El panorama internacional no es muy alentador, en él se ve una relación que cada vez hace más daño a los alumnos de educación básica y, nos atrevemos a decir, media superior y superior. Además, en lugar de alejarnos del problema cada vez está presente con más fuerza, las críticas a los modelos curriculares y métodos de enseñanza no son recientes en el contexto de las fracciones, pero sí cada vez son más fuertes lo cual nos permite darnos cuenta de nuestro gran problema desde diferentes perspectivas.

II

LA MATEMÁTICA REALISTA. UNA PERSPECTIVA PARA MATEMATIZAR LA REALIDAD

Actualmente el campo de la Educación Matemática está poblado de múltiples teorías, de hecho, no resulta fácil dilucidar cuáles herramientas teóricas son más apropiadas para estudiar un objeto en particular, sin embargo frente a dilemas como ese siempre es necesario y obligado regresar a los clásicos. Una de las perspectivas teóricas clásicas en Educación Matemática que abonan a la idea de la transformación de la enseñanza es la llamada Educación Matemática Realista (en adelante EMR) que está basada en una filosofía pragmática. Al análisis de las ideas fundamentales de la EMR dedicamos este capítulo.

2.1. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

Durante varios años se creía que las matemáticas debían enseñarse a través de fórmulas dadas por el profesor mediante un proceso de imitación en el que los alumnos visualizaron cómo resolver el problema y reproducen el procedimiento mecánicamente sin comprender lo que realizaban (Balacheff, 1987), en ese proceso no existe lugar para la comprensión y mucho menos para la validación de los resultados, razón por la que no existe relación entre los conceptos matemáticos y las situaciones que éstas modelan, los conceptos y las fórmulas se encuentran aislados unos de otros. En ese contexto nace la Educación Matemática Realista (EMR) con el objetivo de reorientar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El desarrollo de investigaciones que buscaban un cambio de perspectiva comenzó con una idea desarrollada en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO) en la Universidad estatal de Utrecht de Holanda (ahora Instituto Freudenthal) bajo la dirección de Hans Freudenthal. La idea principal de los primeros estudios giraba en torno a la necesidad de "reinventar las matemáticas" mediante la matematización del mundo real (Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. 2008) para que los alumnos se sintieran habituados a los problemas que se presentan en su vida diaria y les crean la necesidad de resolverlos, en palabras de Freudenthal:

“Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas” (Freudenthal, 1983, p.7). Encontrar un cambio a la enseñanza de las matemáticas tradicionalistas fue la base de las investigaciones de Freudenthal, con ellas pretendía alejarse de la teoría de los objetivos operacionales, de los test estructurados y de las teorías constructivistas de Piaget.

En correspondencia con esta idea, la Educación Matemática Realista plantea que la enseñanza de la matemáticas no debe partir de una simbolización convencional, al “enseñar matemáticas puras y después mostrar cómo aplicarlas, me temo que no estamos en mejores condiciones. Creo que es justamente emplea el orden equivocado.” (Freudenthal H. , 1968, pág. 5), al contrario de esto se trataría de comprender la manera cómo los conceptos fueron creados, esto es cómo nacen a partir de un fenómeno.

Enseñar desde la matemática realista no significa desarrollar un proceso que va de lo simple a lo complejo sino reconocer las discontinuidades que tiene esta disciplina necesarias para empatarla con lo real, con una actividad humana, es decir de lo que se trata es de “matematizar”, de modelizar matemáticamente determinadas porciones de la realidad. Desde esta perspectiva entonces, reconocer las matemáticas como una actividad humana es esencial para un nuevo y mejor método de enseñanza (Freudenthal H. , 1973). Este principio es recuperado por los planes y programas (2011) para la educación básica en México en los que se plantea que “la formación matemática permite a los individuos enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana” (S.E.P., 2012) porque una y otra no debieran estar separadas. “La forma de aprender matemáticas es haciéndolas y ver a la matemática como una actividad humana”, pero con una aclaración, el término REALISTA debe interpretarse como referida a la experiencia, no a la vida real de todos los días (Gravemeijer y Terwel, 2000).

En síntesis, como la escuela invierte el orden natural del trabajo matemático, olvida que los matemáticos parten de problemas para encontrar una solución, por ello la escuela debería recrear la actividad del matemático en el aula y “jugar a ser matemáticos”, en ese sentido Freudenthal (1983) subrayó que el material que los estudiantes matematizan debería ser real para ellos, dicha idea se desarrolla bajo la noción de fenomenología didáctica.

2.1.1. La Fenomenología Didáctica

La fenomenología didáctica es la base para el desarrollo de una Educación Matemática Realista que busca alejarse de la idea de que para adquirir cierto contenido se debe partir de su enseñanza abstracta y posteriormente aplicarla, por ejemplo para enseñar la longitud" se piensa que primero debe inculcarse el concepto de longitud y posteriormente ver su aplicabilidad en múltiples ejercicios. La fenomenología didáctica postula un enfoque diferente, pretende "empezar por observar los fenómenos que solicitan ser organizados y, desde ese punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización." (Freudenthal H. , 1983).

Ahora bien, en tanto metodología de investigación, el objetivo de una investigación fenomenológica didáctica es encontrar situaciones problema a partir de las cuales se puedan generalizar situaciones para abordar la enseñanza de un determinado objeto matemático y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Desde esta perspectiva, encontrar fenómenos que puedan ser matematizados nos permite comprender la manera cómo fueron inventados, creados o construidos. Empero, para comprender mejor la fenomenología didáctica debemos partir de la idea de un análisis fenomenológico de las matemáticas, el cual es percibido como un componente de análisis didáctico que permite la organización de la enseñanza de contenidos matemáticos.

2.1.1.1.El Análisis Fenomenológico

Reconocer la "fenomenología didáctica" como metodología de la EMR nos lleva a comprender otros elementos indispensables para cumplir con dicha metodología, comenzaremos por examinar el análisis de los contenidos dentro de las propias matemáticas, proceso que Freudenthal ha denominado análisis fenomenológico.

El análisis fenomenológico de un concepto nos permite describir cuáles son los fenómenos para los que dicho concepto es el medio de organización de los fenómenos para los cuales fue creado y, a su vez, nos permite saber cuál es la relación entre el concepto y el fenómeno.

Para explicitar en qué consiste el análisis fenomenológico comenzaremos por describir dos nociones fundamentales de la fenomenología (establecidos en la filosofía y adaptados por Freudenthal), el "nooumenon" y el "Phainomenon". Ambas ideas representan una contraposición en el sentido que se pretende que una noción contrarreste el efecto de la otra, es decir, que se encuentren en equilibrio.

El término noúmeno describe aquello que es pensado mediante la razón, es lo "inteligible", es decir, es el nombre por el que es reconocido un objeto o una cosa, por ejemplo "fracción" sería el noúmeno, el concepto que sirve para organizar una serie de fenómenos. Mientras el fenómeno es aquello que aparece, lo que es percibible, es decir, la cosa en sí misma, por ejemplo, podemos definir como noúmeno la palabra "hogar" porque es un objeto pensado, mientras que el fenómeno responde al mundo de cómo percibimos el hogar con relaciones entre papá, mamá e hijos u otros factores que lo complementan, es decir la idea en la mente al evocar esa palabra.

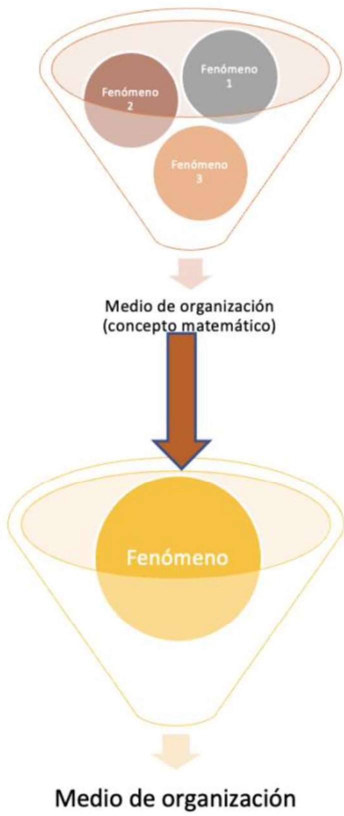
La simple definición de estos conceptos nos permite ver que existe una cruce entre ellos, entre el "mundo de lo sensible" (el mundo de los phainomenon) y el "mundo de lo inteligible" (el mundo de los nooumenos), y aunque estas nociones son propias de la tradición filosófica, Freudenthal las traspala a las matemáticas para darle a los conceptos o estructuras matemáticas el sentido de noúmenos, mientras que la idea de phainomenon designa los fenómenos que son organizados mediante dichos conceptos (Puig, 1997), por ejemplo las figuras geométricas tienen su noúmeno (triángulo, cuadrado, etc.), pero en tanto objetos matemáticos organizan un conjunto de fenómenos que globalmente se pueden calificar como el mundo de los contornos.

Al observar los componentes de la "fenomenología" podemos concluir que el noúmeno es el "medio de organización" de un fenómeno del mundo, es decir aquello que organiza la "cosa" que se percibe y nos rodea, y que por su función entran en relación con los fenómenos. Los fenómenos por su parte serían una forma de expresar nuestra "experiencia matemática", es decir, todo lo que aparece en el mundo real (Puig, 1997). Nos gustaría resaltar que en la fenomenología didáctica de Freudenthal no se ve a este par de nociones como elementos de dos mundos separados, sino, por el contrario, están más bien definidos por la relación entre ambos.

Continuando con el análisis fenomenológico encontramos una característica que vale la pena mencionar, en sus investigaciones Freudenthal (1983) habló no sólo de la relación primaria que existe entre los medios de organización (noúmenos) y los fenómenos, sino también de una segunda relación donde esos medios de organización (noúmenos) pasan a convertirse en los fenómenos del siguiente par, es decir los fenómenos se extienden para ser organizados por nuevos ´conceptos´, por ejemplo en determinada situación la suma iterada es un noúmeno que organiza ciertos fenómenos ligados a las situaciones aditivas, pero posteriormente pasa a ser fenómeno de la multiplicación (ver Figura 10).

Figura 10

Medios de organización y fenómenos (Puig, 1997)



Nota. Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la figura 10, la combinación y suma de varios fenómenos, como objetos del mundo, son organizados por un concepto matemático, el cual actúa como medio de organización de los fenómenos del mundo. Este proceso es evolutivo y cíclico pues los conceptos matemáticos pasan a formar parte del mundo que percibimos y conocemos formando ahora parte de los fenómenos que requieren ser nuevamente organizados por otros conceptos matemáticos. Al respecto Puig (1997) mencionó

> La progresión escalonada de pares fenómenos/medios de organización comporta dos procesos: el proceso de creación de un concepto matemático, que viene indicado por cada par, y el proceso por el cual se objetiva un medio de organización de forma que puede entrar a formar parte de un nuevo par, ahora en la posición de fenómeno (p. 6).

En otras palabras, "los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia, en el que entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos/medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos, y este proceso se reitera una y otra vez" (Puig, 1997). Todos estos fenómenos que organizan las matemáticas son y siguen siendo parte de un mundo real y preexisten con sus propiedades, es decir, "los objetos matemáticos son noumena, pero un trozo de matemáticas puede ser experimentado como un phainomenon; los números son noumena, pero trabajar con números puede ser un Phainomenon." (Freudenthal, 83, p. 28), por ejemplo reconocer la fracción (3/5 en un contexto de reparto) como un noúmeno, como un concepto matemático, pasará a formar parte de lo ya conocido en nuestro mundo real y en ese momento se convierte en un fenómeno al que se puede organizar bajo otro concepto, pensemos ahora en un contexto de razón; es decir que existe una "transición" de ser concepto matemático a formar parte de un nuevo fenómeno.

En este proceso de organización sucede algo interesante, en el trance del fenómeno a los medios de organización, existe un momento en que hay que nombrar esa relación por la cual será reconocido, es es el momento en que aparecen los signos, es decir existe un papel importante del sistema de signos en el que se expresa tal relación porque los signos representan a las matemáticas en la misma práctica matemática, por ejemplo el fenómeno de los contornos, organizado por el concepto "polígonos regulares", puede ser expresada mediante los signos que la definen en un espacio euclídeo como un polígono A0-A1-A2… (lo cual se convierte en su signo, un lenguaje matemático, distinto del vernáculo). Puig (1997) menciona este hecho haciendo referencia a la semiótica, como los signos matemáticos no tienen una naturaleza lingüística debido a que no son homogéneos heterogéneos, esta condición provoca la necesidad de dar un “signo”, un “nombre” a las cosas del mundo que nos permita dar un significado para otorgarle sentido a aquello que está en nuestra mente (concepto).

Entonces, la elaboración de conceptos matemáticos o mejor dicho, la conceptualización de objetos matemáticos involucra un juego entre los signos y la relación fenómeno/medios de organización. A través de ese involucramiento entre el nombre y la cosa se crea un concepto por el sistema matemático de signos que lo describen. Por ejemplo, el signo ¾ tiene una relación múltiple con el mundo perceptible, es decir, designa a muchos fenómenos, uno sería dividir una galleta en cuatro partes iguales y tomar tres partes, lo que genera el concepto de “equipartición” en el contexto de las fracciones. Sin embargo, estas relaciones no se muestran estáticas, sino que unas forman parte de nuevas y más complejas relaciones, dando lugar así a un proceso de abstracción progresiva de conceptos que, obviamente, cada vez se tornan más abstractos.

Estas relaciones que existen dentro del análisis fenomenológico, nos ayudan a comprender, por decirlo de algún modo, el origen de los conceptos matemáticos, pero sobre todo a comprender la relación que existe entre el concepto (nooumenon) como un medio de organización para uno o varios fenómenos (phainomenon) es sólo una parte de la teoría de “fenomenología didáctica” que intentó desarrollar Freudenthal, y tal análisis fenomenológico sustenta las bases de una fenomenología didáctica (análisis fenomenológico desde una perspectiva educativa).

Hasta aquí hemos hecho hincapié en el objetivo que la EMR estableció para cambiar la concepción de la enseñanza de las matemáticas “modernas” en la que se pretendía enseñar los conceptos abstractos ya materializados. Con la fenomenología didáctica se intenta abandonar la idea de inculcar conceptos, para poder desarrollar la idea sobre cómo encontrar fenómenos que buscan ser organizados por los conceptos; no obstante hay algo que nos gustaría recalcar dentro de este análisis. Los conceptos matemáticos no existen fuera de la actividad matemática que los crea, el mismo Freudenthal nos hace reflexionar sobre esta idea al introducir un nuevo término, “la constitución de objetos mentales” que contrapone al de *adquisición de conceptos* porque menciona “se deberían buscar primero fenómenos que pudieran compeler al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto” (Freudenthal, 1983, p. 32).

2.1.1.2. La Constitución de Objetos Mentales

Dentro de la Teoría de Fenomenología Didáctica la constitución de objetos mentales obedece más a la parte didáctica de la misma. Con esto nos referimos al hecho de que la fenomenología didáctica dentro del aula (como metodología) busca la constitución de *objetos mentales* más que de conceptos, "el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar ha de ser básicamente la construcción de objetos mentales y sólo en segundo lugar la adquisición de conceptos –en segundo lugar tanto temporal como en orden de importancia" (Puig, 1997, p. s/n), es decir el hecho de adquirir un concepto responde a la adquisición de un conocimiento (incluso de manera antididáctica) que existe ya con una definición y propiedades, creado y matematizado por alguien más, ese no debe ser el objetivo, sino que en el aula debemos crear las condiciones para que elabore por sí mismo y con sus propios alcances, un objeto mental o sea su propio conocimiento a partir de su experiencia, el cual le brindará poder sobre ella y lo que está creando; al ser suyo tiene la posibilidad de comprenderlo y dominarlo.

Anteriormente hemos hablado del análisis fenomenológico dentro de la disciplina matemática y poco dentro del pensamiento humano, por ello en este punto resaltamos la importancia acerca de cómo se organiza un fenómeno desde el pensamiento de una persona y no desde la matemática misma, por esto Freudenthal plantea una contraposición entre el objeto mental y el concepto como consecuencia del uso que las personas dan a las matemáticas *versus* las matemáticas como disciplina.

Los objetos mentales[1] se refieren a la idea más humana de las matemáticas, son el conocimiento que una persona tiene acerca de un concepto, pero no de la forma enciclopédica desde la que se le da significado, sino que son la forma "mundana" en la que se hace uso de él aplicando su propio significado. Por ejemplo reconocer la concepción que una persona puede tener de fracciones, responde a lo que hay en su mente y no a la definición estrictamente matemática, pues la concepción del sujeto examina un contexto específico y con las aproximaciones que tiene a ese contexto va formando una idea propia de lo que es fracción.

Sin embargo, hay conceptos que se presentan en más de un contexto y dependiendo de ellos adquieren un significado diferente para quien los usa, por ejemplo el concepto de número

[1] Lo que Freudenthal llama *objetos mentales* es lo que Fichsbein denomina *intuiciones* y Piaget *representaciones.*

puede contextualizarse en un número de teléfono o el número de objetos de una colección, aquí entonces el significado que se puede dar al número se adapta a cada uno de esos contextos.

Puig (1997) hizo una descripción muy acertada desde el punto de vista de la semántica que nos puede servir de ejemplo para comprender más fácilmente el *objeto mental* que nos presenta Freudenthal. Puig habla en primer plano del *campo semántico* del concepto de número que corresponde al significado enciclopédico de "número", cuando existe una persona que entra en interacción con éste en un contexto determinado y es capaz de recibir un mensaje, así se forma una *restricción semántica* que le permite interpretarlo de forma oportuna, sin embargo el que opera el mensaje no actúa en función del conjunto de significados de la enciclopedia, es decir no actúa en función de la totalidad de usos de número, sino que actúa en su *campo semántico personal,* que ha ido elaborando y produciendo sentido en situaciones donde usa el número. Lo que Freudenthal llama *objeto mental* entonces, corresponde a la descripción de lo que es el campo semántico personal, el cual entra en relación con un contexto específico y no con la totalidad de significados de un concepto, es decir el objeto mental es lo que está en la mente de las personas y lo que le permite entender una situación matemática a la que se enfrente.

La creación de objetos mentales se convierte entonces en objetivo de la enseñanza en la EMR y entran en estrecha relación con la fenomenología didáctica como metodología y con la matematización que realiza el alumno, es por esta razón que el docente debe seleccionar situaciones (problemas realistas) de modo que puedan ser organizadas por los objetos mentales que los estudiantes deben construir y que se relacionan directamente con la finalidad del "diseño didáctico". Cuando el alumno entra en contacto con estas situaciones se desarrolla la actividad de matematización que está dirigida a construir el objeto mental.

En este sentido, González y Arévalo (2019) muestran un diseño metodológico que se centra en la aplicación de una situación problema realístico a matematizar llamado "el terreno óptimo",[2] que busca generar fenómenos matematizables que sean organizados por el objeto mental "límite matemático". En el desarrollo de la situación, los estudiantes deben buscar un diseño de terreno que se podría construir con un perímetro de 100 cm (el alambre) y chinches

[2] "El terreno óptimo": Un agricultor ha comprado un terreno y quiere usar parte de éste para el cultivo de tomate, para cercarlo dispone de 100 m de alambre y suficientes postes, desea que su producción sea lo máximo posible con los recursos disponibles; ustedes han sido contratados para diseñar el modelo óptimo.

para los postes, con la máxima área, deben identificar la forma y las características para su diseño; al momento de mostrar sus producciones los alumnos demostraron la matematización del fenómeno al convertir el problema del agricultor en un problema matemático de optimización y maximización de área, a la par en el momento de la validación surgieron comentarios como "Si tuviera más chinches (postes) le pondría más para ampliar la amplitud de los ángulos y asegurar acercarme al área de un círculo". Como se puede apreciar, el fenómeno (diseño del terreno) fue organizado por el objeto mental que los alumnos tienen de límite matemático, "este acercamiento intuitivo del estudiante hacia el concepto formal… son el fundamento para garantizar que los estudiantes reemplacen prácticas que trivializan la matemática, siendo sustituidas por prácticas más significativas" (González y Árevalo, 2019, p.6).

La organización de fenómenos mediante objetos mentales puede y debe darse aún sin conocer el concepto matemático, a pesar de, existe el caso también de que cuando el alumno usa un acercamiento intuitivo para la construcción de un objeto mental que lo ayuda a la posterior abstracción significativa de un concepto matemático; por ejemplo el que los alumnos quisieran usar mayor cantidad de postes para tener ángulos más amplios (intuitivo), se crea un objeto mental que se hace evidente cuando saben que al aumentar indefinidamente los vértices de un polígono, éste va tomando la forma, y por ende, el área de un círculo; y en términos matemáticos, que "el área de polígonos regulares cuando la cantidad de vértices tiende al infinito es igual al área de un círculo de igual perímetro del polígono regular". Así, los conocimientos intuitivos del alumno y la puesta en práctica de la matematización en el fenómeno del terreno, los llevó a organizar este fenómeno por medio del objeto mental límite, que muy pronto llegará a ser concepto.

Como podemos ver los objetos mentales, así como los conceptos, guardan una estrecha relación con los fenómenos, y así como los conceptos actúan como medios de organización de los fenómenos, los objetos mentales juegan ese mismo rol de organizadores; por ejemplo, con el objeto mental número se puede organizar un fenómeno de orden, "quién llegó en tercer lugar en una carrera", dándole un sentido a los números ordinales.

Asimismo, igual que los conceptos, los objetos mentales responden a una cadena de fenómenos/medios de organización en la que es posible aumentar de nivel y utilizar los antiguos objetos mentales como nuevos fenómenos que llevarán a su vez a la constitución de nuevos objetos mentales. En ocasiones, los contextos utilizados de uso "mundanos" de los números pueden corresponder a una complejidad muy baja y en un nivel escolar más alto podrían parecer "aburridos", por esta razón, para ellos se recomienda "tomar en consideración otros contextos, entre ellos contextos ya matematizados." (Puig, 1997).

Ahora bien, hemos analizado el *objeto mental* como algo que está en la mente de las personas, mientras los conceptos se encuentran en la matemática como disciplina, esto es, "el objeto mental es el reflejo del concepto en la mente de las personas" (Puig, 1997, p. s/n). Esto lo convierte en un objeto meramente de enseñanza-aprendizaje pero al darle un giro con el análisis didáctico, los objetos mentales a construir se ligan con un contenido específico porque,

> … lo que el sistema quiere es que los alumnos constituyan un objeto mental como medios de organización de esos fenómenos y que tengan acceso a los medios de organización que la historia nos ha legado como medios valiosos de organización de esos fenómenos, es decir, a los conceptos. (Puig, 1997).

Con esto nos remitimos al interés de la EMR para que el alumno viva y recree (mediante la reinvención) una forma de hacer matemática, y qué mejor forma de hacerlo que como lo hacen los matemáticos.

Los conceptos matemáticos no son algo que preexiste a nuestra experiencia, sino que es la actividad matemática la que los crea (la actividad de los matemáticos), entonces los objetos mentales no son algo propio del proceso didáctico que se desarrolla en las aulas, sino que surge desde el momento en que los matemáticos organizan los fenómenos del mundo con el fin de definirlos conceptualmente e incorporarlos al sistema de las matemáticas. La actividad matemática produce entonces conceptos a partir de objetos mentales, es decir, el objeto mental se analiza y se perfila para crear un concepto, y ese objeto mental primitivo no sólo se sustituye por un concepto, sino también por un nuevo objeto mental que contiene al objeto creado por la definición.

El proceso histórico de creación de conceptos por los matemáticos, que devienen desde los objetos mentales, muestra la línea que se pretende y se debiera seguir en el aula, los alumnos deben jugar a ser matemáticos y qué mejor forma de hacerlo que conocer la historia de los conceptos. Una vez puntualizado esto reconocemos la importancia que tiene pasar de los fenómenos a los objetos mentales y a los conceptos a través de la enseñanza.

2.1.1.3. La Matematización. Hacer más Matemáticamente

La relación entre fenómenos y medios de organización, ya sea objetos mentales o conceptos matemáticos, tiene como fin que los alumnos entren en una fase de matematización donde sean ellos mismos los que usen sus herramientas para organizar esos fenómenos, sobre este aspecto Freudenthal señala que las matemáticas deben ser enseñadas como matematización, actividad que sería parte crucial de la enseñanza matemática desde la EMR.

Anteriormente, en el apartado de objetos mentales, hicimos referencia a este aspecto (matematizar) ubicándolo como parte indispensable de la fenomenología didáctica en y para la creación de objetos mentales y para la posterior construcción del concepto, en cualquier fenómeno presentado a los alumnos. Lo importante en esta organización es que los alumnos entren en contacto con el quehacer matemático en una actividad organizadora de matematización, asumiendo que "matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma" (Freudenthal, 1973, p. 44).

La idea central de la Matemática Realista es que el aprendizaje de las matemáticas debe nacer y perdurar bajo un contexto de la "vida real" que tenga una amplia generalidad y aplicabilidad, es decir, que sean pensadas para ser útiles, no sólo en el instante de una clase, sino a lo largo de la vida. De esta manera se busca generar conocimientos que estén disponibles cuando sean necesarios, en palabras de Freudenthal (1991, citado por Gravemeijer y Teruel, 2000), las matemáticas debieran ser enseñada por matematización, donde "hacer matemáticas" sea una actividad centrada en el proceso y no en el producto, que sea un asunto matemático centrado en nuevas ideas, propias o de los demás, que permitan ser mejor comprendidos los problemas de la realidad.

Bajo este principio, Freudenthal consideró la matematización como el proceso clave en la educación matemática por tres razones, la primera porque es la principal actividad de los matemáticos, la segunda porque promueve la familiarización de la vida diaria de los estudiantes con un enfoque matemático y la tercera porque se relaciona directamente con el proceso mediante el cual se formalizan las intuiciones informales, la reinvención (Cobb, Visnovska y Zhao, 2008).

Ahora bien, la idea de matematizar que maneja Freudenthal se contrapone por completo con las primeras teorizaciones de Chevallard (1985). La teoría de la transposición didáctica de Chevallard planteó que la enseñanza de las matemáticas debe partir del conocimiento experto (saber sabio), que debe ser adaptado y simplificado para que pueda ser comprendido por los alumnos (saber enseñar y saber enseñado),[3] de manera entonces que la matemática realista es contraria de esta idea puesto que plantea lo contrario, pretende que los alumnos se aproximen a situaciones reales, más que a la vida real a una experiencia real donde no se hacen problemas sino que se "encuentren problemas", se trata de alejarse de la idea de transmitir matemáticas pre-construidas por los alumnos para crear oportunidades donde se permita desarrollar actividades similares a las de los matemáticos.

La enseñanza de las matemáticas a través de la matematización también deja de lado la idea de las "matemáticas modernas y/o tradicionales" en las que el alumno se enfrenta a un concepto matemático por medio de una simulación de problema. Para Freudenthal, la matematización es una forma de organizar la actividad en sí misma, que lleve de alguna manera a simbolizar ese proceso y así acuñar la idea de "hacer más matemáticamente" y matematizar la realidad de todos los días, es decir, "lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemática como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas" (Freudenthal, 1983, p.7). Esto es, matematizar no es una actividad que se haga sólo en temas de la realidad (experiencia real), sino que también se hace sobre los mismos temas matemáticos, es decir, en las matemáticas aplicadas y las matemáticas puras.

Freudenthal (citado por Gravemeijer, 2000, p.4) usó la palabra "matematizar" en un sentido amplio, para él es una forma de organización que también incorpora la disciplina matemática" y *hacer más matemáticamente*, bajo la idea de matematización, se refiere al momento en que respondemos a un fenómeno mediante su organización, pero debe ser una

[3] En las teorizaciones posteriores de Chevallard, con la creación de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la vieja idea del saber sabio-saber enseñado se modificó para dar lugar a las "praxeologías" como actividad en la enseñanza.

organización matemática que responda a las características de las matemáticas que se tornan como estrategias de la matematización, a saber, generalidad, certeza, exactitud y brevedad (Gravemeijer 1194; Treffers 1987).

- Generalidad: generalización (observar analogías, clasificar, estructurar)
- Certeza: reflexionar, justificar, probar (elaborar conjeturas)
- Exactitud: modelizar, simbolizar, definir (validez)
- Brevedad: simbolizar y esquematizar (procedimientos estándar y notaciones)

Con lo anterior, podemos asumir que matematizar se refiere tanto a los objetos matemáticos como a los temas de la realidad, empero debemos puntualizar un proceso que no puede romperse, Freudenthal hizo especial énfasis en que los niños no pueden matematizar las matemáticas en un principio, debido a que no corresponden a su experiencia real, entonces primero se debe matematizar la realidad de todos los días y una vez que pasen por este proceso, los procedimientos utilizados pasarán a formar parte de la realidad del alumno y es hasta entonces que se podrán matematizar conceptos, estructuras y sistemas matemáticos, es decir, es hasta después de matematizar su experiencia real que podrá matematizar la matemática.

Para comprender mejor esta idea, Treffers (1987) hizo una distinción entre matematización horizontal y vertical. La matematización horizontal implica convertir un problema de la vida real en uno matemático, por ejemplo cuando al alumno se le plantea el problema "Para el día del niño mi padre me regaló una bicicleta de $1800, si la ha pagado $2/6$ de ella ¿Cuánto ha pagado?" Lo primero que hace el alumno es convertirlo en un problema matemático donde el sentido común lo lleva a plantear la operación $2/6$ de 1800, es decir $2/6\, x\, 1800$, con ello ha convertido el problema real en un modelo matemático, ha realizado la matematización horizontal.

Por su parte, la matematización vertical es el momento en que se crean, recrean y manipulan los símbolos (mecánica, reflexiva y comprensivamente), siguiendo el ejemplo anterior, la matematización vertical aparece cuando el alumno comprende la propiedad multiplicativa de las fracciones, generaliza la operación y comprende las notaciones convencionales en ése y otros conceptos. Y una vez que termina esto, recupera sus resultados para llevarlos nuevamente al problema real. Con ello se resalta una idea fundamental de Freudenthal (1991) en la que declara que "la matemática comienza y permanece en la realidad", esto es, cuando un concepto se mezcla con la interpretación y la experiencia sensible, señala este mismo autor, se vuelve parte del sentido común porque el aprendizaje no es estático, sino que crece y es afectado por esos mismos procesos de aprendizaje.[4]

Un aspecto más de la matematización es la relevancia que tiene en relación con el trabajo grupal que debe desarrollarse. Freudenthal (1983,1991) estaba convencido de que la educación matemática debía ser heterogénea porque "los niños trabajadores y los flojos pueden mejorar en colaboración", en el momento en que se comparten las ideas acerca del método de solución del problema existe la posibilidad de que haya cambios en el método propio a partir de la experiencia de los demás o viceversa, de esta manera presentar una variedad de métodos de solución en diferentes niveles puede ayudar a encontrar ventajas y desventajas sobre el propio método, lo que sería un avance en el aprendizaje.[5]

2.1.2. De la Fenomenología a la Enseñanza

La enseñanza de las matemáticas planteada por Freudenthal nace como una contrapropuesta a las "matemáticas modernas" que hacían mucho eco de la teoría de conjuntos. A diferencia de éstas, en la perspectiva realista aprender el resultado de las matemáticas ya hechas es anti didáctico (Freudenthal, 1993) y puede considerarse como una acción vacía de significado para el alumno que recibe la información, puesto que esta acción no corresponde con su realidad, al contrario de esto la EMR plantea que hay que aprender a hacer matemáticas como una actividad humana que tiene como resultado a las mismas matemáticas. Es decir, de lo que se trata es aprender el proceso de la actividad en sí misma.

En este sentido Gravemeijer (2000) apunta que las matemáticas deben ser enseñadas como proceso de matematización, como una forma de organizar la realidad y la misma disciplina matemática, se trata de hacer más matemáticamente pues "la matemática como actividad humana es una actividad de resolución de problemas, de ver los problemas, pero es también una actividad de organización de una disciplina" (Gravemeijer, 2000, p.3). De manera entonces que se debe tratar la propia actividad matemática como materia prima para la reflexión que implica

[4] Estos aspectos relativos a la matematización serán analizados en apartados posteriores.
[5] Esta idea es muy similar a la que desarrolla Brousseau en el tipo la situación a-didáctica de validación.

no sólo temas de la realidad, sino también temas matemáticos, por ello, ante esta idea surge la incógnita ¿cómo estructurar una educación matemática en la que convergen la realidad y la matemática misma?

De acuerdo a Freudenthal (1983), la respuesta se encuentra en la amalgama que forman la reinvención guiada, la matematización progresiva (Treffers, 1987) los niveles de procesos de aprendizaje (Van Hiele) y la "fenomenología didáctica" (Freudenthal, 1983), todos como ideas nodales que sustentan esta corriente didáctica.

2.1.2.1. La Reinvención Guiada

En la Educación Matemática Realista la reinvención guiada es pensada desde dos ángulos, el primero corresponde a los principios que se desarrollan dentro de la misma y el segundo que es el que trataremos en este apartado, está encaminado a las ideas de integración entre los objetivos en la relación de las matemáticas como actividad humana y la manera cómo esta actividad produce matemáticas. En un primer momento trataremos de abarcar las nociones elementales que permitan comprender la idea principal y posteriormente, al abordar los principios, analizar más profundamente el concepto de reinvención guiada.

Para identificar, comprender y describir el proceso de aprendizaje en el cual debería estar inmerso el alumno para que pueda "encontrar" la matemática con la cual intenta responder a un proceso organizado por el docente, debemos advertir que Freudenthal (1973) habló de ese proceso como un desarrollo curricular que comienza con un experimento pensado, imaginado y guiado, mediante el cual el alumno debe llegar a la producción de una solución personal. En ese contexto, la intención de la reinvención guiada está centrada tanto en la corriente de enseñanza como en el aprendizaje, en la enseñanza se plantea la idea de dar a los alumnos la oportunidad de crear su propio bagaje de conocimientos matemáticos desde las bases de su propio aprendizaje, con la intención de que vean el conocimiento que adquieren como algo suyo, como un conocimiento del que ellos son responsables, con ello se pone en juego la idea de "realidad" mencionada en el apartado anterior.

Hablar de reinvención guiada entonces significa hablar de dos procesos, el primero tiene que ver con el concepto de "reinvención" pues uno de los propósitos es que el estudiante sea capaz de reinventar las matemáticas a partir de las situaciones de enseñanza con las que está interactuando. El segundo tiene que ver con el carácter de “guiada”, acción que le corresponde al docente, quien, como el nombre lo dice, debe guiar al alumno en ese proceso de reinvención, Freudenthal (1991) se refirió a ese proceso subrayando la similitud entre el método socrático y el “experimento pensado” puesto en marcha por el docente. Una parte del experimento pensado consiste en anticipar las reacciones de los alumnos y otra corresponde al diseño de un curso de acción que apunte a las reacciones previamente pensadas de los alumnos (Gravemeijer, 2000).

En resumen, podemos decir que la reinvención guiada no sólo se asemeja al método socrático en la búsqueda de nuevas ideas, también consiste en un modelo de planificación de posibles trayectorias de aprendizaje que tiene en cuenta las acciones a desarrollar para que el aprendizaje (como proceso de reinvención) sea posible, además de anticipar la actividad mental del alumno. Se trata entonces de guiar (bajo un plan estructurado) la reinvención de los alumnos (de un concepto bajo la idea de matematización).

2.1.2.2. Matematización Progresiva y Niveles en el Proceso de Aprendizaje

La reinvención guiada, entendida desde el punto de vista del profesor, se complementa con el punto de vista del alumno quien la experimenta como una “matematización progresiva” (Treffers, 1987), lo que quiere decir que “los alumnos deben comenzar a matematizar un tema de la realidad. Luego deben cambiar a analizar su propia actividad matemática.” (Gravemeijer, 2000). Esta idea de matematizar gira en torno al objetivo de hacer más matemáticamente con la intención de organizar un fenómeno de la realidad que nos permita llegar o no a la simbolización, y así organizar (matematizar) tiene su importancia en la actividad misma –proceso- y no en el producto. Entenderemos matematizar como el “proceso de trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos” (Alsina, 2007).

Como lo mencionamos, cuando se matematizan los fenómenos con los que se involucra el alumno comienzan a tener sentido y se unen a un bagaje de conocimientos que le permiten avanzar hacia nuevos saberes, este proceso es llamado matematización progresiva, nace y se sustenta en la idea de niveles de los esposos Van Heile. En la matematización progresiva se debería comenzar en el primer nivel con una exploración fenomenológica de los aspectos reales de conceptos y estructuras matemáticas y desde allí continuar lentamente hasta las operaciones formales en el segundo nivel y entonces avanzar con el tercero donde se supera la referencia del contexto y surgen aspectos generalizables del mismo dando así una primera idea para un marco de la teoría educacional (Santamaría, 2016). De esta manera, con la matematización progresiva se aprecia una clara divergencia entre la educación matemática tradicional que inicia en el tercer o segundo nivel, mientras la EMR parte del nivel uno, es decir, de la matematización horizontal que transita hacía la matematización vertical.

De lo que se trata entonces es de provocar la transición de “operador” a “objeto” , es decir, el procedimiento que utiliza el alumno, en determinado momento, se convierte en objeto mismo, tal como este proceso se da en la historia de las matemáticas, donde la acción de matematizar va creando y transformando los objetos mentales de los sujetos por unos más complejos que tienen su base en los anteriores y es en este cambio que Freudenthal incorpora la noción de “modelos” que se retomará con mayor profundidad en apartados posteriores.[6]

Ahora que, es importante señalar que para que pueda generarse la matematización se debe involucrar a los estudiantes en situaciones imaginables y comprensibles para ellos, situaciones donde puedan organizar o estructurar la realidad a partir de los fenómenos en torno a un objeto mental que les permita acceder a conocimientos matemáticos formales (González, Panilla), es en este sentido que nace una metodología para la investigación y/o la enseñanza a la cual Freudenthal (1985) denominó fenomenología didáctica.

2.1.2.3. La Fenomenología Didáctica. Una Metodología para la Investigación

Como la planteó Freudenthal (1983), la fenomenología didáctica se compone de una serie de fenomenologías que son importantes desde el punto de vista de la didáctica aunque sólo una de ellas se clasifique como didáctica. La fenomenología específicamente didáctica es la que se desarrolla en el aula y que permite, mediante la reinvención guiada y la matematización progresiva, que los alumnos adquieran un conocimiento matemático. Sin embargo, para preparar esa fenomenología didáctica es preciso echar mano de otras fenomenologías (pura, genética e histórica), analizar los tipos de fenomenologías nos permitirá tener un panorama más amplio de lo que podría suceder en el salón de clases porque el análisis fenomenológico nos permite organizar la enseñanza.

[6] La transición de operador a objeto o de procedimiento a objeto también es un fenómeno que estudió Regine Douady en su teorización sobre “La dialéctica instrumento-objeto. Juego de marcos”.

Para Freudenthal el análisis fenomenológico "de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlo en su relación con los fenómenos para los que fueron creados y a los que han sido extendidos en el proceso de aprendizaje de la humanidad y cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de la generación de jóvenes es una fenomenología didáctica" (1985, p. 9). Es decir, la EMR encuentra en la fenomenología didáctica no sólo una teoría, sino también una metodología para enseñar matemáticas. En la Tabla 1 podemos observar las diferentes fenomenologías que podrían o deberían analizarse para diseñar una investigación.

Tabla 1

Análisis Fenomenológico

Tipología de fenomenología	
Fenomenología "pura".	Son los fenómenos que están organizados en las matemáticas, tomadas en su estado y su uso actual.
Fenomenología didáctica.	Son fenómenos presentes en el mundo de los alumnos, que se proponen en las secuencias de enseñanza.
Fenomenología genética.	Son fenómenos que se consideran respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices.
Fenomenología histórica.	Son los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos

Nota. Tomado de Puig, 1997

Como metodología de investigación, al describir "…una fenomenología didáctica uno puede pensar que debería estar basada en una fenomenología genética, pero esta idea es errónea…" (Freudenthal en Puig, 1997) porque la fenomenología didáctica propone la búsqueda de contextos y situaciones que requieren ser organizados matemáticamente (Puig, 1997), y desde la EMR, se piensa que las dos fuentes principales de esta búsqueda son la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes, de esta manera se conjunta la fenomenología pura (análisis de conceptos, estructuras), la histórica (análisis de cómo se produjeron, se adquirieron o se extendieron los conceptos), la didáctica (análisis de las relaciones entre los procesos de enseñanza aprendizaje en el desarrollo educativo) y termina en todo caso con una fenomenología genética no focalizada porque no responde a un proceso cognitivo aislado previamente estructurado, sino que se considera al fenómeno con relación al desarrollo cognitivo del alumno.

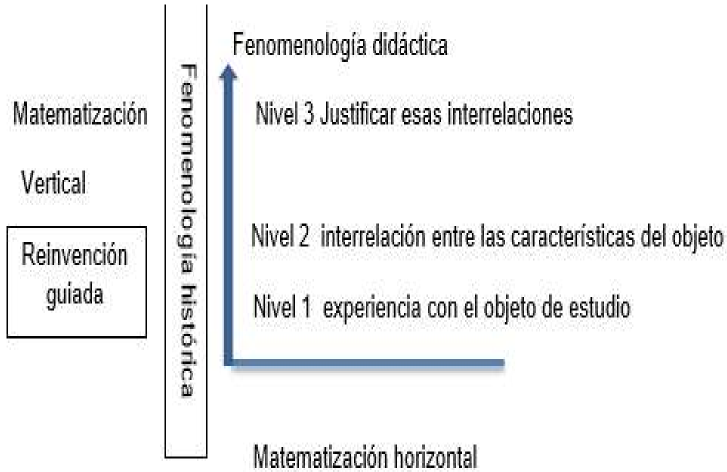
Esta idea Freudenthaliana discrepa de la educación tradicional que se focaliza en los resultados, en el producto (conjunto de saberes adquiridos) y que tiene como una de sus bases a la teoría psicogenética de Piaget que enfatiza el estado cognitivo del aprendiz, pero deja desprotegido el ámbito del aula, el proceso (desarrollo educativo). Al contrario de esta idea, la EMR realista invita a reemplazar la visión del alumno como receptor pasivo de una matemática prefabricada, por la de un sujeto que participa, junto con otros, en la organización matemática de fenómenos imaginables (Bressan, 2004).

Así las cosas, el objetivo de una investigación desde la perspectiva de la fenomenología didáctica, en tanto metodología de investigación, es encontrar situaciones problema con las cuales se puedan generalizar situaciones para abordar la enseñanza de un determinado objeto matemático, y también encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Desde esta perspectiva entonces, se asume que encontrar fenómenos que puedan ser matematizados nos permite comprender la manera cómo fueron inventados, creados o construidos (Gravemeijer, 2000). En la figura 11 podemos analizar la relación que existe entre estas tres nociones que articulan la educación matemática vista desde Freudenthal (ver Figura 11).

Siguiendo con el análisis, podemos ver que la actividad en un nivel está sometida a análisis en el siguiente nivel, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel (Santamaría, 2016), es decir se sustituye el objeto mental por un nuevo objeto mental que contiene al concepto creado por la definición que es compatible con él, al menos provisionalmente. Es precisamente esa idea que se presenta en la Figura 11, cuando se está en el nivel 1 se entra en la matematización horizontal que plantea una experiencia directa con el objeto a través del fenómeno a organizar, al subir al nivel 2 y 3 el objeto (ya evolucionado) se torna objeto mental del siguiente y entra en una matematización vertical donde el concepto, bajo una fenomenología histórica y presentado bajo la fenomenología didáctica, entra en una fase de reinvención por parte del alumno y guiada por el docente; es todo un proceso de creación que necesita tiempo para lograr su cúspide, la cual luego será la base para un nuevo proceso.

Figura 11

Relación entre fenomenologías



Nota. Tomado de Santamaría (2016)

2.2. NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS

El proceso de la enseñanza-aprendizaje responde a procesos de índole social que se complementa con aspectos de índole cognitivo, que nos lleva a un saber y hacer matemáticas. Así encontramos aportes ligados a interacciones sociales como las "normas sociomatemáticas" (Cobb y Bauersfeld, 1995; Yackel y Cobb, 1996) y el "contrato didáctico" en la Teoría de Situaciones didácticas de Brousseau (1986).

Dentro del contrato didáctico se espera que los alumnos y docente encuentren una forma de relacionarse para alcanzar cierto aprendizaje.

Al analizar la fenomenología didáctica como una metodología de enseñanza-aprendizaje y la interacción entre el docente-alumno, debemos reconocer en ella las normas sociomatemáticas que la rigen para desarrollar un proceso didáctico en la construcción de un conocimiento matemático.

En el proceso de enseñar matemáticas se ponen de manifiesto las interacciones que hay entre profesor-alumno, las cuales no se dan de manera casual sino que están regidas por "obligaciones" o normas no explícitas que cada uno debe cumplir (D'Amore, Font y Godino, 2007), son normas sociales (que suceden en una micro-cultura de aula) que responden a cualquier disciplina. Hablando específicamente de las matemáticas, las normas sociomatemáticas responden a una retórica matemática y regulan las argumentaciones influyendo en las oportunidades de aprendizaje, es decir, las normas sociales se convierten en normas sociomatemáticas porque hacen referencia a lo que es “matemáticamente aceptable” (Yackel y Cobb, 1996).

Las normas sociomatemáticas, como el contrato didáctico de Brousseau, son las reglas que debieran seguirse en la implementación del proceso de estudio de las matemáticas para lograr un verdadero aprendizaje (Brousseau, 1986). Es decir, existe un proceso de negociación, que como en cualquier contrato, establece cuáles son nuestras obligaciones específicas (y recíprocas) dentro de una fase didáctica o a-didáctica que debieran originar un conocimiento, y mejor aún un metaconocimiento, en este sentido se busca que cuando el alumno se encuentra ante un fenómeno que organizar pueda ser consciente de las obligaciones que tiene para alcanzar un conocimiento y, a la par, reconozca las que el docente tiene para lograr dicho objetivo siendo el contrato estipulado una forma de relacionarse con el mismo objeto matemático. En esta dinámica de normas sociomatemáticas debe ponerse el énfasis en la relación asimétrica que se desarrolla entre profesor y alumno (de la cual ambos son conscientes), pues cada uno tiene un lugar específico que los lleva a determinar acciones y a realizar una intervención legítima en la parte que es específica del contenido, el conocimiento matemático pretendido en ese momento.

Tanto en contrato didáctico como en las normas sociomatemáticas (interaccionismo simbólico) las negociaciones se dan en el seno de la clase y son las prácticas (comportamientos) del profesor y los alumnos las “que se construyen interactivamente en el grupo” (Yackel; Cobb, 1996), por ejemplo, con la idea de hacer algo matemáticamente diferente, el docente pide procesos de solución diferentes y los alumnos son capaces de ofrecerlos y mejor aún, de identificar similitudes y diferencias para un mejor aprendizaje matemático; cumpliendo cada uno un rol específico en la interacción (norma sociomatemática).

Sobre las normas sociomatemáticas, en el enfoque ontosemiótico (EOS) hay varias perspectivas que nos permiten conocer no sólo las reglas del juego, sino también su preparación y evaluación. Nos referimos al hecho que dentro de la EOS se integran varias nociones referidas a las normas bajo el nombre de “normas epistémicas” que forman parte de una “dimensión normativa de los procesos de estudio” (D'Amore, Font y Godino, 2007) y nos permiten reestructurar y re-direccionar las acciones de los agentes involucrados en un proceso de enseñanza-aprendizaje bajo las “normas” que a cada uno competen. Las dimensiones normativas tienen dos direcciones complementarias, por momentos y por facetas:

Por momentos:

- Diseño curricular
- Planificación
- Implementación
- Evaluación

Sobre las dimensiones normativas se dice que no sólo hay que poner en relieve las normas cuando existe la interacción profesor-alumno (implementación), sino que parten desde el momento de la planificación y continúan dentro de la evaluación del proceso educativo, asimismo están presentes también en la fase de diseño curricular donde se configuran los significados (por medio de los programas) de referencia que orientan y condicionan los significados pretendidos, implementados y evaluados.

Por facetas:

- Epistémica: el trabajo del profesor en relación con el saber matemático.
- Cognitiva: el trabajo de los estudiantes con relación al saber matemático.
- Interaccional: la interacción docente-discente y discente-discente.
- Mediacional: el uso de los recursos tecnológicos y temporales.
- Afectiva: la afectividad de las personas que intervienen.
- Ecológica: la relación con el entorno (sociocultural, político, laboral…) en el que se desarrolla el proceso de instrucción.

Las facetas dentro de las dimensiones normativas nos permiten encontrar no sólo la relación docente-alumno dentro del proceso de estudio de las matemáticas, sino también se habla de otros aspectos que se ven involucrados, como la relación con el saber matemático y entre los mismos alumnos que permiten lograr con éxito la actividad matemática en el aula.

Al observar y analizar las dimensiones normativas del EOS podemos encontrar la justificación de la fenomenología didáctica como metodología, porque se ponen de manifiesto los momentos y facetas por las que debe atravesar la enseñanza, empero bajo los principios de la EMR se cristalizan estas normas sociomatemáticas que determinan y regulan los contenidos matemáticos y la misma actividad matemática. La idea de justificar los principios dentro la EMR (sobre todo los que tienen que ver con la enseñanza) es propia de un enfoque ontosemiótico, ya que es en él que se habla del conjunto de normas que determinan la actividad matemática desarrollada dentro de una institución, es decir de las "normas epistémicas ". Así, "las normas epistémicas regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situación adecuada para su aprendizaje, las representaciones que se utilizan, las definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos." (D´Amore, Font y Godino, 2007, p. 58), es decir organizan y determinan las prácticas matemáticas que ellas mismas posibilitan, incluidas las relacionadas con el alumno (cognitivas).

2.2.1. Principios de la EMR

Para comprender mejor el sentido de la Educación Matemática Realista dentro de un marco de enseñanza-aprendizaje (normas sociomatemáticas), Bressan et al. (2004) menciona los principios en los cuales se fundamenta esta teoría, a saber: principio de actividad, principio de realidad, principio de reinvención, principio de niveles, principio de interacción y principio de interconexión (estructuración).

La intención de enmarcar estos principios tiene que ver con reconocer "cómo" llevar a cabo la EMR conforme a todas sus características y además, nos servirá como guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje (como norma sociomatemática) porque cada uno de esos principios encuadra las situaciones ya sea en el marco de aprender o enseñar. Como se puede ver en la siguiente tabla sin intención de pensar que pueden funcionar de manera aislada, hemos separado los principios que responden a la idea de enseñanza (en interacción con el alumno, objeto de saber o cultural) y los relacionados con el aprendizaje (de forma personal y en pares) (ver Tabla 2); posterior a esto se presenta la descripción de cada uno y a la par de la manera como se fusionan para dar sentido a la EMR.

Tabla 2

Principios de la EMR

Enseñanza	Aprendizaje
● Principio de realidad ● Principio de interconexión ● Principio de reinvención	● Principio de actividad ● Principio de niveles ● Principio de interacción

Nota. Elaboración propia.

2.2.1.1. Principio de Actividad

Uno de los principios fundamentales de la EMR es considerar a la educación matemática como una actividad humana, y como toda actividad se aprende haciéndola, por eso su primer principio gira en torno a la idea de matematizar (el proceso es mejor que el producto), desde éste se pretende que en la enseñanza se aborden críticamente problemas de situaciones cotidianas para poder organizar el entorno que nos rodea e incluso la propia matemática. “Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma (hecho que caracteriza de inversión antididáctica” (Freudenthal, 1983 citado por Bressan et at., 2004, p.3.), es decir, las matemáticas son concebidas como una actividad de procesos (matematización) no de trasmisión de conocimientos o procedimientos.

Para Freudenthal (1991) el énfasis no debe ponerse en aprender algoritmos, sino en el proceso de algoritmización, no en el álgebra sino en la actividad de algebrizar, no en las abstracciones sino en la acción de abstraer. No se trata de dar a conocer la “operación de la suma” sino todo el proceso que implica saber utilizarlo “se trata de posibilitar el acceso a estos conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones problemáticas que generen la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución.” (Bressan Ana et al., 2004, p.4), es la idea de encontrar soluciones a problemas de situaciones cotidianas.

Sobre este respecto Santamaría (2006) mencionó que el principio de actividad responde a una organización de resolución de problemas, pero también a la actividad de organización de un tema, es decir un asunto de la realidad organizado con patrones matemáticos y que tiene que ser resuelto, pero a su vez también puede ser un tema matemático resuelto por nuevos o viejos conocimientos, propios o de los demás, organizado con nuevas ideas para comprenderse mejor en un contexto más amplio. Se trata de ″matematizar″ tanto la matemática como la realidad.

En la matematización principalmente se involucra la idea de generalizar y formalizar; la primera responde a la pretensión de conectar varias situaciones reconociendo las características similares, lo que permite ubicarlas dentro de un mismo tipo, así la generalización toma forma de una actividad de organización, es decir de matematización; en la segunda se trata del cambio de un lenguaje cotidiano por el lenguaje formal de las matemáticas en el cual desaparecen las referencias a las situaciones dinámicas para describir situaciones estáticas, formales; esto es importante dentro de la EMR porque el poder de la actividad está en la reflexión y justificación de la misma.

Un aspecto importante en el principio de actividad que Freudenthal (1982) destacó, es que las matemáticas no son una actividad exclusiva de unos cuantos, sino una actividad para todos –matemáticas para todos-, aun cuando se sabe que no todos los estudiantes llegarán a ser matemáticos. La importancia de esto radica en que los alumnos aprendan a abordar matemática y críticamente los problemas en situaciones cotidianas que así lo ameriten (porque también es necesario saber cuáles no se pueden responder de esta manera) pues "el quehacer matemático es una actividad estructurante u organizadora de matematización que está al alcance de todos los seres humanos" (Freudenthal, 1973, p. 14).

Las matemáticas tienen un valor educativo en la medida que permiten organizar esferas de nuestro entorno social y cultural, no sólo desarrollando competencias matemáticas sino también actitudes de toda clase como morales, sociales, emocionales, religiosas y cognitivas. De esta manera se convierte no sólo en una actividad matemática, sino de un ser humano.

2.2.1.2. Principio de Realidad

Matematizar la realidad es una forma de organizarla para comprenderla matemáticamente, por lo tanto el aprendizaje debe también organizarse en esa realidad, lo cual origina nuestro segundo principio. Hablar de realidad implica algo más que el significado que la palabra evoca, mundo real o existente, en esencia se habla de que cuando se le plantean al alumno situaciones para que matematice deben ser también realizables, imaginables y razonables para que él se sienta capaz y atraído de producir un conocimiento "útil", se trata de “presentar los problemas de modo tal que los alumnos puedan imaginar las situaciones en cuestión” (Bressan Ana, Zolkower Betina, Gallego Ma. Fernanda, 2004, p.5), para que se sientan atraídos (porque pueden imaginarlo y visualizarlo) y así sean capaces de utilizar sus herramientas informales a través del sentido común para intentar organizarlas, no se trata de limitarnos a un mundo físico sino también a lo imaginable.

En este sentido, la matematización puede verse como una actividad mental reflexiva que permite resolver problemas razonables e imaginables, es decir la matematización tiene una conexión con el mundo real y aquello que es real en la mente del alumno, el énfasis puesto en hacer algo real en la mente del alumno es lo que le da el nombre a la EMR. Sobre el respecto mencionó Freudenthal (1991, p. 17), “…yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en cierto escenario”, es decir, que el alumno pueda imaginar las situaciones en cuestión y que le permitan echar mano de sus estrategias informales para poder organizarlas, entonces depende de su experiencia previa y su capacidad de imaginarlo; y entonces poder visualizarlos.

Para la realización del principio de realidad, la EMR se apoya en la fenomenología didáctica, uno de los principales aliados para lograr sus cometidos, pues se trata de hacer de las matemáticas algo concreto y para que lo sea deben diseñarse contextos significativos para el alumno. La fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983) se encarga entonces de buscar e investigar situaciones (fenómenos) que puedan ser organizadas en torno de los objetos matemáticos que se supone, los alumnos deben construir. “Para encontrar fenómenos que puedan ser matematizados, podemos buscar entender cómo fueron inventados” (Gravemeijer y Terwuel, 2000).

Un aspecto a destacar es que el contexto –real- es algo que permanece dentro del problema, es decir debe considerarse como algo intrínseco y no como algo que pueda eliminarse, pues “el contexto por sí mismo es el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlas” (Freudenthal, 1973) bajo la matematización horizontal; posterior a ello deben buscarse situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución para ver nacer la matematización vertical. Esto va a permitir que los estudiantes trabajen en diversos niveles de conceptualización con base en sus posibilidades y transformarlos en modelos matemáticos (otro principio dentro de la EMR).

La importancia de este principio radica en la necesidad de crear “buenos contextos” de un mundo real, un mundo imaginable de la misma matemática que invite al estudiante a realizar una matematización para organizar su conocimiento, es decir, contar con un contexto rico, significativo y matematizable (Gallegos y Pérez, 2013). “El contexto puede ser la vida cotidiana, cultural, científica, artificial, matemático, etc.” (Jan de Lange, citado por Alsina, 2007).

2.2.1.3. Principio de Reinvención

Uno de los objetivos de la EMR es plantear situaciones con espacios y oportunidades dirigidas para que los estudiantes participen no en un proceso de adquisición o memorización de un concepto, algoritmo o estrategia matemática sino en la reinvención de las matemáticas. Este proceso de reinvención surge al organizar y estructurar situaciones problema en interacción con sus pares y claro bajo la guía del docente.

El principio de reinvención guiada es lo que da la pauta para el avance y la creación de nuevas estructuras matemáticas. Aun cuando la idea es partir de situaciones reales, se trata también de ir adoptando nuevos métodos y mecanismos para responder a dichas situaciones, de lo contrario se vería un estancamiento, por esta razón el sentido común que en un principio ayuda a resolver problemáticas, se cristaliza posteriormente en reglas (como la propiedad conmutativa de la suma) y después ese conocimiento se convierte en el nuevo sentido común formando una base de matemáticas más amplia que le permitirá al alumno situarse ante nuevas reglas.

Cuando existe este proceso de matematización (horizontal y vertical), el alumno puede realizar él solo estas actividades, no hablamos de que el docente le diga cómo hacerlas, nos referimos al hecho de que el docente tiene un papel bien definido como mediador entre los alumnos y las situaciones problemáticas, entre los alumnos entre sí, entre las producciones informales y las herramientas formales ya institucionalizadas (Bressan, 2016). El docente como mediador del aprendizaje de los alumnos debe saber cómo nutrir la reinvención de los alumnos a través de situaciones significativas y a la par debe prever dónde y cómo anticipar las próximas herramientas matemáticas que subyacen al sentido común del alumno. Es decir, durante la reinvención, el docente es quien guía la situación y organiza actividades dentro del aula que den origen al proceso de reinventar para poder lograr los cambios de niveles (conocimientos) que se pretenden. Los alumnos por su parte deben usar su sentido común (tanto el viejo como el nuevo) para enfrentarse a nuevas situaciones y problemas, con ello podrán crear más ideas, lo que enriquecerá y transformará nuevamente su sentido común.

El proceso de reinvención se da al enfrentar problemas que son similares entre ellos, un problema afín a otro ya realizado permite que los alumnos hagan la transición entre un lenguaje informal a uno formal y estandarizado, pero lo más importante de este principio es que ese conocimiento matemático formal puede ser reconstruido para generar uno nuevo, por ejemplo la suma puede sufrir este principio de reinvención y adentrarse en el proceso de multiplicación.

La reinvención guiada como “un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar” (Freudenthal, 1991, p.55) responde no sólo a la participación del alumno que “reinventa” ya sea conceptos u operaciones, sino también a la capacidad del docente para anticipar, observar (y auto-observarse) y reflexionar sobre los aprendizajes de los alumnos a corto y largo plazo, debe conocer las comprensión y los límites de los alumnos para organizar la actividad en el aula, de tal modo que dé lugar a esta reinvención y a los cambios de nivel que pretende lograr con dichas comprensiones.

El rol del docente se vuelve crucial en este escenario, pues no sólo debe encargarse de diseñar situaciones que ofrezcan oportunidad a los alumnos de generar y usar varias estrategias de solución (forma de organizar), sino que a la par, debe guiar y organizar las situaciones de interacción (vistas de un modo de validación) de tal modo que se aprovechen las contribuciones de los alumnos para hacerlos progresar en sus conocimientos matemáticos; haciendo esto un proceso cíclico de creación y apoyo en el proceso de reinvención de los alumnos.

2.2.1.4. Principio de Niveles

La matematización es una actividad que primero se hace sobre la realidad y luego sobre la propia actividad matemática, es decir la matematización es una actividad progresiva (Treffers, 1987) en la que el alumno va del conocimiento in-formal, al pre-formal y de ahí al formal, todo esto se vuelve fundamental para poder distinguir entre dos tipos de matematización, la horizontal y la vertical, las cuales se convierten en parte fundamental del principio de niveles.

La matematización horizontal es aquella que nace en un problema contextual, con uso de estrategias vinculadas totalmente se convierte, mediante los otros principios, en una problema matemático (mediante métodos informales o pre-formales), para ello intervienen elementos básicos pero indispensables, como la intuición, el sentido común y su experiencia, es decir, matematizar horizontalmente es convertir un problema contextual en un problema matemático (Treffers, 1987, citado por Santamaría, 2006).

En un plano diferente, pero junto la anterior, se ubica la matematización vertical que es la actividad sobre la matemática misma que lleva a la formalización de lo matemático mediante la reflexión y esquematización (Freudenthal, 1991), es decir en este caso el proceso de reorganización se da dentro del mismo sistema matemático donde hay una relación con fórmulas, probar regularidades, integrar modelos; es tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción logrando mayores niveles de formalización matemática (en relación con los puntos de partida de los estudiantes).

En síntesis, la matematización horizontal significa reconocer los escenarios "reales" del alumno, por ejemplo al compartir una barra de chocolate con un amigo el alumno se enfrenta al problema de "repartirlo para que les toque igual" o quizá en la situación de repartir 20 canicas con tres amigos se crea la idea de reparto que es resultado de la intuición. Cuando en el primer ejemplo la situación contextual se convierte en ½ (una barra entre dos) y en el segundo ejemplo se convierte en 20/4 se ha realizado la matematización horizontal. Luego de ella viene la matematización vertical, en ésta el alumno deja de lado el contexto (chocolates y canicas) y entra a una idea matemática donde suma, resta o divide pensando matemáticamente, por ejemplo partir el chocolate en medios o repartir 20 entre 4, no propiamente canicas sino con las cantidades representadas. Convertir el problema contextual en un problema matemático de reparto y, posteriormente, comprender el funcionamiento de la división ayudará a elevar su sentido común (porque ahora forma parte de lo que domina) y lo ayudará a moverse bajo más elementos del mundo de los signos y de las matemáticas mismas.

Con el ejemplo anterior podría entenderse la manera como acciones distintas, matematización horizontal y vertical, trabajan para un mismo fin, pues mediante ellas se espera el desarrollo conceptual de un contenido en el alumno. Veamos otro ejemplo para dejar en claro la conectividad entre ambas matematizaciones; pensemos en una situación donde el alumno se encuentra en "la tiendita" (realidad), él recibe un cliente que compra cuatro galletas de $5 c/u, para saber cuánto deben pagar por las galletas el niño se enfrenta a una situación problema y decide hacer una suma, hasta aquí se vislumbra una matematización horizontal, la compra se convierte en un problema matemático (suma), posteriormente, al entrar a la matematización vertical, el alumno usa el modelo de suma para contabilizar las galletas y reconocer el sistema de multiplicación que le ayudará a mejorar su eficiencia al resolver la suma iterada hasta comprenderlo en otros contextos y posteriormente como una notación convencional (incluso sin contextualizar).

Para Freudenthal (1991) hay una distinción puntual entre la matematización horizontal y la vertical, en la matematización horizontal maneja la idea de ir del “mundo de la vida” al “mundo de los símbolos”, es decir los alumnos trabajan diagramas y dibujos, mientras que en la matematización vertical se mueven siempre dentro de los símbolos matemáticos, es decir el uso frecuente de diagramas se descontextualiza, se desprende de las características del contexto y comienza a funcionar como un modelo para la lógica, esto es un modelo matemático, con ello aparecen propiedades propias de un concepto.

En este proceso de matematización progresiva (de la matematización horizontal a la matematización vertical), los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión, cuyas etapas permiten observar una transformación interna, esto es, en el nivel de las estructuras cognitivas o mentales. Bajo este supuesto, entendemos que los siguientes niveles de comprensión son dinámicos porque no aparecen en el mismo orden o tiempo en todos los sujetos:

- Nivel Situacional: es el conocimiento de la situación en sí misma, donde el uso de estrategias nace y permanece en el contexto de la situación misma apoyándose en sus conocimientos informales y sentido común (matematización horizontal).
- Nivel Referencial: aparecen modelos, conceptos y procedimientos que esquematizan problemas (representaciones o modelos gráficos); es por esta razón (permanecer en el mismo problema) que se considera aparecen los “modelos de” en tanto están referidos a la situación particular que le dio origen (Bressan, 2016).
- Nivel General: es la exploración, reflexión y generalización de lo que apareció en el nivel anterior. Focalización matemática sobre estrategia que supera referencia sobre contexto, es decir existe una descontextualización y se puede dominar la referencia del contexto y organizar matemáticamente. Los estudiantes concluyen que las estrategias y

procedimientos son utilizables en conjunto de problemas, originando la aparición de "modelos para".

- Nivel Formal: Procedimientos estándares y notaciones convencionales propios de la matemática vinculada con que se está trabajando (contexto).

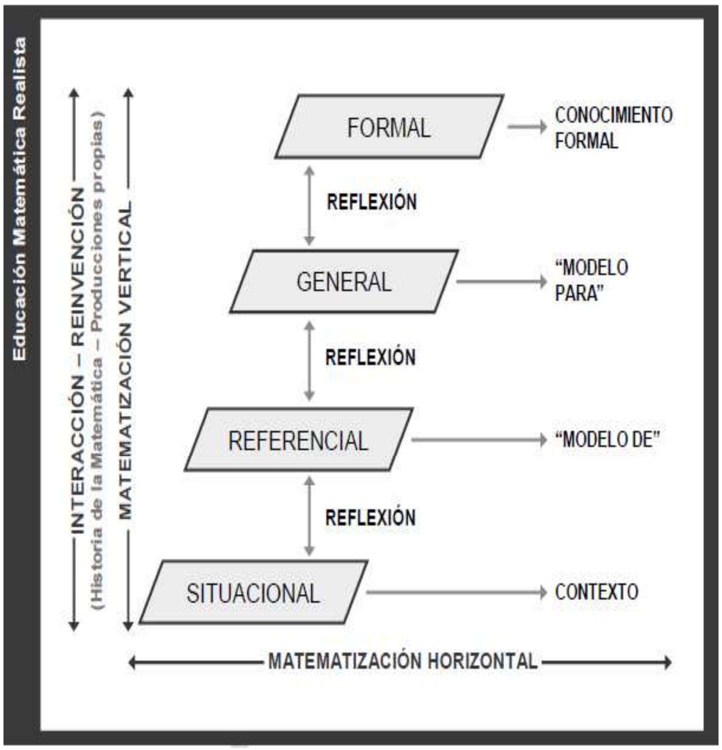
El primer nivel (situacional) corresponde a una matematización horizontal en la que el alumno entra en contacto directo con la situación problema, y con las herramientas que hasta ese momento posee lo enfrenta de la forma más matemáticamente posible; posterior a esto, en los siguientes tres niveles (referencial, general y formal), los alumnos se mueven en un mundo matemático de símbolos y propiedades que lo hacen estar inmerso en una matematización vertical. Al verlo así no queremos decir que sea un proceso cognitivo lineal, sino todo lo contrario, los alumnos pueden transitar libremente de uno a otro nivel de manera dinámica y pueden "brincar" de un nivel a otro siempre que lo necesiten para apoyar su proceso global de aprendizaje.

Como lo señaló Streefland (1991) "comenzando desde la realidad, los alumnos pueden cruzar la frontera a la matemática por sí mismos (…) estructurando el proceso de matematización horizontal. Pero también, sea simultánea o posteriormente, ellos pueden progresar en su tratamiento del material matemático dentro de la matemática misma…" (p.19); la aparición de niveles no convierte el proceso de enseñanza-aprendizaje en algo cerrado, sino todo lo contrario es una dinámica de ir y venir a conveniencia (y necesidad) para usar el material matemático dentro de la matemática misma mostrando así su "matematización progresiva". A continuación, se puede observar la relación entre los niveles (matematización horizontal y vertical), los modelos y otros factores que intervienen en los niveles de comprensión o matematización (Ver Figura 12).

En la figura podemos observar cómo se da la relación entre la matematización horizontal y la matematización vertical junto con los niveles de comprensión, se comienza en relación con el contexto (el fenómeno a organizar) y cómo el alumno entra en una primera interacción con él, lo importante aquí es reconocer que no se pasa de un acercamiento (problemática) a un conocimiento formal de manera abrupta, sino que asciende de manera escalonada (con posibilidades de regresión para mayor solidificación) lo cual permite crear un conocimiento formal mejor estructurado y con significado, al pasar de una contextualización a una descontextualización cuando se lleva a cabo a la par una matematización vertical, la reflexión es parte primordial de estos procesos.

Figura 12

Niveles de Matematización Progresiva



Nota. Tomado de Gravemeijer (2000)

La progresión de la matematización de un nivel a otro se apoya fundamentalmente en modelos, "herramientas de organización y representación de situaciones que ponen de manifiesto los aspectos matemáticos esenciales de la misma" (Gallegos y Pérez, 2013). Los modelos son vistos no sólo como productos pre-construidos (propuestos por docentes) sino que incluyen aquellos modelos que surgen de la actividad matematizadora del alumno. Entre los modelos de la EMR destacan: materiales didácticos manipulables (dinero-collares); situaciones paradigmáticas (subir y bajar pasajeros del bus o caramelos empaquetados en 10-100); esquemas notacionales (tablas de razón o proporcionalidad); y procedimientos simbólicos (algoritmos y fórmulas). El uso de modelos y la reflexión de los mismos son indispensables para avanzar en los niveles de matematización.

2.2.1.5. Principio de Interacción

En la EMR las matemáticas son consideradas como una actividad social y como tal debe dárseles ese rol, es decir los estudiantes deben tener la oportunidad de "mostrar" sus estrategias e invenciones a otros (Santamaría, 2006), para ello debe organizarse una fase interactiva donde sean capaces de explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar con otros para convencer y dejarse convencer acerca de cómo mejorar estrategias.

Al escuchar y observar lo que otros han desarrollado y discutir las distintas maneras de resolver un problema, se les permite tomar algunas de esas ideas para mejorar naturalmente sus estrategias (Santamaría, 2006), lo cual hace de esto un proceso de aprendizaje constructivo donde los métodos informales son base y palanca para desarrollar los conocimientos formales, el hecho de mostrar estrategias e invenciones a otros y que los otros se las muestren a ellos ayuda a todos a tener un nivel más alto de comprensión. Se trata de un "intercambio de ideas" que surge en la resolución de un problema a lo largo de todo el proceso de matematización y no sólo al final como conclusión del proceso de resolución.

El trabajo "entre pares" (interacción horizontal) es una de las formas organizacionales que tiene mejores resultados por el trabajo colaborativo que se da entre grupos heterogéneos, la discusión sobre la resolución e interpretación de las situaciones matemáticas generan mayores frutos por esa misma acción social que el aprendizaje matemático pretende. Compartir experiencias y resultados permite que el principio de interacción sea rico por sí mismo y dado que los problemas se seleccionan de manera que den lugar a soluciones apelando a diferentes niveles de comprensión, todos los alumnos pueden trabajar en ellos.

Un aspecto importante que se maneja dentro del principio de interacción es la idea a "clase completa", significa que más que creer que el trabajo es homogéneo se cree completamente lo contrario y se acepta la heterogeneidad del grupo basado en un trabajo individual, esto quiere decir que en la EMR se intenta mantener al grupo de alumnos juntos -no buscando separarlos en pequeños grupos de trabajo de acuerdo a sus habilidades- y adoptando problemas que puedan ser resueltos en los diferentes niveles de comprensión, entre los distintos niveles de habilidades.

En el marco del principio de interacción también se rescata la importancia del trabajo docente-alumno (como interacción vertical), el docente es clave por el modo en que maneja los eventos dentro de la clase en mira de maximizar oportunidades para la producción, el intercambio y la apropiación por parte de los alumnos (Bressan, 2016). No se trata sólo de encontrar una situación, sino de mantenerse activo durante el proceso de "reinvención guiada" bajo el principio de interacción.

2.2.1.6. Principio de Interconexión (estructuración)

Un aspecto esencial para el desarrollo de la EMR se encuentra en el principio de interconexión donde se enmarca la interacción que existe entre los contenidos de varios ejes y unidades curriculares, de lo que se trata este principio es de no tomar los ejes curriculares como entes separados o aislados unos de otros, "esto implica que los ejes de contenidos de aprendizaje no pueden ser tratados como entidades separadas; el entrelazado de los contenidos de varios ejes de aprendizaje debe ser incluido en las situaciones problemáticas" (Santamaría, 2006, p. 22).

Para la enseñanza de las matemáticas, la Educación Matemática Realista exige una amplia conexión entre comprensión y uso de herramientas matemáticas en situaciones problemáticas, lo que hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones, bajo distintos modelos y lenguajes, para lograr alta coherencia a través del currículo. Con esto nos referimos al hecho de que debe existir libertad para que el alumno utilice las herramientas que considere necesarias ante una situación problema, que sea ingenioso ante problemas de su entorno, pues mientras unos utilizan estrategias del álgebra otro puede inmiscuirse con estrategias geométricas y no es que alguno esté bien o mal, sino que cada alumno busca la manera de resolver un problema de su entorno de una forma cada vez más ingeniosa.

El hecho de permitirle a un alumno desarrollar sus propias estrategias permite analizar un campo más amplio de estrategias, precisamente de eso se trata este principio de no encajonar a los alumnos en un método o idea perteneciente sólo a un eje, sino abrir para ellos la posibilidad de usar cualquiera. Las situaciones realistas deben permitir conectar simultáneamente diferentes contenidos, ejes y herramientas matemáticas en una misma unidad de aprendizaje, lo cual nos llevará a que el alumno pueda matematizar de diferentes modos, bajo distintos modelos y lenguajes. "Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática…" (Freudenthal, 1982).

La interacción debe ser producida para dar mayor coherencia a la enseñanza y posibilitar distintos modos de matematizar las situaciones, respetando la diversidad cultural y cognitiva de los alumnos (Gallegos y Pérez, 2013, p. 18), permitirle al alumno buscar diferentes estrategias de resolución lo llevará a la par de la estimulación de su creatividad para encontrar dichas estrategias.

2.2.1.7. La Didactización, la Actividad del Profesor

Anteriormente hemos analizado los principios bajo los que se rige la educación realista y las normas sociomatemáticas que la guían y permiten crear condiciones específicas y necesarias en el proceso de enseñanza aprendizaje. Sin embargo, antes de terminar nos gustaría agregar un aspecto importante encaminado a la idea del quehacer del docente.

Hemos mencionado que una actividad indispensable por parte del alumno es el de matematizar el mundo real, lo que a su vez tendrá como consecuencia que se involucren principios como el de actividad, niveles e interacción (principios de aprendizaje), sin embargo a pesar de reconocer los principios encaminados a la enseñanza (reinvención guiada, realidad e interconexión) es importante tener en cuenta que la actividad fundamental del docente es realizar didáctica, hacer didáctica, esto es didactizar[7], entendida también como una actividad organizadora que se da tanto a nivel horizontal como vertical (Bressan, 2016).

Horizontalmente los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que emergen en sus aulas observando y auto-observando para poder explicar sus propias prácticas (y las de otros), es decir, se encuentran desarrollando las reglas sociomatemáticas previamente establecidas y con las cuales buscan generar condiciones para el aprendizaje; mientras que verticalmente, reflexionan y generalizan (conexión de varias situaciones reconociendo características similares) a partir de estas situaciones hasta reinventar su propia caja de herramientas didácticas para facilitar la matematización de los estudiantes (Bressan, 2016), asimismo la teoría juega un papel importante con la idea de evolucionar dentro del mundo de la didáctica de las matemática desde una perspectiva realista.

[7] Didactizar supone realizar la actividad organizadora de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje (Gallegos y Pérez, 2013).

2.3. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

La Educación Matemática Realista, desarrollada bajo las ideas de Freudenthal, tiene como precepto principal "hacer más matemáticamente", para lograrlo encontramos un elemento clave en la EMR, la fenomenología didáctica, entendida no sólo como teoría sino también como metodología de investigación y desarrollo educativo.

El capítulo se desarrolló bajo estos dos preceptos con la intención de analizar cómo se desenvuelve dicha fenomenología desde el análisis fenomenológico y la relación con objetos mentales, hasta llegar al punto de reflexionar sobre la manera cómo se debiera llevar a cabo dentro del aula como metodología, con ello se abarcaron en el análisis elementos clave como la reinvención guiada y la matematización progresiva, hasta las normas sociomatemáticas que le permiten generar un ambiente de enseñanza aprendizaje.

Encontrarse con la EMR es encontrar una forma de hacer matemáticas desde la realidad y en la matemática misma a través de fenómenos que despiertan la necesidad de organizarlos para la reestructuración de conceptos por mérito propio del alumno y no como es criticado por la misma teoría, con preceptos prefabricados que buscan ser replicados y no comprendidos, como lo es la matemática moderna. Se trata de un enriquecimiento matemático y didáctico de todos.

III
LA VARA DE KÍA. UNA TEDE PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES

Como hemos mencionado, actualmente las fracciones son uno de los contenidos que generan gran dificultad para su enseñanza y aprendizaje y a pesar de las múltiples investigaciones que se han realizado para buscar maneras de solucionar el problema, los resultados obtenidos no han sido los esperados por lo que sigue siendo un problema latente. Por su escasa comprensión, las fracciones y su proceso de enseñanza son considerados como un proceso con múltiples dificultades, "la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones puede verse como un proceso lleno de fracasos", pues existe insatisfacción respecto a los niveles de comprensión (Cortina, Zúñiga y Visnovska, 2013).

Para buscar alternativas de solución, un grupo de investigadores, hemos decidido experimentar una propuesta metodológica para la enseñanza de las fracciones basándonos en la Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR), se trata de probar un Experimento de Diseño que intenta la enseñanza de las fracciones alejada del significado parte-todo para centrarse en la fracción como medida (longitud). Cabe mencionar que como todo experimento de diseño, el que aquí probamos ya había sido experimentado anteriormente, pero con base en la naturaleza de nuestra perspectiva, cada vez que se experimenta es susceptible de modificaciones luego de la reflexión en colectivo del equipo de investigación.

En capítulos anteriores abordamos las problemáticas y los obstáculos didácticos, epistemológicos y ontológicos de la enseñanza-aprendizaje de las fracciones que han venido creciendo en las últimas décadas, además reflexionamos cómo las ideas de números racionales trabajados hasta ahora en venido repercutido en los resultados desfavorables en el contenido; de la misma manera abordamos cuestiones básicas y conceptos claves que nos ayudarán a entender la EMR y su aparición como teoría de enseñanza.

Por las razones anteriores, en el presente capítulo se presenta un análisis de cómo la teoría de EMR puede realizar aportes a la educación en México, especialmente en lo que se refiere a la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria. A lo largo del capítulo se van entrelazando los principios de la EMR y nuestras ideas sobre una Teoría de la Enseñanza en un Dominio Específico (TEDE) relacionada con la enseñanza de la fracción. La importancia y nuestro objetivo principal es presentar a los docentes una propuesta de intervención que reconozca a las fracciones como un número capaz de cuantificar y no como un número racional, se busca brindar a los docentes herramientas para lograr que las matemáticas se aprendan a través de la matematización y no de la repetición.

Otro apartado de este capítulo versa sobre el trayecto metodológico que hubimos de seguir para analizar algunos resultados de la experimentación porque, cabe señalar, en tanto trabajo de equipo, se han dividido los análisis de la experimentación en dos grandes bloques, en el primero, que realiza otra investigadora, se dará cuenta fundamentalmente de los aprendizajes obtenidos y en el segundo, que es el que da contenido a esta tesis, se analiza la manera en la que los principios de la EMR toman sentido en el aula de clases.

3.1. QUÉ ES LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA Y QUÉ PUEDE APORTARNOS EN MÉXICO

Las distintas teorías que más han influenciado a la educación matemática internacional, en el último medio siglo, quizá la menos conocida en México sea la Educación Matemática Realista (EMR). Las causas de ello nos son desconocidas, pero podemos plantear algunas conjeturas. Es posible que los vínculos académicos que históricamente se han tenido con Estados Unidos, Canadá, Inglaterra y Francia hayan hecho que los educadores matemáticos de nuestro país prioricen las teorías desarrolladas en esos países, dejando marginadas a las de otros lugares. Quizá también, muchos de estos educadores han reconocido en las teorías norteamericanas, inglesas y francesas posicionamientos sensatos y cualidades adecuadas para procurar sus objetivos de investigación y desarrollo educativo.

Como haya sido, el desconocimiento de la EMR ha llevado a que su potencial para guiar esfuerzos de desarrollo y mejora educativa sea poco aprovechado en nuestro país. Los miembros del equipo que experimenta esta propuesta somos de los escasos educadores matemáticos mexicanos que han centrado su trabajo académico en el uso de la EMR. Nuestro objetivo aquí es introducir a los lectores a esta teoría de la educación matemática, explicando sus características principales, y también su potencial para contribuir a mejorar la enseñanza de las matemáticas en México. Lo hacemos tomando como referente principal nuestro trabajo en el campo de las fracciones.

3.1.1. Diferencias y Similitudes de la EMR con otras Teorías Francesas

La EMR es, por sobre todas las cosas, una teoría para el diseño de recursos para la enseñanza de las matemáticas (Cobb, Zhao, y Visnovska, 2008). Esta teoría, empíricamente fundamentada, se edificó sobre las experiencias de trabajo con alumnos, del nivel básico, del matemático neerlandés Hans Freudenthal, y sobre sus reflexiones respecto a cómo debería ser la enseñanza de las matemáticas. Su desarrollo, propiamente, tuvo lugar en el Instituto IOWO (después nombrado Instituto Freudenthal), de la Universidad de Utrecht, en los Países Bajos. Comenzando en el año 1968, la teoría fue desarrollada como una reacción tanto a la enseñanza tradicional en las escuelas neerlandesas (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014) –enfocada al dominio de mecanizaciones para el cálculo– como a las propuestas de reforma, predominantes en este momento, en las cuales se consideraba que las matemáticas modernas debían servir de base para definir todos los contenidos de la enseñanza de esta disciplina (Freudenthal, 1968).

Como teoría para guiar el diseño, la EMR tiene coincidencias y diferencias con las ideas y principios que han guiado la formulación de innovaciones educativas para la enseñanza de las matemáticas, en México, en las últimas tres décadas, e incluso antes. Nos referimos a ideas y principios que han sido retomadas, principalmente, de la teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (2007). Sin embargo, aclaramos que en este capítulo aludimos a la teoría de Brousseau con el propósito de ofrecerle al lector un punto de contraste que le ayude a entender mejor a la EMR. Nuestra intención aquí no es, en modo alguno, desarrollar un análisis comparativo de las dos teorías.

Un primer fundamento que comparte la EMR con las orientaciones que han guiado el diseño didáctico en México es entender al aprendizaje matemático como necesariamente el resultado de la actividad de los alumnos. Esta idea, comúnmente asociada al término *constructivismo* (Waldegg, 1998), es central en la EMR, como también lo ha sido en todas las propuestas oficiales para la enseñanza de las matemáticas, al menos desde 1993.

Una segunda coincidencia importante entre EMR y los principios que han guiado el diseño didáctico en México es que se reconoce que la enseñanza exitosa de las matemáticas requiere, necesariamente, de la ejecución de tareas que son complejas y que demandan, de parte de los docentes, habilidades y conocimientos que no son fáciles de desarrollar. Esta forma de entender a la enseñanza de las matemáticas ha estado presente en las propuestas de reforma en México, al menos desde 1993, y es central en la EMR.

En cuanto a las diferencias, una muy importante tiene que ver con la manera cómo se enmarca el gran objetivo de la enseñanza matemática en la educación básica. En otras palabras, con qué es que se espera que logren los niños al aprender matemáticas. Al igual como ha sido predominante a nivel global, en el diseño de innovaciones didácticas en México aprender matemáticas ha implicado, esencialmente, que los educandos adquieran los saberes de esta disciplina. En contraste, en la EMR, se considera que todo conocimiento matemático está estrechamente relacionado a un quehacer, tanto así que es parte central del mismo (Treffers, 1987). Consiguientemente, en la EMR se busca que el aprendizaje de las matemáticas implique siempre el aprendizaje de una práctica, en la que ciertos conocimientos matemáticos específicos ocuparían un papel central.

Freudenthal (1973) consideraba a las matemáticas como una actividad humana que implica, sobre todo, a la matematización. Esta última se entiende como la organización de campos de vivencia, en la que los medios para organizar un nivel inferior se convierten en la materia del nivel superior.

Otra diferencia implica al papel que se espera que jueguen las matemáticas académicas en el diseño. La reforma educativa de 1973, en nuestro país, comprendió un cambió profundo en el currículo matemático de la educación básica. Dicho de manera sucinta, la materia de aritmética y la geometría fue sustituida por la de matemáticas. Este cambio respondió a una tendencia global, en la que se buscó introducir a todos los estudiantes a los conocimientos utilizados por los matemáticos de la actualidad; nos referimos al “movimiento de las matemáticas modernas” (Kilpatrick, 2012). La expectativa sobre el papel que deben jugar estas matemáticas no ha sido la misma en las reformas posteriores. A pesar de eso, se sigue considerando a las matemáticas académicas como un referente clave para la definición de los contenidos a ser aprendidos en la educación básica (Ma, 2013).

En la EMR, se considera que las matemáticas de la actualidad son el resultado de un largo proceso histórico, en el que las ideas han ido siendo matematizadas para generar conocimientos matemáticos cada vez más formales, generales y abstractos. La ruta que se propone para que los alumnos logren comprenderlas implica guiarlos por un proceso análogo al que siguió la humanidad. Este proceso, necesariamente, tendrá que ser mucho más acotado y directo, pero de todos modos relativamente largo. Simplemente dicho, el proceso ha de comenzar siempre por matematizar lo real. Después las matematizaciones utilizadas serán matematizadas, para avanzar hacia conocimientos cada vez más generales, robustos y apartados de la realidad empírica. En esta teoría para el diseño, las matemáticas formales forman parte del fin para el que se enseñan las matemáticas en el nivel básico, pero no son nunca consideradas el punto de partida ni su guía principal.

Una diferencia más, entre la EMR y el diseño de innovaciones didácticas en México, se refiere al papel que se espera que jueguen los recursos diseñados. En México, como ha sido típico a nivel internacional, los recursos educativos se han desarrollado con la expectativa de que podrán apoyar directamente el aprendizaje de los alumnos (Cobb et al., 2008). Desde esta perspectiva, la docencia se convierte en la actividad de aplicar apropiadamente los recursos diseñados y, a veces también, de generar en las aulas las condiciones necesarias para que estos recursos sean funcionales. Para decirlo usando términos de la teoría musical, se ve a los docentes más como "ejecutantes" de las innovaciones, que como "intérpretes" (o "co-compositores") de éstas.

En la EMR se considera que, en sus aulas, los docentes son los agentes educativos más importantes –por mucho. Su oficio tiene una naturaleza intelectual y su quehacer impacta profundamente, entre otras cosas, en cómo entienden los alumnos las tareas que realizan y en los aprendizajes que logran. Se considera también que las aulas son espacios sociales complejos, diversos y cambiantes. En éstas, los docentes disciernen, juzgan y toman decisiones constantemente, que tienen consecuencias profundas en el proceso educativo (Cobb et al., 2008). En la EMR, el diseño didáctico se focaliza en desarrollar recursos que apoyen la labor educativa de los docentes (Gravemeijer, 2004). Y no solo se trata de generar actividades y materiales que puedan ser usados por las maestras y maestros en sus aulas sino, muy importante, de recursos teóricos que les sirvan para prever cómo podría progresar el aprendizaje de sus alumnos y tomar decisiones sobre qué enseñar, cuándo hacerlo y cómo hacerlo. Estos recursos se conocen como *Teorías de la Enseñanza en un Dominio Específico*.

Una última diferencia que mencionar, y ésta sí alude directamente a la teoría de las situaciones didácticas, es el pragmatismo de la EMR. Como teoría para apoyar el diseño de recursos para la enseñanza de las matemáticas, la EMR no fue desarrollada con la intención explícita de ser reconocida como una teoría apegada a los principios científicos positivistas. En lugar de eso, fue desarrollada con un fundamento empírico, buscando, primordialmente, el que fuera capaz de apoyar en la tarea de mejorar la enseñanza y, por ende, también el aprendizaje de las matemáticas (Cobb et al., 2008).

3.1.2. Las Teorías de la Enseñanza en un Dominio Específico

Como ya mencionamos, en el núcleo de la EMR está la formulación de *teorías de la enseñanza en un dominio específico* (TEDE). Se trata de teorías formuladas con el propósito principal de apoyar a los docentes en sus tareas de enseñanza de un tema matemático específico (Gravemeijer, 1994, 2004). En ellas se propone una progresión de objetivos de aprendizaje a ir logrando con un grupo, junto con los medios didácticos que servirán para buscarlos. Estas teorías están empíricamente fundamentadas y generalmente son desarrolladas a través de un proceso conducido por conjeturas, y la instrumentación de experimentos de diseño en las aulas (Stephan, Bowers, y Cobb, 2003).

Para explicar mejor en qué consiste una TEDE, usamos como ejemplo la que, junto con otros colegas, hemos estado desarrollando en el dominio de las fracciones (Cortina, Visnovska, y Zúñiga, 2014, 2015). La primera versión de la TEDE la formulamos a través de la conducción de un experimento en el aula, hace casi quince años[1]. Desde entonces, la TEDE ha sido modificada con base en experiencias de trabajo tanto con maestros como con grupos de formadores de maestros. El haberle hecho cambios es consistente con la EMR. En general, nunca se considera que las TEDEs son un producto finalizado. Al contrario, y de manera

[1] Los resultados obtenidos entonces sirvieron de base para la elaboración de un módulo del Instituto Nacional para la Educación de los Adultos.

consistente con un proceso conducido por conjeturas, se les considera que siempre son susceptibles de revisión y mejora (Gravemeijer, 1994).

Habitualmente, el dominio matemático de una TEDE involucra a un tema matemático central, pero también a varios más. Uno de los principios de la EMR es el del *entrelazamiento (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014),* donde se considera que las ideas matemáticas están estrechamente relacionadas entre ellas, por lo que es contraproducente enseñarlas de manera aislada. En el caso de nuestra TEDE en fracciones, se considera necesario (y por ende se apoya) el que los alumnos desarrollen conocimientos relativamente complejos no sólo en el campo de las fracciones, sino también de la medición de longitudes y de la multiplicación.

Con el fin de apoyar a los docentes a entender la relevancia de enseñar cierto tema matemático de cierto modo, en la TEDE se incluye una justificación, en la que se explicita qué motivó su desarrollo. Nuestra TEDE busca ser un recurso que apoye a los docentes a lograr que sus alumnos desarrollen comprensiones relativamente complejas de las fracciones como medidas que dan cuenta del tamaño de una longitud. Partimos de que esta forma de entender a las fracciones puede ser una base para que los alumnos desarrollen nociones matemáticas que, eventualmente, les ayuden a entender las características y propiedades de los números racionales. Por ejemplo, consideramos que la habilidad de poder reconocer cuándo dos medias fraccionarias dan cuenta de una misma longitud (ej. $3/2 = 9/6$) podría ser un apoyo importante para que, en su momento, comprendan la noción de *clases de equivalencias*. Consideramos también que esta forma de entender a las fracciones sería una base sólida para apoyar a los alumnos a comprender las prácticas cuantitativas, típicas de las disciplinas empíricas, en las que se comparan mediciones en términos de tamaño relativo (Thompson y Saldanha, 2003).

Antes mencionamos que una TEDE propone una progresión de objetivos de aprendizaje a ir logrando. Estas se formulan tomando en consideración otros dos principios de la EMR: *el del nivel* y el de la *reinvención guiada* (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). El primero señala que aprender matemáticas significa que los estudiantes pasarán varios niveles de comprensión, en los que avanzan de manera que cada nivel estará menos relacionado con una realidad empírica y será también más formal. El segundo implica guiar a los alumnos para que vivencien esta progresión como un logro del quehacer matematizador grupal.

En la versión de la EMR que nosotros utilizamos (Cobb et al., 2008), la progresión de objetivos de aprendizaje se define en términos de la emergencia secuencial de prácticas matemáticas (Stephan et al., 2003). Una práctica matemática se compone de formas de razonar en la comunidad del aula, a las que –en cierto momento y de manera colectiva– se les reconoce y trata como claras, razonables, y apropiadas. Estas formas de razonar casi siempre implican formas particulares de usar herramientas –físicas, digitales o gráficas– y de interpretar símbolos matemáticos. El uso de estas herramientas, y el significado que colectivamente se les atribuye a los símbolos, también forman parte de una práctica matemática.

Algo muy importante a aclarar es que el aprendizaje matemático, en la versión de la EMR que nosotros utilizamos, se entiende no como un fenómeno cognitivo que supone la adquisición de conocimientos por parte de los individuos, sino como un evento social que implica la capacidad de participar en una práctica colectiva (Sfard y Cobb, 2014).

Lo más común en la formulación de una TEDE es que la primera práctica matemática a constituir esté bastante vinculada a una realidad cotidiana y empírica. Esto se debe a que tiene que ser consistente con el *principio de realidad* de la EMR. Este principio le da su nombre a la EMR, se deriva de las reflexiones de Freudenthal (1973), e implica procurar que las matemáticas que practiquen los alumnos sean siempre *vivencialmente reales*, para ellos. Eso no quiere decir que a los alumnos siempre se les oriente a trabajar con situaciones cotidianas o que estén directamente vinculadas a un fenómeno de la realidad empírica.

Freudenthal consideró que las matemáticas con las que trabajaban él y sus colegas matemáticos les eran vivencialmente reales a ellos, independientemente del nivel de formalización y abstracción de las ideas implicadas en su labor. Pero también reconoció que estas vivencias eran el resultado de su formación y ocupación, y que no tendrían por qué estar presentes en quienes se inician en los quehaceres matemáticos.

3.1.3. “La vara de Kía”. Una TEDE para la experimentación

Nuestra TEDE parte de una actividad que se contextualiza dentro de una narrativa que cuenta la historia de un pueblo mesoamericano, los Ajacay, famosos artesanos que para fabricar sus productos requieren realizar mediciones y para ello utilizan la vara de Kía o Tije, es una narrativa entonces en la que se destaca la importancia de la medición de longitudes y se investiga cómo se podría haber medido antes de que existieran los instrumentos modernos (reglas, estadiómetros, cintas métricas, calibradores, etc.). Nuestra TEDE integra seis prácticas matemáticas.

3.1.3.1. Primera práctica

La primera práctica matemática que se establece en el aula será la de medir longitudes utilizando una unidad estandarizada, y números enteros. Ésta se construye sobre la actividad de crear tiras de papel de una longitud específica, usando unidades de medición no convencionales.

La emergencia de la práctica implica un proceso en el que el grupo primero indaga sobre las ventajas y sobre todo las desventajas de medir usando partes del cuerpo (manos, palmos, pies, brazadas, jemes, etc.). Posteriormente, se introduce una medida estandarizada, como solución al problema de las inconstancias en los tamaños de las medidas al usar las partes del cuerpo (por ejemplo, la longitud de las tiras que miden "cinco manos" no es la misma cuando diferentes personas las hacen). La medida que supuestamente se usaban en el pueblo de la fábula, con una longitud de aproximadamente 24 cm de largo.

La constitución de la primera práctica continua con una indagación sobre las pautas que los antiguos mesoamericanos habrían establecido para medir con la vara. En esta indagación se establece la importancia de iterar la vara sin dejar huecos entre las iteraciones y sin sobreponer las iteraciones.

La primera práctica matemática se da por constituida cuando las pautas de medición (usando la vara) se reconocen y tratan, al interior del grupo, como adecuadas. Además, la interpretación de las medidas como el resultado de iterar la longitud de la vara, de manera que esa longitud se va acumulando en cada iteración (Stephan et al., 2003), se trata como clara, razonable, y apropiada. En otras palabras, la primera práctica matemática se da por constituida cuando se normaliza el uso de la herramienta de medición, las medidas son entendidas como la acumulación de la longitud de una unidad, y los números enteros (símbolos matemáticos) son interpretados como medidas que dan cuenta de una longitud específica (ej. 5 varas de largo).

3.1.3.2. Segunda práctica

La segunda práctica matemática que proponemos que se constituya en nuestra TEDE, consiste en reconocer el tamaño relativo de una subunidad de medida, cuya longitud corresponde a una fracción unitaria de la longitud de la unidad de referencia (la vara). Esta práctica equivale a poder determinar correctamente y con facilidad la desigualdad entre fracciones unitarias (ej. $1/6 > 1/15$). La emergencia de esta segunda práctica tiene como antecedente necesario la constitución de la primera práctica.

La emergencia de la segunda práctica se inicia con la actividad de usar la vara, ya no para producir tiras de una longitud específica, sino para dar cuenta de la longitud de diferentes cosas. En esta actividad, el docente busca que se reconozca la cuestión del *residuo*; esto es, que la longitud de muchas cosas no corresponde a un número entero de iteraciones de la unidad. Por ejemplo, si los alumnos miden su altura, habrá muchos que medirán más de 5 varas, pero menos de 6.

El docente, además, procura que en el grupo se reconozca el residuo como un problema importante, de manera que los alumnos sugieran cómo podría resolverse. El docente puede, por ejemplo, hacer notar que la medida de 5 varas y un tanto más podría aplicarse a casi todo el grupo, lo que haría pensar que todos tienen la misma estatura, cuando evidentemente no es el caso.

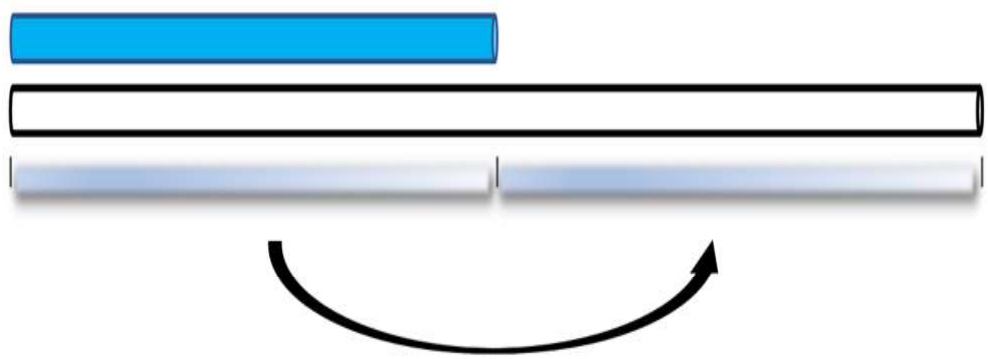
Se espera que las propuestas de los alumnos impliquen el uso unidades de medición más pequeñas. Sin embargo, las unidades propuestas tendrán importantes limitaciones. Por ejemplo, las unidades podrían ser arbitrarias (ej. “dedos”), o estar vagamente definidas: “y un cacho”, “y medio”. También podrían ser unidades convenciones, como “cinco centímetros”. La docente entonces procura que el grupo reconozca las insuficiencias de las soluciones propuestas. Por ejemplo, puede repasar con el grupo los problemas que conlleva el medir usando partes del cuerpo. También puede hacer notar que “un cacho” puede significar muchas longitudes. Además, puede recordarle al grupo que la tarea implica indagar sobre cómo se media antes de que se inventaran las medidas modernas, por lo que el uso de los centímetros debe ser descartado.

Cuando se logra que los alumnos reconozcan el problema del residuo y también las limitaciones en las soluciones que ellos han propuesto, la docente propone un método de crear unidades más pequeñas, con un tamaño relativo y estandarizado al de la unidad. En otras palabras, propone la creación de subunidades de medida. Lo hace orientando a los alumnos a que lo consideren como el método que podrían haber utilizado los personajes de la fábula, para medir con precisión.

Las subunidades se crean cortando cilindros de papel (o popotes de plástico), hasta lograr que su longitud cumpla con una condición específica. La primera en crearse es la *subunidad 2*[2]. Producirla implica cortar un cilindro hasta lograr que su longitud sea tal que cuando se le use para medir la vara, la medida que se obtenga sea de exactamente 2 (ver Figura 13).

Figura 13

La *subunidad 2*



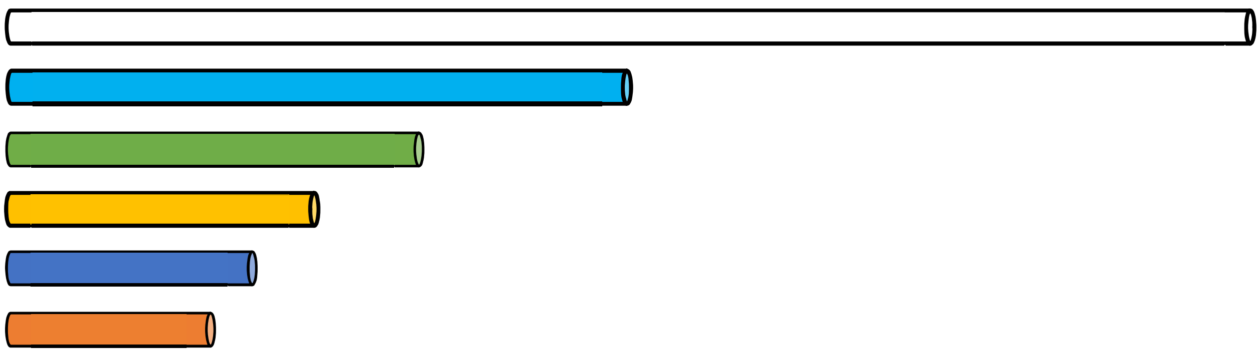
Nota. La subunidad 2 (que mide ½) representada como un cilindro de papel azul que fue cortado para que su longitud fuera tal que cuando es usado para medir la unidad, la unidad mide 2.

Después, se les pide a los alumnos que creen la *subunidad* 3, de manera que al medir la vara sea exactamente 3. Generalmente se les pide que también produzcan las subunidades 4, 5, y 6 (ver Figura 14), pero si la docente lo cree conveniente, se pueden crear más.

[2] En la narrativa que nosotros usamos, el nombre que se le da a la *subunidad 2* es el de “pequeño de a dos”. A la *subunidad 3* se le dice “pequeño de a tres”, y así sucesivamente.

Figura 14

La unidad de medida cuya longitud es 1, y las *subunidades 2*,*3*,*4*,*5* y *6*



La actividad que se propone que continúe es la de comparar la longitud de las medias. Primero se hace de manera empírica y después usando como referencia única su denominación. Por ejemplo, se le puede preguntar al grupo qué subunidad sería más larga, la de 4 o la 6. También se les pide que comparen el tamaño relativo de subunidades que no han hecho. Por ejemplo, se les puede pedir que imaginen de qué tamaño sería la subunidad 50, y si sería mayor o menor a la subunidad 10 ($1/50$ vs. $1/10$).

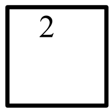
En estas comparaciones se procura apoyar a los alumnos a que razonen que entre más iteraciones de una subunidad son necesarias para cubrir el largo de la unidad de referencia más corta es la subunidad. Así la subunidad 7 sería más larga que la subunidad 19 ($1/7 > 1/19$), porque se necesitan sólo siete iteraciones de la primera para cubrir el largo de la vara, mientras que se necesitan diecinueve de la segunda.

La emergencia de la segunda práctica conlleva el uso de tres símbolos matemáticos nuevos, dos convencionales y el otro no. Los dos primeros son los símbolos de mayor que y menor que (>, <). El segundo corresponde al del denominador de una fracción. Inicialmente se escribe usando una notación no convencional, la cual implica escribir un número entero dentro de una casilla (ver Figura 15). Este símbolo se introduce como un recurso para representar sintéticamente la denominación de una subunidad[3].

[3] Se busca que una casilla que contenga el numeral "2" sea entendida como un símbolo que representa a la *subunidad 2*, o "pequeño de a dos".

Figura 15

Tamaño de la subunidad

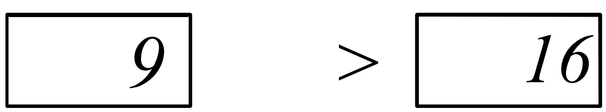


Nota. Notación no convencional con la inicialmente se representa el tamaño de la *subunidad 2*, cuya longitud corresponde a ½ de la longitud de la unidad de medida.

La segunda práctica matemática se da por constituida cuando los alumnos[4] son capaces de comparar, correctamente y con facilidad, el tamaño de una multiplicidad de subunidades, con base en su denominación, representada con el símbolo de las casillas (ver Figura 16). Además, son capaces de justificar sus comparaciones usando un tipo de razonamiento similar al arriba descrito, al tiempo que este tipo razonamiento es tratado al interior del grupo, como claro, razonable, y apropiado.

Figura 16

Comparación de subunidades



Nota. Comparación de las longitudes de las subunidades 9 y 16 (i.e., 1/9 vs. 1/16) usando el símbolo de "mayor que" (>) y la notación no convencional con las casillas.

3.1.3.3. Tercera práctica

La tercera práctica matemática que proponemos implica interpretar una fracción como una medida de longitud realizada a través de iterar una subunidad. La medida resultante puede ser más corta, igual de larga o más larga que la longitud de la unidad de referencia. Esta práctica equivale a poder determinar correctamente y con facilidad cuándo una fracción es menor a la unidad (ej. 5/7) cuándo es igual (ej. 7/7 y 5/5), y cuándo mayor (ej. 7/5).

[4] Nos referimos a que al menos la gran mayoría de los alumnos de un grupo sean capaces de hacerlo, aunque lo ideal es que todos lo puedan hacer.

La emergencia de la tercera práctica se inicia con la actividad de usar las subunidades (los cilindros de papel cortados) para crear tiras de papel cuya longitud corresponde a un número específico de iteraciones de una subunidad. Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que produzcan una tira cuya longitud corresponde a tres iteraciones de la subunidad 2.

La nueva actividad hace que sea necesario agregar un símbolo al sistema de notación ya establecido. Esto implica agregarle un número a la casilla, el cual se coloca en la parte externa superior de la misma. Este número da cuenta de la cantidad de veces que la subunidad fue iterada (ver Figura 17).

Figura 17

Representación no convencional de la fracción

Nota. Corresponde a la notación no convencional que indica que la *subunidad 5* (cuya longitud es 1/5 de la unidad) fue iterada siete veces (7/5).

Como se puede ver, en la emergencia de la tercera práctica se introduce la noción del numerador de una fracción. Así, se busca que los estudiantes interpreten a las fracciones como medias en las que se iteró una subunidad para dar cuenta de un tamaño. El denominador de la fracción, entonces, da cuenta del tamaño de la subunidad y el numerador de las veces que fue iterada.

En las actividades que se usan para procurar constituir la tercera práctica matemática, se orienta a los estudiantes a que reflexionen sobre cuándo la longitud de la que da cuenta una medida es menor que la longitud de la vara (unidad de referencia), cuándo es mayor y cuando es igual. El razonamiento que se busca establecer es que el denominador de la fracción indica tanto el tamaño de la subunidad como el número de veces que tendría que ser iterada para producir una longitud igual a la longitud de la unidad de referencia. Así, las medidas en las que el numerador es menor al denominador (ej. 5/6) implican que el número de veces que fue iterada la longitud la subunidad fue insuficiente para producir una longitud igual a la de la unidad ($5/6 < 1$).

Las medidas en las que el numerador es mayor al denominador (ej. $6/5$) implican que el número de veces que fue iterada la longitud de la subunidad fue mayor al necesario para producir una longitud igual a la de la unidad ($6/5 > 1$). Finalmente, las medidas en las que el numerador y el denominador son iguales (ej. $6/6$) implican que el número de veces que fue iterada la longitud de la subunidad fue justo el necesario para producir una longitud igual a la de la unidad ($6/5 = 1$).

La tercera práctica matemática se da por constituida cuando los alumnos son capaces de comparar, correctamente y con facilidad, el tamaño de una multiplicidad de medidas fraccionarias con el de una unidad. Además, interpretan las inscripciones fraccionarias como medidas compuestas de dos números, de los cuales el inferior (denominador) da cuenta del tamaño de la subunidad que se usó y el superior de las veces que fue iterada.

3.1.3.4. Cuarta práctica

La cuarta práctica matemática implica interpretar una fracción como una medida de longitud que puede ser menor, mayor o igual a una medida realizada iterando la unidad, cierto número de veces. Por ejemplo, implica poder determinar que la medida $43/5$ implica una longitud mayor a la de ocho unidades, pero menor a la de nueve. En este espacio ya no la describiremos a detalle, pero vale la pena mencionar que en el proceso de constituirla se introduce la notación convencional de las fracciones. Estas notaciones se interpretan de la misma manera que en la notación anterior: el número de abajo denomina a la subunidad que se usó en una medición, y el de arriba el número de veces que fue iterada la subunidad. También en el proceso de constitución de esta práctica la recta numérica juega un papel central.

Nuestra TEDE, hasta donde la hemos desarrollado, consta de un total de seis prácticas matemáticas. En la siguiente tabla se muestra una versión abreviada de la toda la TEDE.

Tabla 3

La TEDE en fracciones

Práctica	Herramientas	Símbolos
1. Se interpreta un número entero como una medida, que da cuenta de la acumulación de la longitud de una unidad. *Equivale a entender la medición como la iteración de una unidad.*	Vara de medición, tiras de papel, tijeras	Números enteros
2. Se reconoce y compara el tamaño relativo de una subunidad de medida. *Equivale a comparar fracciones unitarias*	Vara de medición, cilindros de papel, tijeras	Casillas que denominan a las subunidades, y símbolos de mayor qué y menor qué.
3. Se interpreta a las fracciones como medidas realizadas a través de iterar una subunidad de medida (numerador y denominador). Además, se comparan las medidas con el tamaño de la unidad. *Equivale a determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a una unidad*	Vara de medición, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras	Fracciones representadas usando la casilla para el denominador, y símbolos de mayor que, menor que, e igual.
4. Se interpreta a las fracciones como medidas que pueden ser menores, mayores o iguales a medidas realizadas iterando la unidad. *Equivale a determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a la iteración de la unidad dos o más veces*	Vara de medición, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras, recta numérica	Números enteros, fracciones representadas convencionalmente, símbolos de mayor que, menor que, e igual.
5. Se interpreta a las fracciones como medidas susceptibles de producir otras medidas, al ser iteradas cierto número de veces. *Equivale a multiplicar una fracción por un número entero*	Recta numérica	Números enteros, fracciones representadas convencionalmente y símbolos de suma, multiplicación e igual.
6. Se interpreta a las fracciones como medidas de longitud que pueden ser menores, iguales o mayores a un medio. *Equivale a establecer igualdades y desigualdades con un medio*	Recta numérica	Números enteros, fracciones representadas convencionalmente, y símbolos de multiplicación e igual.

3.1.4. Los Medios Didácticos

La descripción que hasta aquí hemos hecho de nuestra TEDE se ha centrado en los objetivos de aprendizaje, especificando algunos medios didácticos que proponemos para procurarse. Hemos hablado sobre todo de actividades basadas en narrativas sustanciosas y del uso de herramientas y símbolos. Pero en la versión de la EMR que usamos (Cobb et al., 2008), los medios didácticos van más allá.

Nosotros consideramos que el espacio principal en el que se ha de apoyar el aprendizaje matemático es el de las conversaciones colectivas, con el grupo completo. Esta consideración es consistente con el principio *de interactividad* de la EMR, que implica que aprender matemáticas no es solo una actividad individual sino también social (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014).

La orquestación de una conversación colectiva productiva requiere que ciertas formas de participar se establezcan como normativas en un grupo. Los medios de apoyo, entonces, deben incluir recursos teóricos y prácticos que apoyen a un docente a establecer ciertas normas en su aula, sin las cuales las conversaciones colectivas no serán viables.

Algunas de esas normas se refieren a aspectos de la dinámica de un aula en general. Por ejemplo, para lograr una conversación colectiva –sin importar el tema o la materia– es necesario que los estudiantes se sientan obligados a escuchar activamente, tanto a la docente como a todos los compañeros. También es necesario que haya un ambiente de mucho respeto, de manera que nadie se sienta vulnerable de ser agredido al participar. Además, todos los alumnos deben de sentirse con la confianza de expresar no entendimiento, y con la obligación de expresarlo cuando sea el caso. En la versión de la EMR que nosotros usamos, el establecimiento en el aula de estas normas se ve como un medio esencial para poder apoyar el aprendizaje, en la forma que sugiere en una TEDE como la nuestra (Cobb et al., 2008).

Además, hay normas de aula que son específicas de la materia de matemáticas, cuyo establecimiento también es crítico. Una de ellas tiene que ver con los referentes que usan los alumnos al hacer sus contribuciones. Necesariamente, estas contribuciones no deben limitarse a describir procedimientos matemáticos, sino que las explicaciones deben aludir a la situación real que se está trabajando. Ello facilita que los otros miembros de la comunidad entiendan y evalúen las aportaciones de sus compañeros.

Recapitulando, las TEDE son el núcleo de los diseños elaborados a través de la EMR. Se trata de recursos teóricos, locales, que buscan apoyar el quehacer educativo de los docentes. En ellas se propone una progresión de objetivos de aprendizaje a ir logrando con un grupo, junto con los medios didácticos que servirán para procurarse. Estos últimos incluyen narrativas, actividades, herramientas y símbolos matemáticos, pero también el establecimiento de normas en el aula que posibiliten la orquestación de conversaciones colectivas.

3.2. EL TRAYECTO METODOLÓGICO

La investigación que presentamos se basa en la metodología del "Experimento de diseño" que nace bajo la influencia de Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble (2003). En esta metodología podemos identificar la necesidad de contar con una herramienta que permita en el ámbito educativo realizar investigación, sobre todo en matemática educativa (aunque no sea exclusivo). Los experimentos de diseño son entonces una metodología de aprendizaje instruccional donde se pretende investigar la relación entre la teoría educativa, los artefactos diseñados y la misma práctica.

3.2.1. El experimento de diseño

Un aspecto importante que debemos resaltar es que en esta metodología se pretende captar las acciones de los alumnos como seres haciendo matemáticas, es decir, lejos de un "laboratorio" (aula prototípica) y más cercana a una realidad del aula con las interacciones sociales y múltiples variables que ahí existen;

> los experimentos de diseño permitirán que las expresiones, los gestos, las interacciones entre pares y profesor, los trabajos escritos y todas aquellas acciones que realiza el estudiante, puedan ser utilizadas para recolectar datos que en algunas ocasiones pasan desapercibidos y que son necesarios para obtener evidencias y a la vez nutrir las investigaciones en Matemática Educativa" (Briceño y Buendía Ábalos, 2015).

El experimento de diseño parte de la puesta en prueba de una Teoría Hipotética de Aprendizaje (para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis en torno a esto) y una Teoría Conjeturada de Aprendizaje (qué debe hacer el docente para alcanzar objetivos de aprendizaje), las cuales nos ayudan a planear los objetivos y los medios, asimismo ayudan a analizar los resultados para dar cuenta de que dichos objetivos se hayan conseguido (Luna y Aguayo, 2021); de esta manera entendemos que dentro de la metodología en que trabajamos lo replicable no son las actividades sino la agenda (Experimento de Enseñanza) y que a partir de nuevas conjeturas se puede llevar a cabo un nueva investigación.

Dentro de las posibilidades que maneja dicha metodología es que es un proceso que no está terminado, pues implica un diseño, una experimentación, reflexión y un rediseño, es decir un proceso cíclico y acumulativo de larga duración; lo que hoy se experimenta y reflexiona es base para mejoras y modificaciones. Se trata de diseñar e implementar un "experimento pensado"y observarlo para reflexionar y re-direccionar la acción.

Como lo mencionamos, los experimentos de diseño se apoyan del experimento de enseñanza, el cual sería entonces el tipo de estudio más frecuente dentro de la metodología en que estamos inscritos, un experimento de enseñanza es una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).

Se trata de una investigación de primera mano, en el aula, donde la intervención se lleva en la clase misma y a cargo de un investigador que funge como docente y, a través de las interacciones, se van reconociendo los aprendizajes y razonamientos de los alumnos, el ambiente necesario y las normas (generales y matemáticas) que ahí se desarrollan para lograr los objetivos; es necesario reconocer que conforme se avanza en la agenda se pueden reformular las hipótesis y cambiar las conjeturas realizadas dando pie a modificaciones de la misma ya que,

> Se espera que el alumno construya conocimiento matemático, que el docente (investigador-docente) construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento matemático por parte de lo alumnos, y que los demás investigadores construyan conocimiento sobre ambos y sobre sus interacciones" (Molina et al, 2006, p. 6)

Los experimentos de enseñanza deberán tener consecuencias en diversas áreas e impactar dentro y fuera del aula para generar y mejorar las prácticas, brindar herramientas a los docentes y hacer aportes a las teorías locales y, a la par, aportar a teoría generales. Para ello se deberá conocer que dentro del experimento de enseñanza podemos encontrar tres fases fundamentales que no sólo nos permitirán desarrollar estrategias, herramientas y ver cómo funciona la actividad, sino que también nos permite desarrollar una teoría local:

- Fase 1: preparación del experimento (estrecha relación entre el conocimiento -real- y lo didáctico). Los experimentos de diseño no son tareas de clase, sino que están dentro de un diseño pedagógico para mirar el aula de una manera inteligente y propositiva.

- Fase 2: experimentación para apoyar el aprendizaje. Datos recolectados sobre la marcha de la actividad, de los participantes y el entorno de aprendizaje.
- Fase 3: análisis retrospectivo. Permite regresar a cada una de las secuencias y reconocer y analizar cuidadosamente el quehacer del estudiante, como también el entorno y contexto en el que se desarrolló la actividad.

Cabe señalar que esto no es un proceso que tenga fin sino que es algo cíclico y la planeación, ejecución y análisis llevan a un rediseño que ha de permitir que sea tomado en cuenta para futuras investigaciones con diversas variables.

Los experimentos de diseño (como metodología) y los experimentos de enseñanza (como tipo de estudio) tienen estrecha relación con lo que la Teoría de la Educación Matemática Realista propone, se trata de buscar las estrategias para brindar los medios ideales a docentes y así apoyarlos en su práctica diaria; de esta manera en el corazón de la EMR y de nuestra investigación desarrollamos lo que se denomina como una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico.

En la TEDE se pueden encontrar objetivos que han de guiar el experimento de enseñanza y junto a los medios didácticos servirán para procurarlos, en ella se brindan no sólo actividades y materiales sino también recursos teóricos que permitirán el aprendizaje de los alumnos y la toma de decisiones docentes sobre qué enseñar, cómo enseñar y cuándo enseñar, es decir, se apoya la mejora de la tarea de enseñanza y por ende, el aprendizaje en las matemáticas, no de manera específica sino holística, pues a pesar de que se privilegia algún contenido hay varios más que están relacionados.

En este sentido el equipo de investigación ha implementado una TEDE relacionada con la enseñanza de las fracciones desde el significado de medida, como se mencionó en apartados anteriores; ahora es preciso detallar aspectos contextuales del experimento de enseñanza y entender más la situación escolar. La escuela primaria donde se implementó la agenda fue «República de Tanzania» T. M municipio Iztacalco, Cd. de México, en un quinto grado; en éste hay una matrícula de 31 alumnos (16 mujeres y 15 hombres).

Dentro del diagnóstico previo a las sesiones podemos reconocer que la mayoría de los estudiantes aún no han desarrollado la habilidad de dimensionar los números naturales de forma que los puedan ubicar correctamente en una recta numérica y que más del 80% de los alumnos no dimensionan correctamente a los números fraccionarios, lo cual permitió implementar la agenda de tal manera que los alumnos redescubrieran el significado de medida con unidades y subunidades, descubrir sus propiedades y cómo estas permiten desplegar nuevas ideas fraccionarias.

El total de las sesiones aplicadas para las seis prácticas antes descritas fueron 26 clases que se aplicaron del 09 de septiembre al 16 de diciembre de 2019 con una duración de una hora a una hora y media cada una, en las cuales se desarrolló la agenda de tal manera que se hicieron ajustes y adecuaciones conforme se avanzaba; sin embargo, en esta investigación, nos centramos en las primeras 15 clases, las cuales abarcan las primeras cuatro prácticas y dan cuenta de la introducción de las fracciones como un tamaño relativo (propias e impropias).

Como se mencionó, una de las principales características de los experimentos de diseño y experimentos de enseñanza son las diversas oportunidades y áreas en que se puede analizar y reflexionar la investigación; el momento del análisis retrospectivo es clave y esencial en la investigación, pues una vez que se ha efectuado la TEDE es momento de que se analice los detalles que han suscitado en el aula, es decir, analizar los resultados de la misma agenda y los medios didácticos que fueron necesarios para alcanzar sus objetivos.

En nuestra investigación nos basamos en dichos medios didácticos (normas generales y matemáticas) para analizar las interacciones que se dan en la clase y, sobre todo, ver qué es aquello que hace el maestro, en conjunto con los alumnos, que permiten la progresión de la agenda; desde las conversaciones colectivas, respetar turnos hasta la misma reinvención guiada que se da en cada una de las sesiones.

Reconocemos en primer instancia las normas generales que han de servir a la clase de matemáticas, y cualquier otra materia para su desarrollo óptimo, en éstas se van cristalizando las normas base y esenciales que permiten fluir la clase y armonizar lo que ahí se vive, en relación con ellas y la agenda se visualiza de igual manera las normas matemáticas que permiten alcanzar los objetivos de nuestra TEDE; analizamos qué se vive en el aula y cuáles son esos elementos que los docentes deben tomar en cuenta para que, en posteriores experimentos de diseño, se pueda utilizar nuestra investigación como base para su ejecución y tener un referentes para el trabajo.

Para esta investigación se determinó dentro del equipo que el análisis se realizaría de las primeras cuatro prácticas, en éstas se podrá determinar lo necesario para introducir los primeros elementos de las fracciones y aquellos temas vinculados a ellas. Se reconoce la necesidad de medir, cómo medir con unidades y subunidades, el tamaño relativo de la fracción y la iteración de subunidades que permiten conocer las fracciones propias e impropias. Priorizando en nuestro análisis aquellos aspectos vinculados al actuar del profesor, la guía y elementos que debe tener presente para conducir la agenda de tal manera que se alcancen los objetivos allí propuestos.
Para lograr el análisis de las normas generales y matemáticas, propios de esta investigación, determinamos observar las videograbaciones de todas las sesiones, enfatizando en aquellas pertenecientes a las primeras cuatro prácticas, posterior a ello realizamos la transcripción de cada una de las sesiones para poder observar detenidamente lo que ahí sucedía y poder realizar la categorización bajo la mirada que determinamos y, junto la teoría, poder realizar un análisis propio de los quehaceres del docente.

3.2.2. La EMR y su Posible Contribución a la Enseñanza de las Matemáticas en México

Durante casi medio siglo, en nuestro país, se han realizado esfuerzos significativos para reformar la enseñanza y mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Hasta ahora, los efectos positivos de estos esfuerzos no han sido lo suficientemente significativos para que se vean claramente reflejados en las evaluaciones del sistema educativo nacional, tanto en las nacionales como en las internacionales. Lejos de eso, el desempeño del alumnado se ha visto estancado, predominando quienes se encuentran en niveles de insuficiencia (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2018).

En modo alguno consideramos que los educadores matemáticos que han formulado las propuestas oficiales para la enseñanza de las matemáticas sean los responsables de las deficiencias en la educación matemática de nuestro país. Pero sí creemos que el estado de las cosas justifica que se revisen los supuestos básicos que han guiado el diseño didáctico. Antes explicamos cómo los recursos educativos se han desarrollado, en México, con la expectativa de que apoyarán directamente el aprendizaje de los alumnos. Dentro de esta forma de aproximarse al diseño didáctico, se ve a los docentes como los encargados de aplicar las innovaciones, en la forma necesaria para que éstas puedan tener los efectos deseados.

En contraste, y como ya también explicamos, en la EMR se le reconoce a los maestros un papel mucho más protagónico en el proceso educativo. Es con relación a este aspecto que reconocemos el potencial mayor de la EMR, para contribuir a mejorar la enseñanza de las matemáticas en nuestro país.

Una TEDE como la nuestra puede verse como un recurso que le sería útil a maestras y maestros que contarán con niveles relativamente altos de formación y profesionalización docente; niveles significativamente superiores a los que parece tener la gran mayoría de los docentes que laboran en el sistema educativo nacional. Por ejemplo, nuestra TEDE le sería útil a docentes que tuvieran una comprensión relativamente compleja del concepto matemático de fracción, y de cómo los alumnos pueden progresar en el aprendizaje de este concepto.

Además, serían docentes que tuvieran la capacidad ya adquirida de poner en práctica destrezas para la enseñanza que son relativamente difíciles de desarrollar. Entre ellas estaría la capacidad de establecer en sus aulas normas de participación que permitan la orquestación fructífera de conversaciones colectivas. Como ya lo explicamos, ello conlleva poder lograr que todos los alumnos se sintieran seguros de participar, y obligados a escucharse unos a otros y a expresar no entendimiento. Otras capacidades que tendrían sería la de evaluar constantemente el razonamiento matemático que emerge en su grupo, y de utilizar estas evaluaciones para tomar decisiones sobre cómo progresar en la enseñanza.

Visto así, un recurso como nuestra TEDE parecería inviable en un sistema educativo como el nuestro. Sin embargo, las TEDEs también pueden verse como recursos valiosísimos en los esfuerzos de apoyar a las maestras y maestros a desarrollar esas capacidades, y poder así mejorar significativamente su enseñanza de las matemáticas. En cursos breves de formación docente, hemos usado exitosamente nuestra TEDE para ayudarle a los participantes a comprender mejor el concepto de fracción. Por ejemplo, la TEDE ha sido útil para ayudarle a las maestras y maestros a entender a las fracciones impropias como número que, con toda coherencia, pueden servir para cuantificar el tamaño de algo que es mayor a una unidad.

En procesos más extensos de desarrollo profesional docente, en los que nuestra TEDE ha sido el eje, hemos reconocido su utilidad no sólo para mejorar los resultados en la enseñanza de las fracciones en los grupos de las maestras y maestros participantes, sino también para apoyarlos en el desarrollo de habilidades y capacidades de enseñanza complejas, como las antes descritas. Como se esperaría, estas habilidades y capacidades después fueron usadas por los participantes no sólo para la enseñanza de las fracciones, sino en toda su práctica de enseñanza de las matemáticas, e incluso fueron retomadas para enseñar otras materias (Visnovska y Cortina, 2018).

Es así como, retomando el título del presente capítulo, nosotros consideramos a la EMR como una teoría que posibilita vislumbrar una ruta alternativa para procurar la reforma y mejora de la enseñanza de las matemáticas en un sistema educativo como el de México. Esta nueva ruta implicaría asumir que los docentes son los principales agentes educativos en sus aulas y, consecuentemente, focalizar los esfuerzos de mejora en su desarrollo profesional. Estos esfuerzos incluirían, necesariamente, el diseño y producción no sólo de materiales didácticos, sino también de recursos teóricos, como las TEDE, que apoyaran a los docentes a mejorar en su práctica educativa en matemáticas.

IV

LAS INSTITUCIONALIZACIÓN DE NORMAS GENERALES

A lo largo de la historia las sociedades han creado formas de relacionarse, una de las más importantes que permite el éxito de muchas acciones son las normas que se instauran en un grupo social (religioso, político, deportivo, etc.) para orientar y dar sentido a sus acciones ya que la norma es un "comportamiento conforme a uso, contrato o práctica" (RAE, 2020). Las normas sociales son una especie de demanda, pues "al perseguir un objetivo común, los miembros de un colectivo pueden verse atrapados en dilemas que emanan directamente de la naturaleza de dicha actividad" (Linares, 2007, p.135), esos dilemas pueden derivar en un problema de acción colectiva, por esta razón se hace necesario establecer mecanismos sociales que permitan alcanzar esas metas, uno de esos mecanismos es esta norma social.

La escuela y en específico el aula, al ser un tipo de sociedad (a escala) con actores que buscan un mismo fin son una comunidad en la que deben instaurarse normas que permitan lograr los objetivos colectivos propuestos, en nuestro caso los objetivos de cada una de las prácticas matemáticas. La construcción de normas se encuentra relacionada con lo que pasa en el contexto de aula, es por eso que entre docente y alumnos se establecen acuerdos que marcan las pautas para el desarrollo de la clase, sin embargo esas normas no corresponden sólo a acuerdos sobre el orden, también buscan

> que se genere respeto por las diferencias y el desarrollo de la tolerancia, el desarrollo de habilidades sociales, la escucha activa, la empatía, la autorregulación de las emociones, el cuidado, las buenas palabras y el enriquecimiento de las relaciones interpersonales (Rodríguez, 2018, p.15).

En este capítulo se busca dar al lector una explicación detallada de la relación que guardan las normas generales, sobre todo aquellas relacionadas con las conversaciones colectivas, con las normas matemáticas; cuando los alumnos y docente reconocen en la forma de relacionarse los valores necesarios para desenvolverse en el aula y con ello adquirir saberes dentro de una micro sociedad para que los objetivos de saber sean más sencillos de alcanzar y desarrollar de manera armoniosa. Para ello hemos analizado qué es necesario hacer y saber en torno al principio de interacción para lograr la integración de todos los alumnos en una conversación y poder realmente trabajar en torno a las conversaciones colectivas.

Lo qué se hace en un aula, la manera cómo se hace y las razones por las que se hace son el reflejo de las normas que se instauran a través de las interacciones entre los agentes involucrados, dichas interacciones pueden considerarse como un sistema dinámico donde se generan ciertas regularidades que marcan el desarrollo de la clase.

Dentro de la micro-cultura del aula las normas sociales son generales porque se instauran en el trabajo con cualquier asignatura para regular el funcionamiento de las relaciones sólo entre docentes y alumnos, es decir por ser general una norma social no puede regular las interacciones en las que interviene un objeto de conocimiento específico. A pesar de que en diferentes investigaciones se hace alusión a las normas sociales, en esta investigación las denominaremos normas generales por el hecho de que no pueden existir normas no-sociales, toda norma es social (no existe norma individual).

Ahora bien, más allá de los acuerdos que caracterizan la actividad escolar en general, también existen normas específicas que regulan la actividad matemática en el aula, a estas se les denomina "normas sociomatemáticas".

En un experimento de diseño como el que aquí se analiza, las normas (sociales y matemáticas) permiten comprender no sólo el funcionamiento del dispositivo de enseñanza (enseñar fracciones como medida de longitud) sino también aquello que debe pasar en el aula para que se logren los objetivos de cada una de las prácticas matemáticas. En este sentido D'Amore (2007) menciona que lo que se encuentra en las clases de matemáticas debe ser "matemáticamente diferente", "matemáticamente eficiente" y "matemáticamente elegante", lo cual exige una cierta forma de operar, explicar y justificar especiales porque se debe considerar la naturaleza de las matemáticas.

Para comprender mejor las normas sociomatemáticas, en analogía con el concepto de contrato didáctico[1] de la Teoría de Situaciones Didácticas, se puede pensar que en el aula se busca desarrollar una verdadera actividad matemática en la que se establecen obligaciones

[1] Para Brousseau (1986) el contrato didáctico comprende las reglas que deberían seguirse en el diseño e implementación de procesos de estudio de las matemáticas para lograr un verdadero aprendizaje)

recíprocas entre el profesor y los alumnos centradas en el proceso de búsqueda que se genera a partir de la negociación de las cláusulas de dicho contrato. De esta manera, contrato didáctico y normas sociomatemáticas, en su respectiva perspectiva teórica, designan el conjunto de reglas que regulan la interacción entre profesor, alumnos y contenido matemático a enseñar durante el proceso de instrucción (dimensión normativa).

Ahora bien, las normas sociomatemáticas se instauran en la clase porque en algún momento y por alguna razón se convino y acordó en sociedad que era lo aceptable para el desarrollo de la misma (Bonacina, s/f), así, dichas normas propias de la disciplina aportan criterios para el diseño, la implementación, la evaluación y la reformulación de las prácticas matemáticas propuestas en el experimento de enseñanza. Al analizar las normas sociomatemáticas podemos adentrarnos en lo que se espera de los alumnos y del docente en las interacciones mediante las que se pretende lograr los objetivos del experimento, ya que el dispositivo no sólo es una propuesta para aprender fracciones, también es una herramienta que sirve al docente para la enseñanza y por ello conviene tener un acercamiento a las normas que se espera se desarrollen dentro del aula.

Por todas las razones anteriores en este capítulo analizaremos las acciones del profesor cuyo objetivo es instaurar normas que se tornen medios para gestionar de una mejor manera la TEDE, específicamente analizaremos las primeras cuatro sesiones del experimento en el que se pone a prueba una Teoría Específica de un Dominio Específico (TEDE) cuyo objetivo es la enseñanza de las fracciones. El análisis de estas sesiones está centrado en la instauración de normas generales (no matemáticas) esenciales para alcanzar los objetivos de la TEDE. Específicamente se analizan estas normas en el tránsito de lo explícito a lo implícito, es decir, las normas que en un primer momento aparecen dictadas por el docente, pero que paulatinamente van formando parte de las interacciones sin necesidad de declararlas.

Las normas generales son uno de los aspectos más importantes de la EMR, pues “el aprendizaje de las matemáticas está considerado como una actividad social” (Bressan et al., 2004, p.9) en la que las discusiones sobre las interpretaciones de la situación problema dan pie a procedimientos y justificaciones diversas. En este sentido enmarcar dichas discusiones resulta indispensable porque la TEDE no podría avanzar sin instaurar de forma adecuada las conversaciones colectivas ya que, para Freudenthal (1991) el aprendizaje presenta discontinuidades que en ciertos momentos de la clase pueden hacerse presentes, uno de esos momentos son las discusiones colectivas, por ello en la TEDE les se las da mucha importancia ya que, además, en estas discusiones algunas normas permiten el avance y logro de las prácticas matemáticas.

Reconocer al aprendizaje como una actividad social implica reconocer la importancia de toda la clase en el desarrollo de la TEDE, en ese sentido Cobb et al. (2008) señala que las conversaciones colectivas son un medio por el cual la clase entera puede construir el conocimiento, se trata de "una discusión de toda la clase sobre el proceso… una discusión grupal de los análisis de los estudiantes" (p. 10). En este espacio que le pertenece a toda la clase, unos y otros aprovechan el razonamiento de los demás y utilizan las discusiones como medio principal para apoyar la reorganización progresiva de su razonamiento.

En diversas investigaciones sobre el desarrollo de experimentos de enseñanza se ha analizado el papel de las conversaciones colectivas y se han detectado elementos que permiten a la clase desenvolverse de forma plena, pero también se ha identificado la necesidad de generar "normas" que permitan su buen funcionamiento.

4.1. LAS NORMAS GENERALES. UNA BASE PARA INSTAURAR NORMAS MATEMÁTICAS

Cabe aclarar que nuestro experimento de enseñanza no es una propuesta para que simplemente el docente replique las prácticas matemáticas que en ella se proponen, al contrario de esto engloba un modelo teórico que percibe al aprendizaje matemático como una actividad social en la que profesor y alumnos se involucran en prácticas colectivas (Sfard y Cobb, 2014), esto significa que lo que sucede durante las prácticas es parte fundamental del experimento de enseñanza porque los medios didácticos que se utilizan no solo incluyen el uso de materiales o el despliegue de estrategias, la instauración de normas generales también es un medio didáctico que no se puede soslayar en el desarrollo de una TEDE. Sobre este respecto Cobb et al. (2008) mencionan que los experimentos de enseñanza sitúan el aprendizaje matemático en el contexto social del aula, donde se da una reorganización del conocimiento a través de las interacciones de la clase.

Un aspecto a resaltar es que, aún cuando las normas generales y sociomatemáticas se sustentan en las interacciones, la TEDE parte de una teoría conjeturada en la que el docente tiene que "suponer" aquello que sucederá en el aula para poder decidir las actividades y medios didácticos que se requerirán para que las prácticas matemáticas se desarrollen de mejor manera y con ello se alcancen los objetivos planteados ya que, bajo la lógica de la conjetura existe la necesidad de generar normas sociomatemáticas (Cobb et al., 2008).

Como lo hemos mencionado, las normas generales son necesarias para el desarrollo de las primeras conversaciones colectivas, que a su vez, son necesarias para instaurar las normas sociomatemáticas porque en un primer momento resulta indispensable lograr que los alumnos participen en discusiones sobre la situación planteada por el profesor. Retomada por Freudenthal de las investigaciones de Kry Van Perreren y las teorías socioculturales de Europa del Este, la idea de organizar discusiones colectivas sostiene que la participación en clase llevará al alumno a la "búsqueda de atajos, cambios de punto de vista, creación y apropiación de modelos más elaborados, etc." (Bressan et al., 2004, p. 8), es así como las conversaciones colectivas se constituyen como parteaguas para el desarrollo de la TEDE porque "la orquestación de una conversación colectiva productiva requiere que ciertas formas de participar se establezcan como normativas en un grupo. Los medios de apoyo, entonces, deben de incluir recursos teóricos y prácticos que apoyen a un docente al establecimiento de ciertas normas en su aula, sin las cuales las conversaciones colectivas no serán viables" (Delgado y Cortina, 2020).

Freudenthal encontró que es importante generar una "discusión de toda la clase" como elemento clave para la matematización, ese sería uno de los fines principales de la enseñanza matemática como parte de una teoría socio-constructivista. Pero matematizar "no implica una actividad solitaria de parte del alumno individual" (Gravemeijer, 2000, p.1), se trata más bien de una actividad de grupo donde el diálogo sea medio para la reflexión y permita ir avanzando en los diferentes niveles de conceptualización de un objeto matemático; no obstante, las conversaciones colectivas no pueden ir sin rumbo sino que deben responder a ciertos elementos que permitan hacer notar la calidad de la discusión, dicha calidad depende ampliamente de las "normas" que se logren instaurar.

4.1.1. La Instauración Explícita

La TEDE se enmarca en un proceso cíclico de desarrollo e investigación, donde la experiencia puede ser transmitida a otros para que la hagan propia (Freudenthal, 1991), bajo este argumento y a través de anteriores experimentos de enseñanza con el mismo objeto matemático se han identificado elementos claves para su buen uso. Con el uso de la THA y la teoría de conjeturas, además de la situación del aula y los propios objetivos, encontramos guías que marcan la instrucción y parecen propicias para las discusiones colectivas, sin embargo dichas normas no pueden esperar a ser instauradas en las interacciones, por ello la necesidad de acelerar su instauración para arrancar el experimento porque las conversaciones colectivas deben establecerse para poder avanzar.

Como mencionamos, las conversaciones colectivas son indispensables para lograr que las matemáticas sean una actividad humana, social, unas matemáticas a las que todas las personas pueden acceder y donde se puedan abordar crítica y matemáticamente los problemas que se presentan todos (Freudenthal, 1991). A pesar de esto, esas discusiones deben tener ciertos elementos para el desarrollo de las normas sociomatemáticas y en ocasiones resulta conveniente para el profesor "dictar" dichos aspectos a los alumnos.

Las normas, generales y sociomatemáticas se instauran en el aula a través del tiempo, como un acuerdo de interacción y responden a un contrato establecido implícitamente que se puede denominar "matemáticamente diferente" por ejemplo, cuando el maestro pregunta *¿Quién lo hizo de modo diferente?* Las formas de acción condicionan la comprensión del alumno sin tener que definir aquello que es matemáticamente diferente (Godino y Llinares, 2000). Por otra parte, pueden existir momentos en que la interacción es demasiado lenta, en esos casos regularmente aparece un fenómeno que denominamos "aceleramiento de la norma", fenómeno que se podría articular con lo que Santamaria (s/f) menciona acerca de la necesidad de guiar a los alumnos hacia las estrategias requeridas, este autor cree que es necesario "capacitarlos para participar como miembros competentes de su comunidad y para que puedan hacer frente a los elementos claves dominantes en la matematización" (p.10).

El aceleramiento de la norma no es un rasgo exclusivo de las clases de matemáticas, es frecuente observar que los docentes "dicten" aquello que se puede o no hacer en el aula. En el caso de las normas generales y matemáticas, los alumnos tienen diversos significados acerca de lo que es hacer matemáticas, ante problemas o juegos pueden reconocer diferentes formas de actuar, es decir, "los procesos de matematización considerados como transparentes llegan a ser problemáticos cuando las situaciones se interpretan por sujetos que no son (aún) miembros de la cultura de la clase" (Godino y Llinares, 2000, p.78) eso es más observable en nuestro caso porque el docente que desarrolla la TEDE es externo o no titular. Así, cuando a los alumnos se les plantean problemas, juegos, textos, etc., responden de manera diferente gracias a los múltiples significados que han construido por sus anteriores vivencias en las clases de matemáticas (o en este caso, las normas utilizadas con la docente titular).

En la primera sesión de nuestra propuesta encontramos que el docente realiza esa aceleración para hacer del experimento un medio eficaz para el aprendizaje de las fracciones, cómo se puede ver en el siguiente fragmento el docente acelera la instauración de la norma para desarrollar los aspectos propios de la matematización, dicho aceleramiento tiene que ver con hacer explícito aquello que se puede o no se puede hacer en el aula.

[24] M: Lo más importante es que le ayuden a sus compañeros a aprender, para que todos aprendamos. Entonces vamos a ver qué cosas se valen y que cosas no se valen hacer en esta clase, cuando estemos trabajando, ¿ok?

[25] Aos: (asienten con la cabeza)

[26] M: ¿Creen que se vale equivocarse?

[27] Aos: Sí…. No….

[28] M: ¿Quién cree que no se vale equivocarse? ¿tú Jaime crees que no se vale?

[29] Jaime: Como sea.

[30] M: Jaime cree que no se vale, ¿Quién cree que sí se vale?

[31] Aos: (algunos levantan la mano)

[32] M: Pues les voy a decir quién está en lo correcto…Dominic está en lo correcto Jacinto y los que levantaron la mano. En esta clase se vale equivocarse, ¿sale? Todos nos equivocamos y no hay ningún problema con equivocarse, ¿sí?, entonces se vale equivocarse, lo que no se vale (movimiento con dedo diciendo que no) y en eso soy muy estricto y vamos a ser muy estrictos, es hacer sentir mal a alguien porque se equivocó, ok, entonces nunca hacemos sentir a alguien mal porque se equivocó, ¿sí?, a veces hablamos mal, a veces decimos el nombre que no era, el número que no era, todo eso se vale; ¿si queda claro? Lo que nunca se vale (acentúa con el dedo) es hacer sentir mal a alguien porque se equivocó, entonces no vamos a usar expresiones como "ah" o nada parecido, sí. Por qué, porque tenemos que ser muy respetuosos, muy muy respetuosos con nuestros compañeros.

En el fragmento anterior el docente "dicta" una norma donde hace explícito el derecho a equivocarse con la intención de que los alumnos reconozcan en su proceso algo construible y susceptible a errores, con ello se puede observar una de las principales características de la EMR que enmarcan a la norma dictada por el docente para desarrollar las conversaciones colectivas, recordemos que para Freudenthal (1991) uno de los elementos clave es reconocer la actividad matemática más como una actividad humana que como un proceso. Al considerar esto dentro de la TEDE parece conveniente que el alumno sepa que no siempre va a estar en lo correcto y que no se está exento de cometer algún error.

Al ver la matemática como una actividad humana se reconoce al "error" como recurso de aprendizaje[2] en el experimento de enseñanza, en este sentido el derecho al error permite que el alumno vaya matematizando la realidad, que encuentre relaciones que le permitan acceder a la matematización porque en el proceso de reinventar no están dadas las respuestas sino que a través del "ensayo-error" los alumnos vivencian (como los matemáticos) el proceso de crear un objeto. Estas ideas fundamentales en la EMR nos permiten reconocer la intención del docente, regular las interacciones en el aula a través de normas.

Además de acentuar el derecho al error, el profesor subraya la necesidad de respetar al compañero ya que al desarrollarse una conversación colectiva los alumnos pueden sentirse expuestos. La intención es que a partir de sus interacciones los alumnos aporten y recuperen ideas de compañeros que les puedan servir en el proceso de matematización, para ello es necesario un ambiente de respeto, que nadie se sienta vulnerable al participar (Delgado y Cortina, 2000), es por eso que el docente lo hace público con la intención de que la confianza se construye.

Gravemeijer (2000) subraya este aspecto, reconoce las discusiones de toda la clase como un medio para exponer los métodos de solución en diferentes niveles, por ejemplo, al discutir los diferentes métodos se pueden encontrar algunas ventajas o desventajas sobre lo que se ha elaborado y se puede utilizar el error como puente de aprendizaje. Los diferentes niveles en los métodos utilizados y su "confrontación" en colectivo permite reconocer el trabajo con grupos heterogéneos como una vía de aprendizaje como un proceso social, como un trabajo de grupo.

[2] El error como el fracaso son elementos concomitantes en el aprendizaje y la adquisición de nuevos conocimientos, puesto que un error visto más como un gestor de conocimiento u organizador didáctico reflexivo que como un elemento negativo sinónimo del fracaso, es un elemento positivo generador de nuevos aprendizajes (Briseño, 2009).

Para desarrollar una verdadera conversación colectiva, el docente incluye otra norma, "se vale externar las dudas", se espera que los alumnos sean capaces de externar sus dudas sin sentirse vulnerables dentro del grupo. Sobre este respecto Freudenthal (1991) subrayó las "discontinuidades en los procesos de aprendizaje" esenciales para una producción de cortes breves o toma de diferentes perspectivas, es decir, se percibe cómo los alumnos han alcanzado cierto nivel de comprensión, se trata de observar los procesos de dichos aprendizajes, es por eso que cuando el alumno externa sus dudas se pueden percibir dichas discontinuidades y trabajar en las conjeturas sobre la clase.

Como se puede ver en el siguiente fragmento, el docente explica y dicta la norma esperando que los alumnos externen sus dudas y reconozcan que el no saber es algo aceptado dentro de su proceso de aprendizaje, reconociendo que la intención es apoyar el desarrollo de la TEDE y reconocer los niveles de comprensión alcanzados, es decir, las discontinuidades:

> [40] M: …Otra cosa que sí se vale es no entender, sí, ¿cuando no entienda algo que tengo que hacer?
>
> [41] (El docente levanta la mano)
>
> [42] Ao: Levantar la mano
>
> [43] M: Algo que no quiero que se valga es no entender y no decir, cuando decimos no entendí le estamos ayudando al maestro, porque yo no me puedo meter en sus cabezas para ver si entendieron o no, los que saben si entendieron o no son ustedes, entonces cuando no entendí lo tengo que decir, se vale no entender, si, lo que no se vale es no entender y no decir, y cuando decimos "no entendí" no sólo le ayudamos al maestro, le ayudamos a todos nuestros compañeros a entender, esa es una forma en la que le ayudamos a nuestros compañeros a aprender, diciendo no entendí. ¿Se vale no entender, que te expliquen y seguir sin entender?
>
> [44] (los alumnos no responden)
>
> [45] M: Sí, muy bien Lucas, sí se vale. Sí se vale que no entienda, que me expliquen y que siga sin entender. ¿Y se vale que dos veces me expliquen y que siga sin entender?
>
> [46] (sólo un alumno responde -sí-)
>
> [47] M: Sí… ¿y se vale que tres veces me expliquen y siga sin entender?
>
> [48] Aos: Sííí (a coro).
>
> [49] M: (hace seña de que espere) ¿Y de quién es la responsabilidad de entender? De todo el grupo, lo que nunca se vale es hacer sentir mal a alguien por no entender; eso tampoco lo hacemos. Vamos entendiendo cómo vamos a trabajar. Se vale no entender,

se vale equivocarse, tenemos que ser muy respetuosos con nuestros compañeros siempre…

Esta norma es importante porque “los alumnos deben de sentirse con la confianza de expresar su incomprensión, y con la obligación de expresarla cuando ése sea el caso” (Delgado y Cortina, 2020, p.339), con su instauración se espera que los alumnos vivan una mejor conversación colectiva porque como lo dice el profesor, no importa cuantas veces no se haya comprendido algo, esas serán las mismas veces que se retomará el tema para volverlo a explicar. Intentar instaurar esta norma, como el profesor lo hace, permitiría a los alumnos avanzar en una conjeturación más exacta y repensar ciertos aspectos de la TEDE que podrían mejorarse en posteriores sesiones.

Por otra parte, en el trabajo con un grupo heterogéneo no basta que los alumnos participen también es importante la escucha, se trata de generar un diálogo eficaz donde escuchar y ser escuchado permita aprovechar la diversidad de niveles que pudieran existir en la clase. Como lo planteó Gravemeijer (2005) “cuando comparan y discuten sus métodos de solución, algunos estudiantes pueden encontrar otros métodos de solución que tienen ventajas sobre sus métodos corrientes” (p.5), para que esto suceda debe existir un respeto a la participación de los demás.

Entonces, por lo importante que resultan las conversaciones colectivas, un aspecto fundamental tiene que ver con el respeto a las participaciones de los demás, pero el respeto va más allá de permanecer en silencio, se trata de promover la escucha atenta.

[49] M: ¿Cuándo un compañero está hablando que tenemos que hacer nosotros para ser respetuosos con él?

[50] Aa: Guardar silencio

[51] M: (negando con la cabeza) No basta con guardar silencio.

[52] (maestro se agarra oídos)

[53] Ao: Escuchar.

[54] M: Escuchar, sí, cuando alguien habla y no lo escuchamos, aunque estemos callados le estamos faltando al respeto, ¿ok? Entonces tenemos que escuchar siempre a quien esté hablando, ¿sale?

En el fragmento se observa cómo el docente les dice que no es suficiente guardar silencia para respetar al compañero que está hablando sino que es necesario escuchar lo que dice, pues la escucha atenta es indispensable para sostener la conversación colectiva, saber qué dijo el otro y los procesos de matematización que desarrolla ayuda a los procesos de validación entre pares, además estos procesos de escucha permiten al alumno entrar en un rol de acción y respuesta que los llevan a encontrar semejanzas y diferencias con los que los demás piensan esto les permite reconocer cuándo es apropiado contribuir al error, a la duda o al proceso Godino y Llinares (2000). Además, en una conversación colectiva resulta indispensable que participe todo el grupo, no sólo unos cuantos.

El establecimiento de estas normas es un medio esencial para apoyar el aprendizaje en grupos heterogéneos, además las normas que el profesor trata de instaurar ayudan al desarrollo de la TEDE. Instaurar dichas normas no es un proceso sencillo ni rápido y la aceleración ayuda a organizar las conversaciones colectivas en el experimento de enseñanza.

4.1.2. La Negociación de la Norma

En el apartado anterior reconocemos las normas generales como elementos clave para el desarrollo del experimento de enseñanza ya que Freudenthal (1991), Gravemeijer (2000) y Cobb (2008) señalan ciertos elementos necesarios para el buen funcionamiento de las conversaciones colectivas en grupos heterogéneos. Por esta razón instaurar de manera acelerada los elementos que permitan al alumno participar en las conversaciones colectivas parece necesario. Sin embargo, la instauración de las normas, aun con la "aceleración", no se cristaliza hasta que se hacen evidentes en las interacciones (profesor y alumnos) lo que se logra paulatinamente mediante negociaciones en la forma de trabajo.

Aún cuando los docentes explicitan las normas para acelerar su instauración, es hasta que se introducen en la actividad de la clase que cobran sentido, es decir, que existe una "reciprocidad entre la realización permanente entre la cultura del aula y el cambio en las regularidades sociales a través de los miembros individuales" (Bauersfeld, 1994, p.138). No significa que explicarlas sea tiempo perdido, al contrario es favorable que el alumno las conozca e identifique, no obstante para que se convierta en una verdadera norma, más allá de lo verbal, tienen que existir en la interacción que permite ver a los miembros cómo y bajo qué condiciones funciona la norma ya que “el énfasis se coloca en la construcción subjetiva del conocimiento a través de la interacción” (Godino y Llinares, 2000, p.71), es decir, que para el alumno la norma existe hasta que es capaz de vivirla.

Un ejemplo sobre cómo se explicita la norma en la clase se observa cuando el docente comienza no sólo a dictarla (el derecho a no entender) sino a hacerla vivencial. En el siguiente fragmento puede verse como el maestro en la misma clase reconoce el no saber cuando intensifica lo que ha dicho Cecilia, “no sé”:

> [93] M: Cecilia, ¿Siempre se ha medido con la regla? (se acerca a su lugar)
>
> [94] Aa: No.
>
> [95] M: Entonces, ¿cómo media la gente cuando no había reglas…? pues no median. Cecilia, ¿cómo crees que media la gente cuando no había reglas?
>
> [96] Cecilia: (pensativa) No sé…
>
> [97] M: ¿No sabes? Muy bien, fíjense lo que acaba de decir Cecilia, ¿qué dijo?
>
> [98] Aos: ¡No sé!
>
> [99] M: Vamos a darle un aplauso.
>
> [100] (todos aplauden)
>
> [101] M: Porque con eso nos ayuda a todos, ¿verdad? Justamente cuando no sabemos algo decimos “no sé” y eso ayuda mucho, fíjense Cecilia acaba de hacer algo muy importante y nos acaba de poner un muy buen ejemplo de algo que tenemos que imitar todos, ¿verdad?...

Como se puede apreciar, la norma que el docente explicita se incluye en la clase, “se vale decir que no entendí” pero es hasta la interacción en la clase que el alumno se apropia de la idea y puede externar un “no sé”. Buscar la aceleración de esta norma es un intento para que los alumnos se sientan con derecho a no entender y lo externen públicamente, es tal la importancia de esa norma que, como se puede ver en el siguiente fragmento, es necesario explicitar constantemente para que el alumno se apropie de ella.

> [486] M: … Fíjense, parece tan sencillo medir con las partes del cuerpo, ¿pero no es tanto verdad? ¿Es un poco complicado verdad? A los antiguos, aunque no tenían reglas o centímetros ¿se les complicaba verdad? ¿Cómo mediremos con las manos? ¿Cómo mediremos con cuartas? ¿Quién nos podría enseñar cómo mediremos con cuartas?
>
> [487] Aos: (permanecen en silencio)

[488] M: A ver, pase, él quiere medir con cuartas el pizarrón. Vamos a ver si lo mide bien, en voz alta para que todos escuchemos cómo está midiendo. A ver, es tarea de todos chicos tratar de entender lo que estamos contestando, ¿si no entiendo qué hago?

[489] Ao: Pregunto

[490] M: Levanto la mano, pregunto ¿está bien no entender?

[491] Aos: Sí.

[492] M: ¿Qué es lo que no está bien?

[493] Aos: (varios opinan)

[494] M: No entender y no decirlo y hacer sentir mal a alguien por no entender, entonces vamos a ver, sale.

Aquí pueden apreciarse dos elementos importantes, el primero está relacionado con la instauración de la norma que se ancla y desarrolla conforme las interacciones se llevan a cabo. El segundo se relaciona con la importancia de que el alumno sea capaz de externar un "no sé", porque, aunque todo el mundo está en el juego, unos serán capaces de entender y otros no, y parte fundamental de lo que se intenta desarrollar es el conocimiento compartido.

En otra sesión se observa que el derecho al error sigue presente, el docente lo hace explícito para recordarles su importancia como parte de la actividad matemática. Se puede observar la importancia de explicitar el "no saber", dentro del fragmento la alumna niega saber la respuesta y tiene la confianza de decirlo abiertamente, este tipo de situaciones permitirá que otro compañero pueda orientar las ideas erróneas.

[148] M: A ver, vamos a dar la oportunidad a otros de pensar, Daniela ¿tú que crees, me va a salir grande o chico?
[149] Daniela: Chico
[150] M: ¿por qué crees que es chico?
[151] (Daniela dice no con la cabeza, varios niños levantan la mano, Lucas dice yo)
[152] M: ¿no sabes? Ok, a ver un aplauso a Daniela porque contestó y nos dijo que no sabe, ¿verdad?, y eso está muy bien. (El grupo aplaude). Vamos a escuchar a otros compañeros a ver cómo lo explican ellos ¿verdad?

El "derecho al error" es un aspecto importante en la TEDE y al explicitar la norma, el docente pretende adentrar a los alumnos al mundo de los matemáticos en el que matematizar no es un proceso lineal de aciertos, sino que a través de los errores se puede construir conocimiento, es por ello por lo que el profesor las hace evidentes en clase, como podemos observar el docente reconoce el error de una alumna y cuando los demás ríen, pide respeto porque ella actúa según la norma "se vale equivocarse".

> [601] M: A ver chicos, vamos a retomar (se acerca al pizarrón), levante la mano quién crea que Jacinto tiene la mano más grande de todos.
>
> [602] (una alumna levanta la mano y los demás se ríen)
>
> [603] M: ¿se vale equivocarse o no, chicos?
>
> [604] Aos: sí se vale
>
> [605] M: Entonces por qué nos reímos, eso es hacer sentir mal a la compañera, no tenemos porqué hacer sentir mal a nadie, nunca, ¿se vale equivocarse?
>
> [606] Aos: Sííí…
>
> [607] M: Entonces, Jacinto levantó la mano y no quería decir, ¿no pasa nada, ¿verdad? Me puedo equivocar perfectamente, pero esta clase es de matemáticas y todos los matemáticos se equivocan.

Reconocer el error en clase permite a los alumnos externar sus métodos sin temor de haber desarrollado una estrategia "incorrecta"[3], pues que, como lo dice Santamaria "el tener que alcanzar metas pasó a ser menos importante que la manera en que dichas metas son alcanzadas" (s/f, p. 9). Otra norma establecida por el docente establece que "una forma de respetar a mis compañeros es escuchando", cuando fue explicitada no tuvo mucho sentido para los alumnos, pero conforme transcurren las clases los alumnos la reconocen en la acción, aunque como puede observarse en el siguiente fragmento, el trabajo del profesor consiste en subrayarla a cada momento para que pueda ser internalizada.

> [346] M: A ver, fíjense vamos a escuchar a todos porque aquí acaba de pasar algo muy interesante, algunos piensan de una forma y otros piensan de otra, ¿verdad?
>
> [347] Ao: No se puede hacer maestro, se puede hacer con las manos.
>
> [348] (docente escucha, pero prosigue)
>
> [349] M: A ver, pero ¿por qué crees que medí mal Lupita?
>
> [350] Lupita: porque primero hizo…

[3] Lo ponemos entre comillas porque el camino de los matemáticos y de la reinvención requiere de esos errores para poder reinventar el objeto matemático

[351] (los alumnos hacen ruido y platican entre ellos)

[352] M: A ver (alzando la voz) le estamos faltando el respeto a una compañera, porque Lupita está hablando y no la estamos escuchando, ¿ok?

[353] (los alumnos guardan silencio)

[354] M: Entonces, vamos a escuchar a Lupita…

Un aspecto fundamental de la TEDE es que los alumnos participen en un aprendizaje colaborativo y una de las formas de lograrlo es a través de las conversaciones colectivas, como lo hemos mencionado, para que éstas funcionen es necesario escuchar lo que tiene que decir el otro para relacionar su intervención con la propia, esto es una manera de reflexionar la actividad matematizadora. Se trata entonces de dotar de sentido a los procesos sociales a través de la norma, es decir, "respetar escuchando" adquiere sentido cuando se hace necesario hacerlo en la vida del aula (Godino y Llinares, 2000). La norma referida al respeto resulta indispensable para lograr avanzar, pero es una de las que más cuesta trabajo a los alumnos internalizar, por ello conforme pasan las sesiones, el profesor hace explícita la necesidad de escuchar a los demás, como se puede apreciar, es necesario recordarles que una de las formas de llevar a cabo las conversaciones colectivas es escuchar a los demás, por ello insiste en recordarles que es necesaria la escucha atenta.

[67] M: ¿Y han visto que en algunas tiendas y negocios también?

[68] Ao: Sííí

[69] Fabiola: Una vez vi una casa así con muchas… (interrumpe el docente)

[70] M: César, Denisse ¿estás oyendo a María Fabiola? ¿si la escuchaste?

[71] (Con la cabeza dice no)

[72] M: ¿No? entonces ¿qué tenemos que hacer María Fabiola?

[73] Fabiola: Escuchar

[74] M: Denisse ¿qué tenemos que hacer?

[75] Denisse: escuchar.

[76] M: escuchar ¿verdad? porque acuérdense que es falta de respeto no escuchar a alguien, ¡entonces platícanos!

La escucha considera la clave para que las conversaciones colectivas lleven al alumno a niveles de comprensión más elevados, se trata de “mantener la clase general junta como una unidad de organización o al trabajo cooperativo en grupos heterogéneos” (Bressan, 2004, p.9). Es por eso que esta norma resulta útil para el desarrollo de la TEDE, ya que como lo mencionaron Planas e Iranzo (2009) “hay normas vinculadas a la actividad matemática que son propias de la puesta en práctica de objetos y procesos matemáticos” (p.184), en este caso, considerar las conversaciones colectivas como esenciales, la escucha respetuosa, el derecho al error y la necesidad de expresar lo que no se entiende, resulta elemental para alcanzar los objetivos de las prácticas en la TEDE, es por eso que se introduce en el proceso de aceleración y explicitación de la norma a lo largo de la clase.

4.1.3. La Interacción en la Clase. La Norma Implícita

El desarrollo de una clase es un evento social donde se instauran normas para regular las interacciones que ahí se suscitan, en ocasiones dichas normas no pueden esperar el tiempo que un “contrato” en clase podría llevar, por lo que el docente decide hacerlas explícitas para tratar de instaurarlas lo más rápido posible. Al explicitar las normas se espera que el alumno “acelere” las modificaciones en su conducta y desarrolle mejores interacciones, sin embargo las normas que fueron explícitas en un principio, paulatinamente se vuelven implícitas y terminan por ser parte de la dinámica de clase.

Como lo mencionaron Planas e Iranzo (2009) “las normas de adecuación que se piden a los alumnos no siempre coinciden con las normas que rigen las actitudes del profesor” (p.184), por esta razón en este apartado nos dedicamos a analizar cómo las normas que se explicitan se van integrando a la lógica de la clase para que, en un momento, los alumnos no sólo sigan las normas, además colaboren con su plena instauración. Este aspecto puede observarse en el siguiente fragmento, donde lo implícito de la norma hace que el profesor juegue un rol diferente, en lugar de decir a los alumnos que se vale equivocarse, se ubica como un participante más de la clase y demuestra con el ejemplo que el error puede significar una oportunidad de aprendizaje para toda la clase.

[461] M: ¿Qué piensan de esa forma de medir?

[462] Aos: “¡Qué está mal! (se escuchan más murmullos)

[463] M: Fíjense, voy a medir como él. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (avanzando menos de un pie, se sobreponen), qué problema hay ¿Qué problema hay Yuya?

[464] (otros alumnos levantan la mano)

[465] Ao: Está cortando espacios.

[466] M: A ver quién más, nada más. ¿Qué problema hay este… Dominic? ¿Qué problema hay?

Como se puede observar, intencionalmente el docente hace evidente un error al medir con los pasos, "provocar el error" es una estrategia que puede verse desde dos ángulos: es un intento por conducir al alumno hacia la reflexión a través de estrategia de solución inadecuada, en otras palabras, "se trata de crear oportunidades para que los alumnos puedan abocarse a actividades similares de los matemáticos" (Santamaria, s/f, p. 11), en un proceso de reinvención guiada[4]. Desde otro ángulo es un intento para que los alumnos detecten el error y reconozcan que, más que representar un problema puede ayudar a comprender y mejorar lo que están realizando.

Ahora bien, la norma que se intenta establecer pretende iniciar una reinvención guiada en la que, a través del discurso y del actuar matemático, los alumnos puedan "crear" conceptos y objetos matemáticos, al igual que lo hicieron los matemáticos, pues según Freudenthal (1991) la noción de matematizar no significa verter el conocimiento sobre el alumno sino que ellos reinventen la matemática.

[569] M: A ver, vamos a escribir en nuestra hoja, abajo. Quién tiene la mano más grande, quién tiene la mano más chica y por qué. Porque nos dicen que media diferente porque teníamos la mano diferente.

[570] (los alumnos escriben, mientras el docente recorre los lugares de los alumnos y se detiene a conversar con algunos)

[571] M: Yo creo que Javier, porque 18 es un numerote, yo creo que Javier tiene la mano más grande.

[572] Ao: Y usted maestro

[573] M: Mande

[4] En el capítulo siguiente se analizará con mayor profundidad la reinvención guiada.

[574] Ao: Y usted maestro tiene más grande

[575] M: ¿Cómo? Si 10 es un número bien chiquito

[576] Ao: Sí, pero la mano es más grande

[577] (los alumnos siguen respondiendo – algunos comentan entre sí - y el docente monitorea su trabajo al pasar por sus lugares)

[578] (el docente comenta con un grupo de alumnos -mi mano es más chiquita porque fueron menos veces- los alumnos le debaten diciendo que no, que la tiene más grande)

Puede apreciarse que los alumnos deben encontrar la relación entre el tamaño de la medida (cuartas) y el espacio que ocupa, es cuando el docente "comete el error" al suponer que al iterar una mano más veces es más grande que la que itera menos veces. Algunos alumnos reconocen el error y lo corrigen, con ello demuestran que "hasta el maestro" puede cometer un error y, al externar sus ideas pueden disipar ese error sin que signifique algo negativo. También es importante observar que a través del ejemplo el profesor introduce una norma anteriormente estipulada, que el alumno no tenga miedo a equivocarse, que conjeture pensando en aprender y descubrir, más que en ver si está bien o mal.

Sobre la instauración de las normas Godino y Llinares (2000) mencionan que en las interacciones sociales del aula no se genera la norma de un conocimiento objetivo a un conocimiento subjetivo, sino que las mismas interacciones sociales hacen posible que las ideas subjetivas lleguen a ser compatibles con la cultura, es decir, que al dictar las normas no se interiorizan y se instalan en el aula como por arte de magia, sino que se interiorizan hasta el momento en el que las interacciones van generando dicha norma.

Otra norma necesaria para las conversaciones colectivas tiene que ver con la confianza de los alumnos para expresar su incomprensión. El docente había explicitado la norma que daba el "derecho a no entender" y decir "no sé", sin embargo, la verdadera instauración de la norma se da en las interacciones de la clase, en el siguiente fragmento vemos que sin que el profesor lo pida explícitamente, los alumnos manifiestan su confianza para decir que no conocen la respuesta.

[102] M: A ver Román y ¿cómo empezamos a medir? ¿Cómo se empieza, de dónde vas a medir?

[103] (Román mueve sus hombros en señal de no saber, pero el maestro apoya)

[104] M: A ver, abre bien tu mano, (trabaja junto con el niño) así ¿verdad? porque vas para allá, ok, entonces ciérrala, pero este dedo se queda tocando, juntas tu pulgar.

[105] (a Román se le complica abrir y cerrar su mano, para contar la siguiente cuarta)

[106] M: a ver, fíjate en Leticia sí lo va a hacer, ponte atrás de ella (para ver lo que hace), fíjate cómo lo va a hacer Leticia, pon mucha atención (Leticia cuenta y Román a lado de ella), muy bien Leticia, (luego se refiere a Román) ¿cree que si lo puedas hacer? (Román se pone a medir)

[107] (Román pone y quita su mano y trata de seguir donde se quedó, algunos niños se ríen, él voltea con el maestro y quita sus manos)

[108] M: ¿No?, ¿te cuesta trabajo?

[109] (el niño lo mira a los ojos retrocede un paso y sólo mueve sus manos hacia atrás)

[110] M: Qué tal que le haces así (pone sus manos sobre la bandera una y enseguida pone la otra abierta ya en su cuarta, Román observa), así ¿si crees que puedas?

[111] (Román comienza a medir)

Román tiene dificultades para actuar y aunque en un inicio se niega a externar que no sabe, el apoyo del maestro y sus compañeros le da la seguridad para poder decir (de forma no verbal) que necesita ayuda. Este tipo de experiencias permiten comprender que es válido "no saber" y que externarlo no genera ningún problema. Así, la norma que en un principio fue dictada, cobra sentido cuando es puesta en acción porque "los significados en la clase de matemáticas tiene lugar en interacción con la cultura de la clase, y al mismo tiempo contribuyen a la constitución de la cultura" (Cobb y Bauersfeld, 1995, p.5), esto es, la aceleración de la norma (el dictado) tiene sentido hasta que la comunidad del aula la pone en marcha y va instaurando ciertos "contratos" en el aula, explicitar servirá pues de guía para que se trabaje de manera implícita en un futuro.

En el siguiente fragmento puede observarse otro ejemplo de cómo las negociaciones van tomando sentido y los elementos que consideramos necesarios para la conversación van formando parte de la clase:

[164] M: Ana Corina

[165] Ana Corina: Entre más grande sea la mano más espacio ocupa y menos son las medidas.

[166] M: Ah! ¿Le entendiste Daniela, le entendiste a Ana Corina?

[167] (Daniela dice que no)

[168] M: No, ok. ¿la escuchaste o no? (Daniela asiente con la cabeza), a ver vamos a escucharla todos. ¿sale?, Ana Paula, bien fuerte.

[169] Ana Paula: Porque entre más grande sea la mano, más espacio ocupa, pero menos medidas.

[170] M: Entre más grande sea la mano más espacio ocupa, pero menos medidas, ¿entendiste Daniela? ¿ahora sí? (Daniela mueve la cabeza en señal que sí) ¿lo puedes explicar? (mueve la cabeza en señal de no), Azucena ¿tú lo puedes explicar?, ¿estás de acuerdo o no con lo que dice? entre más grande sea la mano ¿o cómo es?

[171] Ana Corina: más espacio ocupa

[172] M: pero menos medidas ¿verdad?

La alumna encuentra confianza para decir que no sabe, a pesar de ello le genera algo de inseguridad volver a decir que no ha comprendido, cuando el docente le pide explicar y se ve en la necesidad de decir que no, el docente continúa explicando en lugar de evidenciar que no sabe, este tipo de acciones le permiten al alumno generar la confianza necesaria para poder externar de manera libre que no ha comprendido porque el docente y sus compañeros ayudan a que logre la comprensión, a medida de que estas interacciones se repiten, se convierten en un formato de interacción aceptado y estándar (Godino y Llinares, 2000), en una norma asumida.

Las normas regulan ciertos aspectos específicos de las interacciones en clase que influyen en las oportunidades de aprendizaje y estos aspectos regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes, en nuestro caso dichas normas rigen las discusiones colectivas necesarias para alcanzar los principios estipulados en la EMR.

Una de esas normas hace referencia al respeto, no sólo se cree necesario admitir que “no sé”, también es necesario escuchar (escucha activa) al docente y compañeros para comprender mejor la práctica matemática sobre la que se trabaja. Esta norma que hemos denominado “respetar a los demás” implica escuchar a los otros y pretende ser una vía para optimizar el aprendizaje, puesto que además de estar en sintonía con el principio de interacción, se pueden generar herramientas que permitan ampliar el campo conceptual al reconocer estrategias y conocimientos que los demás tienen. A pesar de que puede ser “habitual” la transferencia de rutinas ligadas a la actividad matemática la interiorización de las normas se da, como ya lo hemos mencionado, a través de las interacciones y es hasta entonces que forman parte de la dinámica de la clase.

> [322] M: Esta es una historia ¿a ver si la quieren escuchar? (los niños no responden de forma concisa). Esta es una historia que me platicaron …
>
> [323] Aos: Hace muchos años.
>
> [324] M: ... en Chiapas, me la platicó una guardiana de la memoria. Era una señora anciana a la que le habían platicado esta historia, su abuela se la había platicado y a su abuela su abuela y a la abuela, la abuela de la abuela y es una …
>
> [325] (se escucha ruido)
>
> [326] M: A ver, no me están dejando hablar (silencio por parte del docente) ¿Quieren conocer la historia que me platicaron o no?
>
> [327] Aos: Sí.

Como se puede apreciar, a pesar de que la norma "está" porque el docente la dictó, los alumnos no la han asumido, no respetan la participación de los otros, en este caso la del docente, pues en el momento que menciona que no le están dejando hablar reconocemos que no hay respeto al escuchar al otro. Resulta indispensable que en la clase todos se escuchen entre sí y sean capaces de expresarse reconociendo que el otro va a escuchar, la esencia de las conversaciones colectivas gira en torno a esta norma pues se busca que los alumnos participen en las "discusiones en torno a las soluciones propuestas por los mismos, de modo tal de hacer visible y explícita la trayectoria hacia niveles de generalización, más formales, eficientes y sofisticados" (Bressan et al., 2004, p.8), es decir que den pie a la matematización y reinvención.

La estrategia del docente para hacer implícita la norma tiene que ver con "pedir respeto sin pedirlo", cuestionar si quieren escuchar o no la historia es una forma de decirles que si no existe el respeto no se puede continuar. "Las normas y su producción son transparentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje; con esto queremos decir que vemos los efectos de las normas sin verlas a ellas, y que su producción ocurre sin hacerse notar" (Planas y Boukafri, 2019, p. s/n).

En el siguiente fragmento el docente pide escuchar a una alumna, a pesar de que en un primer momento sus compañeros no lo hacen, al ser ignorada la norma el profesor decide no repetirla sino intervenir directamente con quienes la infringen y solicitar su atención como un mecanismo de interiorización.

[170] M: Vamos a ver si es cierto, ¡ayúdame a contar! (mueve manos, vamos a ejercitarnos e inicia la actividad, pone su mano, en cuarta sobre la bandera)

[171] Aos: una, dos, tres, cuatro… (varios niños comparten el resultado)

[172] M: midió cuatro, vamos a apuntarlo por aquí (anota en el pizarrón "4 manos")

[173] (Las niñas se cuestionan, ¿son cuartas no?)

[174] M: A ver chicos, ahora vamos a usar la imaginación, va a entrar Margarita al salón (un niño buenos días) y está midiendo la bandera y Margarita midió….

[175] Lucas: es que no sabemos si es una niña grande o chiquita.

[176] M: ¡Muy buena pregunta!, fíjense cuántas manos midió Margarita (apunta en el pizarrón 20 manos), ¿es muy grande?

[177] Aos: Es muy chiquita, es bebé (muchos responden a la vez chiquita)

[178] M: A ver, vamos en orden, levanten la mano ¿quién cree que Margarita tiene la cuarta muy grande?

[179] (varios niños dicen que es muy chiquita, con su mano)

[180] M: A ver estamos usando nuestra imaginación

[181] Jaime: Es una niña de 4 años.

[182] M: Vamos en orden, vamos en orden. No nos estamos poniendo a escuchar unos a otros, entonces, este Lupita tiene algo que decir, tiene que hablar bien fuerte.

[183] Lupita: tiene la mano muy chiquita.

[184] M: Tiene la mano muy chiquita. ¿por qué crees que tiene la mano muy chiquita? vamos a escuchar a todos, ¿Sale? Daniela, Azucena, las dos, ¿qué crees que tiene la mano grande chiquita?, Azucena.

[185] Azucena: Chiquita.

[186] M: ¿No estás segura?, ¿Estás pensando? ok. tú Daniela ¿qué crees?

Las normas se observan al identificar regularidades en la interacción, en este caso una regularidad es guardar silencio para que el docente escuche a los alumnos tienen que decir, pero también que los alumnos se escuchen para identificar aquello que les pueda ser útil o para identificar quién piensa igual o diferente de ellos. Para el docente la escucha de la clase significa estar en una conversación colectiva, cuando esto deja de suceder es necesario que intervenga para hacer de la norma un ejercicio de interiorización.

Las normas son elementos indispensables para la gestión de la clase, en diversos estudios se analiza su naturaleza y alcances, sin embargo, para desarrollar una propuesta desde la perspectiva de la EMR resulta fundamental organizar discusiones colectivas donde se ejerza el derecho al error, la oportunidad de expresar un desconocimiento y el respeto para las opiniones de los demás.

4.2. LA PARTICIPACIÓN EN LAS CONVERSACIONES COLECTIVAS

Para Freudenthal (1991) es importante pensar la clase como un lugar donde se trabaja de forma colaborativa y aunque el grupo presente diferentes niveles de comprensión y conceptualización matemática, el objetivo es que todos los alumnos puedan participar del mismo trabajo. En este sentido, "el aprendizaje de las matemáticas es considerado como una actividad social donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos" (Bressan et al., 20016, p. 6), por ello en los momentos de la conversación colectiva no solo deben estar inmiscuidos unos cuantos porque entonces los "otros" se quedarían fuera de la construcción del conocimiento, se trata entonces de introducir a todos, incluso a los alumnos con niveles de razonamiento bajos porque al reconocer su desconocimiento permiten que el profesor identifique lo que sería necesario trabajar más.

Hasta este momento hemos presentado las normas esenciales para las conversaciones colectivas, dichas conversaciones presentan características que necesitan ser transformadas para que las normas "dictadas" se conviertan en parte de la clase, sin embargo muchas normas no explícitas rigen también las interacciones, para instaurarse resultan claves las primeras sesiones de clase ya que es en éstas donde docentes y alumnos edifican los principios sobre los cuales se van a orientar sus interacciones porque "las normas sociales generales como las normas socio-matemáticas se infieren al identificar regularidades (o rupturas) en los patrones de interacción social" (D'Amore et al., 2007, p.52). En este apartado se analiza una norma general necesaria para el desarrollo de las conversaciones colectivas, la participación en las conversaciones.

En las primeras sesiones, cuando se intenta instaurar las conversaciones colectivas, el docente juega un papel crucial para facilitar la conversación entre los alumnos, para ello debe ser capaz de anticipar quién no se está incluyendo en la clase y tomar decisiones sobre tal inclusión, como puede apreciarse, en este momento de la clase el docente hace preguntas directas a algunos alumnos con la intención de que se incluyan en la clase y poder mantener la idea de "colectivamente".

[474] M: ¿Tú qué piensas Dominic, ¿cómo mide?
[475] Dominic: (duda en responder) que está bien.
[476] M: ¿Qué está bien? ¿Quién piensa que no está bien? ¿tú qué piensas Daniela?
[477] (alumna no responde)
[478] M: ¿está bien o no?
[479] (Daniela niega con la cabeza)
[480] M: Por qué no
[481] Daniela: Porque está dejando espacio
[482] M: Porque está dejando espacios.
[483] Ao: Porque está adelantado los pasos

Conforme avanza la clase el docente puede percatarse quiénes no se incluyen en la conversación colectiva y su deber como guía es hacer que estos alumnos puedan integrarse y participar de una u otra forma, por eso el docente pide participaciones directas a los alumnos que intenta incluir al trabajo del aula.

Como las conversaciones colectivas son esenciales es "el docente quien maneja estos eventos con miras a maximizar oportunidades para la producción, el intercambio y la apropiación de ideas por parte de los alumnos" (Bressan et al., 2016, p. 6). A través de la observación y la participación en la clase es capaz de incluir a todos, en especial a aquellos que parecen salir de la discusión y aunque no puede estar totalmente seguro de quiénes requieren ser reorientados hacia la conversación, es capaz de intuir, de hacer partícipes a ciertos alumnos con la idea de generar un acto de aprendizaje.

[535] M: A ver, dije pensar, no contestar. ¿Qué vamos a pensar todos en esta pregunta?, vamos a darles a todos el tiempo para pensar. Tampoco dije hablar (ante el ruido que se presenta), dije pensar. ¿Por qué no nos dio igual? Si se habrá equivocado alguien por eso, por eso no nos dio igual. ¿Alguien ya sabe? ¿Denisse, tú ya sabes por qué no nos dio igual?
[536] (varios alumnos alzan la mano)
[537] M: ¿no sabes? Mario ya pensó, Ana, tú ya sabes por qué no nos da igual

[538] (niega con la cabeza, mientras demás alumnos levantan la mano)
[539] M: Ana no sabe por qué no nos dio igual, ok, Victoria, ¿tú ya sabes por qué no nos dio igual, ya sabes o no, ya pensaste?
[540] (afirma)
[541] M: ¡Que bien que ya pensaste Azucena!, ya pensaste por qué no nos dio igual. (dice cuando la alumna niega) ok, creo que la mayoría ya pensó. Daniela, tú ya pensaste por qué no nos dio igual, tampoco. A ver, hay algunas, y creo que la mayoría son compañeras, que no han pensado por qué no nos dio igual, entonces ésta es la tarea de ustedes, sí, de quienes no han pensado de por qué no nos dio igual; Daniela, Dennis ésta es tu tarea ahorita, escuchar a la persona que va a hablar y le vamos a tratar de entender, y si no le entendemos qué vamos a hacer.

Un aspecto clave para que la TEDE pueda seguir su curso es la instauración de las conversaciones que deben cumplir ciertas características, la más importante es que no pierdan su esencia de "colectivo", recordemos que en la matemática realista se considera el aprendizaje como una acción social en la que los métodos y estrategias de unos puedan resultar útiles para los otros, es decir, las discusiones colectivas son una forma evidente de aprovechar el razonamiento de los estudiantes (Cobb et al., 2008).

Las interacciones entre los alumnos ayudan a que generen ideas que les permitan la reinvención del objeto matemático, por ello su participación es clave en la construcción de su conocimiento, cuando todos tienen noción de lo que se está trabajando se puede avanzar con más consistencia en los niveles de razonamiento, una de las formas de involucrarlos en las conversaciones es a través del planteamiento de preguntas directas.

[495] M: Entonces fíjense, cuando medimos el pequeño de dos es una varita que cuando medimos el tije, el tije mide dos ¿entendimos eso o no?
[496] (silencio)
[497] M: Entonces fíjense, éste será el pequeño de dos (sujeta pequeño) a ver, voy a medir el tije a ver si mide dos, uno, dos, tres… no, no es
[498] Aa: Se pasa
[499] M: ¿Necesito algo más largo o algo más corto? Cuando mida yo esto, tiene que medir dos (tije). Tú que crees Yuya, necesito algo más largo o más corto
[500] (no responde)
[501] Aos: más largo
[502] M: quién está de acuerdo con Yuya que necesito algo más largo
[503] (varios alumnos alzan mano)
[504] M: Luis Humberto
[505] Luis Humberto: Necesitamos un palito que mida medio Tije

La participación de todos resulta crucial para mantener las conversaciones colectivas, escuchar y analizar el razonamiento de los otros es determinante en el desarrollo en nuestro experimento de enseñanza, sin embargo, no podemos olvidar a aquellos que parecen estar ausentes o que sus participaciones no son activas, en ese caso el rol del docente es reintegrarlos en la conversación.

En el desarrollo de estas primeras sesiones se intenta que los alumnos conozcan la dinámica de las conversaciones colectivas, por ello se aprecia cómo el docente pide constantemente la participación de los alumnos que parecen no estar activos porque se trata que todos aporten a la discusión, que sean capaces de externar sus ideas aun con errores y que sepan decir “no sé” o no entendiendo, en síntesis se busca construir una matematización progresiva para todos.

4.3. LA VERDADERA INSTAURACIÓN DE LA NORMA GENERAL

Para Cobb et al., (2008), las conversaciones colectivas son esenciales para el desarrollo de un experimento de enseñanza, no obstante al momento de desarrollar la TEDE intervienen factores que dificultan la instauración de las normas generales, por ejemplo una dificultad es el investigador (no docente) que desarrolla el experimento, otra es el tiempo[5] que genera la necesidad de entrar en la “aceleración” de la norma.

En este último apartado se analizan las normas que se hicieron parte de la clase y aquellas que quedaron un tanto alejadas de formar parte de ella. Estas normas generales nacen de un interaccionismo simbólico en el que se expresa una idea clave que “el significado se desarrolla en (y a partir de) la interacción e interpretación entre los miembros de una cultura” (Godino y Llinares, 2000, p.72) y a pesar de que se “dictan” las normas colectivas, hasta la cuarta sesión los alumnos no han llegado a hacer suyas y como parte de la clase a algunas.

Para comenzar con el análisis nos gustaría enfatizar que una de las ideas clave de los experimentos de enseñanza es que los investigadores analicen las sesiones ejecutadas para observar a través de las videograbaciones qué se está haciendo y cómo se está realizando, con

[5] El tiempo es un factor en este caso puesto que, a diferencia del profesor titular, el experimentador tendrá al grupo de alumnos un tiempo limitado, lo que hace necesaria la aceleración

la finalidad de realizar los ajustes necesarios y poder conjeturar próximas sesiones bajo los objetivos planteados; es por eso que al inicio de la tercera sesión el docente hace hincapié en recordar ciertos elementos de las normas generales que ha dictado al comenzar el experimento.

[1] M: Ya es la tercera sesión y he estado viendo los videos que está haciendo la maestra y yo estamos muy contentos cómo han ido razonando y pensando, ¿si?, pero todavía creemos que podemos mejorar, sobre todo en lo que tenemos que hacer para ayudar a todos a aprender. Se acuerdan ¿cuáles eran las normas que pensamos eran las importantes para ayudar a todos a aprender y pensar?

[2] (los alumnos no responden, están en su lugar callados)

[3] M: ya se les olvidaron ¿Nadie se acuerda? ¿eh? ¿qué tengo que hacer cuando hablan mis compañeros?

[4] Ao: Escuchar

[5] Aa: Guardar silencio

[6] M: Guardar silencio, pero no basta con guardar silencio.

[7] Ao: poner atención.

[8] M: Hay que poner atención a lo que dice nuestro compañero ¿verdad?

[9] M: ¿qué no se vale hacer ?

[10] Ao: No burlarnos de alguien

[11] (aún están entrando algunos niños a la clase)

[12] M: Nunca hacemos sentir mal a alguien, sobre todo si lo que dijo pudo haber sido una equivocación o un error, ¿está bien equivocarse?

[13] Aos: Sí

[14] M: ¿se vale equivocarse?

[15] Aos: sí.

[16] M: Eso es bien importante que dejemos que todos se pueden equivocar ¿verdad?, en la historia de las matemáticas ¿apoco creen que los matemáticos, ya entendieron todo así de… (chasquea los dedos)

[17] Aos: No.

[18] M: No, ¡verdad!, conforme fueron estudiando y aprendiendo las matemáticas, y miren que empezaron hace miles de años, conforme fueron estudiando y aprendiendo las matemáticas se equivocaron, entonces era algo mundano, ¿si?, les digo porque en el video que vi, hubo un momento en el que uno de sus compañeros, Mario, dijo una opinión diferente a la de ustedes cuando estábamos pensando en el tamaño de la manos, él pensó que era chica, era grande y la mayoría pensaron que era chica y nos reimos muy

fuerte, casi todo el grupo se rio, si, entonces eso lo tenemos que evitar ¿aja? aunque se haya equivocado Mario está bien, no hay por qué reírnos. mmmj!!!, entonces a nombre de todo el grupo Mario, te pido una disculpa, por esa vez, ¿si?, ¡gracias!

El fragmento anterior nos muestra cómo dentro del desarrollo de la misma TEDE se puede avizorar que las normas generales necesarias para las conversaciones colectivas aún no estaban completamente instauradas y que era necesario reforzarlas, sin embargo en el desarrollo de las siguientes sesiones se puede observar que unas quedan más interiorizadas que otras.

Podemos considerar que el "no saber" es motivo de vergüenza y burla, pero a pesar de eso, dentro de las conversaciones colectivas y el desarrollo de la misma TEDE resulta indispensable que los alumnos externen sus dudas como un elemento de ayuda y guía para que el docente pueda desarrollar la TEDE adecuadamente. En la EMR se reconoce la actividad matemática como una actividad humana, como una actividad en la que, en muchas ocasiones no se sabe todo, incluso lo que pudiera parecer obvio. Por ejemplo, en el desarrollo de la tercera sesión se les pide a los alumnos que midan objetos con el "Tije[6]" y se esperaría que todos los alumnos supieran medir de forma reiterada después de las dos primeras sesiones, a pesar de, un alumno hace conciencia de la norma y lo externa:

[216] M: A ver Mario pasa a medir este libro, a ver cómo lo hace Mario. Esa es una buena pregunta, ¿cómo le hará para medir este libro?

[217] (Mario mide con la vara, cuenta uno, dos…)

[218] M: ¿Vieron cómo midió Mario?

[219] Aos: sí

[220] M: a ver, abierto el libro ¿cuánto medirá? (el libro está abierto y se mide horizontalmente)

[221] (Mario mide, pone la vara, pone el dedo, vuelve a poner la vara, la quita y la pone nuevamente y sale un cacho del libro)

[222] Aos: dos, dos y medio

[223] Aa: Dos tijes y medio

[224] Mario: dos y medio

[6] El tije es considerado la medida estándar por los Acajay dentro de la historia para el desarrollo de la TEDE, la cual representa una unidad.

[225] M: Pero a ver, ¿quién preguntó cómo medimos?

[226] (César juega con la vara, pegandole a la pared)

[227] M: Antonio, ah no, este… Dominic, muy bien Dominic, muchas gracias por preguntar eso, le ayudaste a todo tu grupo, si, ¿alguien tiene duda de cómo vamos a medir?

Como vemos la actividad pareciera sencilla y que todos la podrían realizar, sin embargo, para un alumno medir con el "Tije" resulta algo diferente, por ello externa "no sé" mediante la pregunta "¿Y cómo se mide?", con ello demuestra que, aunque el profesor conjeturó que todos sabrían cómo medir no era así. Con esta norma se da al alumno la oportunidad de explicar y su duda, pero al maestro le da la posibilidad de resolver la duda de ese alumno en específico y tal vez de otros que tuvieran la misma, en este sentido se considera que externar aquello que se desconoce puede ayudar al docente a redirigir la clase ya que "la EMR coloca el razonamiento matemático de los estudiantes en el centro del proceso del diseño mientras que al mismo tiempo se propone los medios específicos por los cuales el desarrollo de su razonamiento puede ser apoyado sistemáticamente" (Cobb et al., 2008, p.3) y qué mejor forma de apoyar que sabiendo las necesidades específicas de uno o varios alumnos.

Por otra parte, es importante resaltar que si bien hay alumnos que son capaces de externar sus dudas, otros guardan silencio cuando no entienden algo y permanecen en el anonimato, sin embargo, cuando el docente les cuestiona o les pide que expliquen aquello que se ha reflexionado en la clase, ponen de manifiesto no saber, por ejemplo, ante una explicación sobre cómo se debería llevar a cabo la medición varios alumnos no comprenden de qué se habla y no lo externan:

[339] M: ¿si?, ¿alguien no entiende? ¿entendemos Azucena o no estás muy segura?

[340] M: No estás muy segura, entonces me lo tienes que decir, ¡muchas gracias! ¿quién más todavía no le entiende? ¿quién sí me entiende? ¿tú me entiendes Mario?¿Lo puedes explicar tú?

[341] (Mario mueve la cabeza en señal de no)

[342] M: ¿alguien que no haya pasado que me pueda ayudar a explicarlo?

[343] (los niños se quedan callados)

[344] M: Ana Paula ¿no?

[345] (silencio)

[346] M: ¿Julián?, ¿tú Rubén?

[347] Ruben: Es que puse así la vara. (Sólo muestra vara en vertical)

Como se puede observar, el docente cuestiona a cinco alumnos para saber si han entendido lo discutido en la conversación y a pesar de que en la conversación pudieron haber externado su no entendimiento, esperaron a que el docente los cuestionara directamente para decir que no habían comprendido o simplemente mediante el silencio externaron no comprender. En la instauración de las normas generales se espera que los alumnos sientan la confianza necesaria para poder expresar las dudas y así instaurar las prácticas indispensables como la medición, sin embargo se observa que no todos los alumnos han interiorizado dicha norma.

Los "errores" dentro de la clase están permitidos y son necesarios, puesto que son retomados en un momento de demostraciones de métodos y estrategias ante una consigna, en este sentido, en la actividad de medición con el Tije sucede algo interesante, a pesar de los intentos y de la explicación sobre cómo medir, los alumnos muestran inconsistencias en el proceso, en el siguiente fragmento podemos observar cómo es interpretado el error y cómo el docente lo usa como puente para enfatizar un elemento importante de la iteración que más adelante pudiera dificultar el trabajo en las fracciones.

[250] M: ¿Por qué no es una buena forma de medir eso?

[251] Jaime: porque estamos dejando un espacio y no lo estamos contando ése

[252] M: ¡Ok! Azucena ¿tú entiendes cuál es el espacio que no estamos contando?

[253] Jaime: Es esta parte (le señala a Azucena, indica con su mano y vara cuál es), esta parte que tú la estás dejando, no la estás contando.

[254] Ao: Osea nomas la hace así (gira vara)

[255] Aa: Pedacitos, un espacio.

[256] Jaime: Es por decir que dejarás un cuadro, un cuadro un espacio, ese no lo estás contando.

Durante el desarrollo de la actividad el profesor docente se da cuenta de que la forma de medir de las alumnas resulta inconveniente para el desarrollo de la TEDE, sin embargo, respeta su forma de hacerlo, no resalta el error que cometen (dejar los espacios en la iteración) y decide cuestionarlas para guiar su razonamiento y aprovechar esto para, mediante una conversación colectiva, analizar qué se está haciendo y reorientar la manera de medir:

[301] (El maestro toma el cuadro para fotos)

[302] Ao: Se va a tomar una foto

[303] M: Voy a medir el marco de acá ¡sale!, fijense, a ver si alguien se dio cuenta que midió así. ¡Sale!, fijense cuento uno, dos…(va dando vuelta a la vara)

[304] Aa: Cuatro y medio

[305] M: Y algo, verdad, ¿esa es una buena forma de medir?

[306] M: ¿Quién midió así? Levante la mano

[307] (se visualizan más de 12 niños que levantan la mano)

[308] M: ¿A quién no le pareció que esta era una buena forma de medir? Y midió de otra forma

[309] (los niños se voltean a ver)

[310] M: ¿A Nadie?, a mí si se me hace que hay un problemita si medimos así, fijense.

[311] Ao: También se puede con compañeros

[312] M: No, ¿saben por qué?, porque estamos midiendo con esta parte de la vara. ¿Entienden lo que estoy diciendo o no? (indica la parte interior, circular de la vara)

[313] Aos: No.

[314] Aa: Yo entiendo más o menos

[315] M: ¿tú si entiendes Dominic? No ¿alguien entiende lo que estoy diciendo?

[316] (una alumna levanta la mano)

[317] M: ¿Jacinto? A ver pasale y explicanos, a ver esto es muy importante Acajays, porque vamos a medir muy bien , todos tenemos que poner mucha atención ¿sale Yuya?, este ¿sale carmen?, este ¿sale Denisse?, ¿ qué es lo que estoy diciendo?

[318] Jacinto: porque si lo ponemos aquí ya se midió una parte (indica la parte circular de la vara)

[319] M: A ver mide cómo midieron ellos

[320] (empieza a medir y va dando vuelta a la vara, que se sostiene en su parte circular)

Como se puede observar, mediante la conversación colectiva el docente utiliza el error de las alumnas para reorientar el razonamiento y mencionar un elemento importante al iterar en la medición (no dejar espacios), de esta manera pretende que esos errores en lugar de evidenciar a los alumnos se utilicen para generar una discusión. Es importante identificar estos momentos y estos errores para llevar a buen cauce el experimento y resulta más importante no castigar el error sino comprender que esos errores son los que permiten a los matemáticos reconocer objetos matemáticos, en clase los errores permiten a los alumnos reinventar esos conceptos matemáticos.

Un ejemplo más en el que se puede observar al error como una herramienta útil se observa en la cuarta sesión donde los alumnos deben medir la longitud de una tira[7] con el "Tije". En el momento de la discusión sobre cuánto mide la tira, el docente detecta un error de medición, que no es evidenciado ni castigado, pero sí es usado como un motivo de razonamiento grupal.

[33] (el alumno comienza a medir con iteraciones y marcando)

[34] M: ¿hasta aquí qué número es?

[35] Hernán: Dos

[36] M: ¿hasta aquí llevas dos? (señalando primera iteración). ¿Dónde empezaste? ¿de dónde a dónde es uno?

[37] (señala inicio de tira)

[38] M: ¿Este es uno? ¿aquí es uno? (señala inicio de tira con 1)

[39] (el alumno sigue iterando y marcando para medir)

[40] (maestro marca última iteración porque sale de la tira, el alumno intentó marcarla al final de ésta)

[41] M: Ok, ¿hasta dónde es uno? Ponme los números

[42] (el alumno enumera y comienza del 1, ya marcado por el maestro, y continúa con 2, 3, 4, 5, 6 y 7

[43] M: Azucena ¿está bien o no está bien? ¿tú qué crees?

[44] (el alumno concluye)

[45] M: Entonces, ¿Cuánto mediste, seis o siete?

[46] Ao: Profe, midió mal

[47] Ao: le falta la cinta

[48] M: A ver, quédate quieto. Comentarios de cómo midió Hernán ahorita

[7] La tira a medir es correspondiente a una actividad donde cada uno de los alumnos elaboran dicha tira con cartulina la cual debe ser de su estatura.

[49] Aa: Midió mal porque midió antes, donde dice número dos debería decir número uno.

[50] M: ¿aquí debería de ir el número uno? ¿Por qué?

[51] Aa: Porque ahí empieza, debería de decir ahí cero.

Las reflexiones en torno a cómo el alumno enumera su medición permite reconocer el error y, a partir de ello, se hacen de las conversaciones colectivas algo rico y productivo, el razonamiento de los alumnos se refleja en uno de los elementos básicos de la EMR, hacer mayor énfasis en el proceso que en el resultado, es decir, estos momentos de reflexión de los alumnos sobre sus procesos y estrategias posibilitan una fase de análisis de lo que se dice y hace en las actividades por unos y otros, permitiendo así reorganizar los conocimientos a través de la controversia de la misma clase. Sin embargo, es importante resaltar que en dichas conversaciones todas las opiniones son válidas, incluso aquellas que no son correctas, ante esto es importante resaltar que "se vale equivocarse" y que el docente no tendría porque decir que no es correcta sino que, a través de la reinvención guiada, debe llevarlos a la reflexión sobre las ideas construidas y la posibilidad de que pudieran estar equivocadas.

[339] M: Hernán tú qué crees, ¿ahí va el uno o va el cero?

[52] Hernán: El uno

[53] M: ¿eh?

[54] Hernán: el uno

[55] M: El uno, por qué crees que va el uno

[56] Hernán: Porque ahí empieza la tira.

[57] M: ¿Ahí empieza la tira? Pasa a tu lugar

[58] (Hernán afirma y se sienta)

[59] M: ¿tú qué crees Luis Humberto?

[60] Jaime: Maestro

[61] M: A ver, Jaime nos quiere decir algo más, que creo que le cayó el veinte.

[62] Jaime: ¿con esto? (señalando vara) (pasa al pizarrón). Con esto no podemos medir porque acá no tenemos otra tira para marcar el uno, si tuviéramos otra sí podríamos poner acá el uno (señala una vara extra al tamaño de tira), pero no tenemos otra, lo tenemos que poner desde aquí (inicio) y aquí da el uno (primera iteración)

[63] M: ¿Ahí da uno?

[64] Jaime: Si

La intervención del maestro, el desarrollo de la clase y la participación de los alumnos dejan entrever que las acciones y opiniones de los estudiantes en las conversaciones colectivas y el desarrollo de la TEDE toman un giro diferente cuando se dice “se vale equivocarse”, por ello cuando el alumno comete el error se usa para crear una discusión en el aula donde los demás pueden participar y ayudar a encontrar una respuesta que resulte más satisfactoria para la comunidad, porque equivocarse no significa que deba permanecer la idea errónea sino que se usan como un medio para que, a través de la participación de todos, llegar a un conocimiento certero y a una reinvención propia del objeto matemático, se trata de no tener miedo a expresar nuestros métodos y respuestas y además poder aprender de lo que se hace bien y mal.

Una cosa más a destacar es que a pesar de que los intentos del profesor por involucrar a los alumnos en las conversaciones colectivas son muchos y frecuentes, los alumnos no identifican completamente normas importantes como la escucha, pero, a pesar de que la medición es foco de atención desde que se pregunta cómo medir, algunos alumnos utilizan métodos que dificultan la acción (no intentamos decir que no esté permitido y que no sea válido) y en estos momentos de la clase donde se intenta generar el razonamiento no son aprovechados al máximo porque no se ha logrado interiorizar una norma, la escucha atenta de lo que pasa en la clase y de las aportaciones en dichas discusiones.

[281] M: A ver chicos vamos a platicar sobre cómo medimos. OK! Daniela ¿tú qué mediste ?

[282] Daniela: la bandera, midió...

[283] M: Esperame, porque César te está faltando el respeto y todo los que están haciendo ruido con sus lápices te están faltando al respeto, con sus varitas ¿si?, también Mario que está haciendo ruido con el papel, si nos pegamos en la rodilla también ¿sí?

[284] (varios niños, en específico, siguen moviendo y pegando con las varas)

[285] M: Denisse está haciendo un gran esfuerzo por compartir algo

[286] Ao: Daniela.

[287] M: Daniela está haciendo un gran esfuerzo por compartir algo y se lo tenemos que respetar ¡sale!

[288] Daniela: Medí la bandera, el pizarrón y el libro (su voz es muy suavecita y tenue)

En el fragmento anterior se observa que el docente intenta que la alumna exponga qué y cómo midió para organizar una discusión y reflexionar sobre la forma de medir, sin embargo el docente necesita intervenir reiteradamente porque los alumnos no están escuchando.

[265] M: A ver, vamos a escuchar a Sofía

[266] (Sofía toma su Tije y mide el marco de foto)

[267] M: Cuando utilicemos… ¿Estamos todos? Quién no esté oyendo o esté utilizando tamborcito está faltando el respeto a Sofía.

[268] Aos: ¡ay! Ana.

[269] M: Ahora sí, Sofía.

En otro momento de la clase:
[426] M: ¿Cuánto midió el pizarrón Lupita?

[427] Lupita: ... y medio

[428] M: A ver no estoy escuchando chicos, chicos todavía nos quedan unos minutos, estamos escuchando a Lupita, sale.

Otro momento de la clase que también nos permite observar que la escucha de los alumnos no es atenta es cuando las indicaciones de las situaciones a realizar no son atendidas, en esos momentos los alumnos no saben qué hacer porque no escuchan las consignas de la clase, lo que es evidencia de que la norma de "respeto" a través de la escucha no está consolidada ya que reiteradamente el docente debe recordarla, lo que dificulta en gran medida el desarrollo de las conversaciones colectivas y de la TEDE.

En general se puede observar que existen elementos que el docente ha logrado interiorizar en los alumnos (el derecho al error; la posibilidad de equivocarse) y ha sabido sacar provecho de éstas, hecho que es notable porque recordemos que quien aplica el experimento es un investigador que conoce y reconoce la importancia de la construcción de los alumnos en las conversaciones colectivas, pero que al no ser el profesor titular del grupo tiene dificultades para lograr que los alumnos tengan la confianza de externar sus dudas o incomprensiones, por ello es comprensible que en muchos momentos haga preguntas directas a los alumnos.

Las conversaciones colectivas no pueden tener éxito si los alumnos no son capaces de respetar las participaciones de los compañeros y pese a los intentos del docente pidiendo silencio, muchos alumnos no escuchan lo que los demás tienen que decir, sin este elemento es difícil garantizar una verdadera conversación, hecho que se ha dificultado durante las primeras sesiones en las que se trabajó la TEDE.

De esta manera podemos concluir que en las primeras cuatro sesiones han servido apenas para que aquellas normas que permiten desarrollar un razonamiento colegiado mediante la exposición de ideas (sin importar si son correctas o no) comiencen a instaurarse. Del mismo modo, es de hacerse notar la ausencia de otras normas generales necesarias para las conversaciones colectivas, ausencia que se evidencia cuando constantemente el docente pide a los alumnos silencio o que escuchen las participaciones de los demás. Como se ha podido ver, la norma de “respeto” a través de la escucha activa está lejos de ser consolidada en el aula, como también aquella que le da oportunidad al alumno de externar un “no entiendo” que le ayudaría al docente a redirigir la clase. Si bien las normas generales que se intentan instaurar requerirían de tiempo, las primeras cuatro sesiones son esenciales no sólo para que se conozcan dichas normas sino para que también formen parte de la dinámica de la clase.

V
MEDIR. UNA NORMA MATEMÁTICA

Tal como lo percibimos, el experimento de diseño es una metodología para probar situaciones que promuevan el aprendizaje en un ambiente libre y real a través de un experimento de enseñanza que está a cargo de un equipo de investigación. Por su parte la TEDE (Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico) es el recurso teórico local que busca apoyar el quehacer del docente para mejorar la matematización en el aula. En nuestro caso la meta es lograr que los alumnos desarrollen la comprensión de las fracciones como una medida que da cuenta del tamaño de una longitud.

Con la TEDE se busca la progresión de ciertos objetivos que se cumplen a través de prácticas matemáticas, y a la par, desarrollar medios didácticos para gestionar dichas prácticas, ambos objetivos nos exigen realizar análisis retrospectivos (después de la ejecución) para proponer modificaciones y cumplir de mejor manera los principios del experimento de enseñanza, es decir, no se concibe la TEDE como un producto terminado sino como una herramienta susceptible de revisión, cambios y mejoras. En la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje sobre la que el docente e investigadores trabajamos, las prácticas no son libres, están condicionadas por el entorno, esto es, "los contextos se (re)construyen por medio de procesos sociales del aula y deben interpretarse, en primer lugar, desde el micro contexto del aula" (Civil y Planas, 2004 citado por Amore et al, 2007, p.5)

Por otra parte, desde la perspectiva socio-constructivista que sustenta al experimento de enseñanza, se asume que las relaciones que se generan en el aula son un medio de aprendizaje, por esa razón las relaciones entre profesor y alumno se vuelven objeto de nuestra investigación con el propósito de realizar aportes al quehacer docente, "el énfasis se coloca en la construcción subjetiva del conocimiento a través de la interacción, asumiendo que los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática" (Bauersfeld, 1995 citado por Godino y Llinares, 1999, p. 71).

Por la razón anterior hemos centrado nuestro interés en los “medios didácticos”, por ejemplo desde la perspectiva de la interactividad y a través de las conversaciones colectivas, en el capítulo anterior analizamos los medios didácticos que actúan como precursores de recursos teóricos y prácticos para instaurar *normas generales* como la escucha activa, el respeto a la participación y la obligación de expresar la incomprensión.

Estas normas generales se establecen en la enseñanza de cualquier disciplina y resultan indispensables en una clase de matemáticas porque sirven de base para desarrollar las “normas matemáticas”. Del mismo modo que las normas generales, las normas matemáticas son un “acuerdo” que resulta de una negociación entre profesor y alumnos que se da través de las interacciones y las interpretaciones que hacen de estas interacciones -explicita o implícitamente- y “cuando un docente dice, gesticula o sugiere, a raíz de una intervención del alumno referida al asunto matemático que se está tratando, además de lo dicho explícitamente, juega una intención que muchas veces se expresa entre líneas” (Sadovsky, 2018, p.3).

Las normas, en especial las normas matemáticas, son importantes en el análisis del dispositivo para la enseñanza de las fracciones, porque más allá de lo que se pretende enseñar también hay influencia de las relaciones que se establecen en el aula y que permiten o no alcanzar los objetivos de la clase. En ese sentido hay una parte social que se vive al momento de desarrollar la TEDE y podemos ver que existe una “sociedad” ahí, porque el aula de matemáticas es una microcultura en donde se generan elementos propios de toda cultura, entre ellos las normas de actuación (Planas y Gorgorió, 2000). Estas normas permiten organizar la clase bajo la mirada de lo que se puede hacer o no, de cómo se puede hacer y cuándo poder hacerlo, es decir, “la norma matemática es el conjunto de prácticas matemáticas en el aula y las diferentes trayectorias posibles en el comportamiento matemático de alumnos y profesor ante una actividad propuesta” (Planas y Gorgorió, 2000, p. 137), la disciplina necesita de elementos propios, como la misma norma, que permitan un desarrollo pleno de la TEDE y cualquier situación a trabajar para determinar el hacer matemático.

Cuando hablamos de norma matemática encontramos criterios específicos que se han de trabajar en la clase, por ejemplo al brindar una respuesta se pueden admitir diversas interpretaciones que le den sentido a lo que se espera de ella y por ende ser aceptadas, en la EMR se acepta la posibilidad de emplear normas matemáticas para “hacer más matemáticamente", para pensar como un matemático, por ello se busca que la clase actúe desde esta perspectiva y se pregunte: ¿qué entiende un matemático por "diferentes soluciones de un problema"? en comparación con lo que entiende el común de la gente, con ello comprendemos que lo que sucede en el aula de las matemáticas tiene elementos característicos que le permiten fluir y que son necesarios como parte de la actividad matemática escolar, como lo dijeron Yackel y Cobb "la comprensión normativa de lo que es considerado matemáticamente diferente, matemáticamente sofisticado, matemáticamente eficaz y matemáticamente elegante en un aula" (1996, p. 562).

Las normas matemáticas nos ofrecen entonces la posibilidad de adentrarnos en el mundo de las matemáticas, sin embargo, al igual que las normas generales, no pueden ni deben imponerse a la clase ya que su esencia es que son socialmente construidas y negociadas, y aún cuando el docente sea quien las presente, son los alumnos quienes las habrán de legitimar, pues ellos participan en una reconstrucción permanente en el proceso de comprensión, dándole sentido y significado cuando participan en la negociación, explícita o no, de las normas del aula (Planas y Gorgorió, 2000).

Por todas las razones expresadas, el objetivo del presente capítulo es analizar las normas matemáticas que se instituyen en la primera de cuatro prácticas matemáticas de la TEDE que hemos considerado. De hecho es una mirada a los haceres del profesor y a la manera como éste logra la institucionalización de normas matemáticas necesarias en un aula realista (EMR).

En este capítulo analizamos los quehaceres del docente para lograr que los alumnos reconozcan en la medición las propiedades necesarias para ejecutarla, como la precisión, el inicio y no sobreponer o dejar espacios entre cada iteración, además se reconocen las ventajas de contar con una unidad de medida convencional por encima de unidades no convencionales, esto permite que se pueda determinar la unidad de referencia usada al iniciar el trabajo con las fracciones.. Estas ideas marcan la noción de la primera norma matemática (reconstrucción del concepto medida y sus propiedades), que alumnos y docente puedan reconstruir en torno al objeto matemático medida para abonar al logro del objetivo de la primera práctica: *entender la medición como la iteración de una unidad.*

El desarrollo de las sesiones para la primera práctica comienza cuando los alumnos se adentran a actividades de medición con partes del cuerpo (cuartas, pasos, manos, etc.,) y reconstruyen ideas de cómo y para qué medir, posterior a ello reconocen las problemáticas al emplear este método y reconocen la necesidad de emplear una unidad de referencia que les apoyará en la construcción de la noción de medida para comprender la medición en una idea de iteración.

5.1. LA MEDICIÓN CON UNIDADES ARBITRARIAS

Un primer aspecto estrechamente vinculado a la instauración de normas matemáticas tiene que ver con "diseñar un entorno de aprendizaje". Desde el momento de la planeación de la TEDE (con ayuda de la Teoría Hipotética de Aprendizaje y la Teoría Conjeturada) se pueden plantear situaciones que permitan la institucionalización de estas normas, desde la forma de presentación de las actividades hasta el discurso que son capaces de utilizar los alumnos, dichas actividades se convierten en normas desde el momento en que se pretende que exista una matematización por parte del alumno y un momento de reinvención guiada por parte del docente, es decir, cada uno debe cumplir un rol respecto de lo que se pretende desarrollar en cada una de las prácticas.

La norma matemática entendida como el "conjunto de explícitos o implícitos en el aula de matemáticas que influencian o regulan el desarrollo y la interpretación de la práctica matemática" (Planas y Gorgorió, 2001, p. 137), resulta un elemento indispensable para el desarrollo de nuestra TEDE. Así, lo que sucede en el salón de clase que está relacionado con el objeto de enseñanza y su actuar sobre él tiene un sentido que permite su desarrollo; desde la forma de legitimar una solución, los discursos que aparecen y las formas de hacer obedecen a una norma, la cual por su naturaleza presenta una forma dinámica, es decir que puede ser negociada y reconstruida por el docente y alumnos según sea necesario.

Como se ha mencionado, la TEDE se corresponde con una agenda de trabajo susceptible de ser modificada aunque haya sido probada con anterioridad, en nuestro caso el objetivo de la primera práctica matemática era que los alumnos reorganizaran su razonamiento en torno a la medida y su importancia en la sociedad (Stephan, 2003), es decir, que pensaran en la medición como una práctica social que surgía de ciertas necesidades y que podría realizarse de diferentes maneras. En el curso de esta reorganización aparece una primera norma matemática que se relaciona con la manera en la que el docente plantea las actividades y el alumno se apropia de ellas, hablamos de la reorganización de conceptos necesarios para trabajar con el experimento de enseñanza. Esta idea se basa en uno de los aspectos fundamentales de la EMR, reconocer a la actividad matemática como una actividad humana, sobre este respecto Cordero (2001) menciona que debe existir una reformulación en la enseñanza de las matemáticas que considere primeramente al humano haciendo matemáticas en lugar de priorizar la producción matemática hecha por el humano.

Cuando se toma en cuenta esto, la norma matemática debe girar en torno a esta idea y para ello es necesario que los alumnos reestructuren los esquemas sobre la medición que han construido. Por su parte el docente tiene la tarea de que el alumno reconozca el conocimiento matemático como resultado de la actividad matemática, para eso, durante la clase el alumno debe comprender que la medición es resultado del hombre haciendo matemática y no un resultado de la misma actividad matemática (Bonacina, s/f). Entonces es importante que la clase se aleje de la concepción escolar de la medición para plantearla como una práctica social. Introducir esta norma matemática ayudará al profesor con el desarrollo de la TEDE, pues como lo mencionan Nunes et al. (1993), se requiere que el alumno se vea involucrado en el uso de herramientas particulares de la situación para que le pueda dar un significado asociado y sea interiorizado.

Sobre este respecto, como se puede ver en el siguiente fragmento, en el desarrollo de las primeras sesiones, el docente intenta que el alumno reconozca la importancia de medir en un mundo social y además sepa que ese conocimiento matemático es resultado de la misma actividad humana. También puede reconocerse que, en relación con los principios de la EMR, el docente busca presentar al alumno una situación que le sea "real" (bajo la definición que se presenta en el principio de realidad) donde se tenga el contacto directo con algo que se pueda matematizar y, por lo tanto, generar un conocimiento que será lógico y entendido para él.

> [22] M: ¿Alguién ha visto medir a alguien? ¿Quiénes miden? ¿Qué es eso de medir? ¿Alguién en su trabajo medirá algo? A ver Lucas ¿usted ya pensó en alguien?
>
> [23] Lucas: mi papá es ingeniero, agarra su metro.
>
> [24] Docente: Tu papá es ingeniero y trae su metro, ¿mide los edificios o los terrenos?
>
> [25] (se escucha "los que diseñan ropa")
>
> [26] M: ¿para qué quieren medir los que diseñan ropa?

[27] Niños: para que les quede la ropa.

[28] Docente: ¿qué tal que pido un suéter y me dan uno, el que trae Ana Corina, ¿qué pasa si me lo pongo yo? (los niños ríen y dicen "no le queda"), si quiero un suéter a la medida, pues me tienen que medir ¿verdad?, que tal que mi chamarra la usa Jacinto, ¿cómo le va a quedar mi chamarra a Jacinto?

[29] Niños: mal (murmullos confirmando la respuesta)

[30] Docente: ¿Quiénes más miden?, ya vimos que ingeniero, Jaime tu papá trabaja en un taller mecánico ¿no?, ellos ¿miden o no miden ?, ¿nunca miden? ¿no tienen ningún instrumento de medición?

[31] Jaime: Pocas veces.

[32] Docente: Pero ¿qué miden?

[33] Jaime: Los carros.

[34] Docente: Los carros, ¿han oído hablar de la verificación ?

[35] Niños: siii

[36] M: ¿Ahí miden, cuando llevamos el carro a la verificación o no?

[37] Jaime: ah mi papá mide el carro.

[38] Docente: tu papá se encarga de medir si pasan la verificación o no, yo creo, por lo menos en mi taller eso hacen, miden el, pero también hay otras cosas que se miden de los motores, los tiempos, las formas en que hacen chispas, de hecho los mecánicos tiene muchos aparatos con agujas.

[39] Jaime: escáner.

[40] Docente: Escáner, el escáner es un instrumento de medición, Sofía ¿quién más medirá para su trabajo?

[41] Sofía: Los instaladores, cuando miden un cable necesitan instrumentos especiales.

Como se puede observar, el docente cuestiona a los alumnos para que reflexionen sobre los usos y tipos de la medición en la sociedad actual y los alumnos exponen cuándo se mide y algunas de las finalidades que se detectan al medir; sin embargo para introducir la TEDE es necesario que la norma matemática haga énfasis en los momentos sociales e históricos en que la medición emergió (sobre todo de longitud) para reconocer la actividad humana en relación con ciertos fenómenos como una fuente de conocimientos de la medición. De esta manera la norma matemática tiene mayor amplitud cuando se comprende que medir y contar con instrumentos de medición nacen de una necesidad social, es aquí cuando la norma se complejiza y es más difícil interiorizar puesto que los alumnos tienen que "borrar" sus conocimientos acerca de la medición o mejor dicho, reorganizar su esquema de medición porque en el experimento de diseño se propone el uso de herramientas que pueden servir para amplificar y reorganizar la actividad misma (DbSrfler, 1993 citado por Stephan, 2003).

Reorganizar la actividad de medición significa modificar esquemas de los alumnos para que les permitan cumplir con el experimento de enseñanza, bajo esta lógica el docente no sólo busca que reconozcan los usos sociales sino que también comprendan que en el seno de la organización social se reconstruyen significados de la matemática y que estos son aceptados como recursos de ciertos conocimientos matemáticos, es decir, la norma matemática intenta que los alumnos se involucren con aquello que ha de crear el sentido de medición. Por esta razón la actividad comienza desde el surgimiento de la actividad de medir, pues pretende que los alumnos modifiquen sus esquemas para cumplir con aquello que plantea el experimento de enseñanza, en nuestro caso el docente no sólo busca que reconozcan los usos sociales y los criterios de medición actuales sino también las razones por las que surgió esta práctica matemática y cuáles unidades no estandarizadas (cuartas, jemes, pasos, etc.) se utilizaron antes de reconocer la necesidad de contar con unidades de medida convencionales. Para lograr la "reconstrucción del significado" de la actividad, los alumnos tendrán que dejar de lado aquello que ya conocen (metro).

En un primer momento de la clase, la reflexión se focaliza en reconocer las medidas no convencionales que se utilizan de manera cotidiana, por ello el docente introduce a los alumnos en este juego de reconocimiento a través de preguntas y/o ejemplos en los que ellos pueden reconocer el objetivo.

[24] M: En las estéticas he visto que dicen "¿cuántos dedos quiere que le corte?".

[25] Ao: luego le hacen así (simula cortar el cabello)

[26] M: ¿si han escuchado?

[27] (algunos alumnos asienten y otros niegan)

[28] Fernanda: a mi papá así le cortan el cabello.

[29] M: ¿Cómo?

[30] Fernanda: A mi papá así le cortan el cabello.

[31] M: Así le dicen, cuántos dedos. Fíjense y están midiendo.

[32] Aa: a mí también

[33] M: ¿también?

[34] Aa: a mí me cortaron esto (pone dos dedos arriba)

[35] M: ¿así dice? (levanta a la par de la alumna dedos), ¿así sería cuánto?

[36] Aos: Dos dedos.

[37] M: Dos dedos, verdad. ¿con qué otras cosas se medirían?

Cobb (1994) menciona que es fundamental que el docente no sólo desarrolle actividades matemáticas sino que las haga compatibles con la sociedad en general para que la idea se vaya instaurando como una norma en la clase, es por ello que en el fragmento anterior se puede observar que el docente intenta que se reconozca el sentido de medir aún sin unidades arbitrarias para que los alumnos reconstruyan el significado de medición, aquí la norma matemática está guiada por el profesor quien intenta mostrar a los alumnos diversas situaciones en las que se puede medir sin usar "el metro" y que ellos adviertan los usos de medidas arbitrarias.

Siguiendo con la norma planteada, aparece la necesidad de "renunciar" a algunos conceptos preexistentes y realizar las prácticas matemáticas de tal modo que los alumnos comprendan las propiedades de la medición y aprendan a medir. La idea gira en torno a la fenomenología didáctica en la que Freudenthal (1983) estableció que los fenómenos del mundo físico, social y mental son medios de organización de la clase. Esta idea en conjunto con lo expuesto nos permite analizar la norma matemática, por ejemplo se busca la reflexión para que los alumnos comprendan cómo se medía antes de que existiera el metro o la regla.

Es importante que los alumnos reconstruyan la noción de medición desde lo arbitrario pues será indispensable para comprender la narrativa que luego se presentará, además, en relación con la norma matemática que buscamos desarrollar, permite que los alumnos creen y reinventen sus conceptos matemáticos. Para instaurar dicha norma el rol del maestro es claro, debe guiar las respuestas hacía lo que se busca y aunque en un primer momento los alumnos no participan (puede ser porque es primera clase o por no reconocer las formas de trabajo), comienza una reflexión guiada mediante la pregunta ¿Cómo medir sin metro o regla? A pesar de ello, como se puede ver en el siguiente fragmento, a los alumnos les cuesta renunciar a la idea de medidas convencionales y constantemente hacen referencia al uso del metro para medir.

[160] M: No pasa nada. ¿Alguien que crea que sabe cómo medir?, Antonio.

[161] Antonio: Bueno, yo dije que con la imaginación porque sí ya sabemos cuánto es un metro podemos imaginar.

[162] M: Pero, antes no sabían cuánto era un metro, ahorita ya se inventó el metro.

[163] Ao: Yo también tengo una, pones un libro y la marcas (simula que su mano es un libro)

[164] M: Pero si pongo un libro y mi pizarrón es más grande que mi libro, qué pasa.

[165] (silencio)

[166] Ao: Pero, tampoco había libros profe (dice entre dientes)

[167] Ao: Ah no.

[168] M: ¿No? ¿con las manos? ¿se te ocurre cómo Fernanda?

[169] (Fernanda se encuentra pidiendo participación)

[170] Fernanda: Así (junta sus dos manos)

[171] M: A ver ven, ¿así? (imita) pero, exacto. ¿Qué les parece medir así el pizarrón?, ustedes me dicen si se puede o no. Vamos a ver cuántas manos mide mi pizarrón (mide con palmas de mano) ¿me ayudan a contarlas?

[172] Todos: una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece.

[173] M: ¿Otra forma de medir?

[174] (silencio)

Se pueden observar las dificultades de los alumnos para reconstruir la noción de medida, por ello sugieren imaginar un metro, sin embargo el docente sabe cómo guiarlos para encontrar una respuesta adecuada a los objetivos de la clase y que puedan adentrarse en el mundo de la medida no convencional. La idea de reconstruir el significado nos permite reconocer la amplitud de la norma matemática que se intenta instaurar, los esquemas de los alumnos están llenos de ideas matemáticas que en nuestro caso podrían dificultar el desarrollo de la TEDE y por consecuencia el cumplimiento de los objetivos de cada una de las prácticas, se trata de olvidar lo matemático (como el metro) y crear nuevos medios, así “la reconstrucción de significados compone categorías del conocimientos matemático como resultado de la actividad humana y no propiamente de la actividad matemática” (Cordero, 2011, p.106). Es decir, se busca reconocer la medición como algo propio de los quehaceres sociales y no como algo simplemente matemático, para ello son necesarias ciertas actividades además de la reflexión de los alumnos.

La medición con unidades arbitrarias tomará sentido cuando comience a utilizarse en situaciones que obliguen a los alumnos a medir bajo la norma que se ha estado instaurando hasta el momento, para ello el docente plantea una situación que exige a los alumnos el uso de medidas arbitrarias. Cobb (2003) planteó la necesidad de que los alumnos se identifiquen con los personajes y situaciones de las narrativas a trabajar (aspecto que abordaremos más adelante) y es tarea del maestro que todo lo que se presente tenga sentido para el alumno y vea la necesidad de emplear nuevas ideas para resolver los problemas.

Desde esta perspectiva, reconocer la medición arbitraria permitirá posteriormente reconocer la necesidad de contar con medidas convencionales y de usar medidas menores a la unidad, por ello en nuestro experimento de diseño es importante que los alumnos se involucren con la medición antes de estudiar las nociones relacionadas con la fracción. Esta parte del proceso es importante porque se va entrando en el juego de la narrativa (un contexto) y además está relacionada con uno de los principios de la EMR que hace referencia a las situaciones que se deben plantear a los alumnos, lo que los alumnos deben matematizar debe estar en estrecha relación con el principio de realidad.

> Un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado (...) Yo prefiero aplicar el término "realidad" a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario (Freudenthal, 1991, p.17)

Es decir, que el alumno está en el juego mismo de ser matemático y lo cual, en este caso, nos remonta a las primeras ideas de medición.

En la primera práctica matemática analizamos dos actividades clave que permiten a los alumnos desplegar el uso de medidas no convencionales para la medición (manos, cuartas, jemes y/o pasos) y que se plantearon en la primera y segunda sesión, el objetivo era instaurar una norma matemática que permita a los alumnos trabajar sobre las ideas de medición y percatarse que ésta se obtiene cuando se itera una unidad de referencia la cual debe cumplir con ciertos requisitos para su ejecución. En la primera actividad se les pide que midan el pizarrón como ellos quieran, en la segunda se plantea la medición de una bandera, en ambas el docente insiste en utilizar medidas arbitrarias.

Primera actividad:

[208] M: Le vamos a repartir una hoja a cada quien. Vamos a escuchar la tarea que vamos a hacer, vamos a medir tres cosas, pero no usando la regla. Vamos a medir tres cosas como le habría hecho la gente en la antigüedad, entonces ¿si no vamos a usar regla ni metro qué vamos a usar?

[209] (los alumnos hablan a la par diciendo: los dedos, las manos, los pies…)

[210] M: Fabiola nos dice las manos, Ana Paula el cuerpo, ¿Dominic podemos usar los dedos?

Segunda actividad:

[96] M: Fíjense lo que vamos hacer, ustedes saben cómo, lo tenemos que hacer con mucho orden, vamos a empezar con Paola; Paola va pasar y va ir midiendo ¿cuánto mide la bandera de largo con cuartas? luego va a seguir Victoria y luego Luis Humberto y vamos a apuntar en la parte de arriba de la hoja cuánto nos midió

[97] (los niños van pasando al frente a medir)

Las prácticas matemáticas que realizan los alumnos les permiten comprender el concepto que es resultado de su construcción (Lara, 2019), en este caso la reconstrucción del objeto matemático permite que los alumnos reinventen la medición, por lo tanto la misma actividad propicia que adquieran los elementos necesarios para seguir avanzando en la agenda de trabajo. Al respecto Gravemeijer (2003) señaló que esta práctica debe ser compartida a través de razonar y argumentar matemáticamente (aquí la importancia de las conversaciones colectivas), pues dichas prácticas evolucionan a medida que estudiante y maestro discuten situaciones, problemas y métodos de solución. Esta idea nos remite a la evolución de la norma matemática que se intenta instaurar, hablamos en un principio de la reconstrucción del concepto medida que nos ha llevado a crear situaciones donde los alumnos reinventen cuando reconocen la necesidad de medir (usando medidas no convencionales), sin embargo esta reconstrucción no está completa si no se reconoce "cómo medir".

Cuando las situaciones se trabajan en el aula, la norma matemática (reconstrucción del concepto) no se desarrolla sola, se interrelaciona con los principios de la EMR, en este caso con el principio de "reinvención" lo que resulta importante porque desde la EMR los alumnos deben reconocer la actividad matemática como un quehacer (matematizar) y apartir de ahí reinventar una idea. En el juego de ser matemáticos los alumnos van recreando conceptos como lo hicieron alguna vez los matemáticos.

A través de las interacciones con las situaciones que representan los fenómenos que deben ser organizados por los objetos mentales[1] de los alumnos, poco a poco se define la reconstrucción de la medición, acción que es importante para introducir posteriormente otras más para que los alumnos reconozcan en la medición condiciones que servirán para comprender a la fracción como iteración de la unidad y no como una parte de un todo.

Cuando los alumnos interactúan con las situaciones matematizan la realidad (matematización horizontal) y ésta genera un elemento crucial para el desarrollo de la TEDE, la actividad argumentativa en la que el tipo de discurso alude al momento de la reinvención que está desarrollando y que lo llevará a transitar en los "modelos de" y "modelos para", es decir en modelos de una situación particular o modelos para razonar matemáticamente en situaciones variadas dentro y fuera de la matemática misma (Bressan et al, 2016), ya que las situaciones a las que se enfrentan deben permitirles transitar por el mundo de la medición y reconocer los elementos implícitos en ésta.

En la primera práctica, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, los alumnos no miden la distancia total de la longitud pues cuentan el número de pasos necesarios para llegar al final de la alfombra en lugar de cubrir una longitud, esto representa un problema al iterar pues el resultado se ve alterado y una de las principales nociones se omite:

> [337] M: a ver fíjense, creo que así midió Mario, me dicen si lo estoy haciendo bien, a ver listos. Uno (comenzando a contar desde el segundo pie, igual que el alumno), dos, tres, cuatro… ¿le medí bien?
>
> [338] Aos: ¡sí!
>
> [339] M: ¿conté todos? A ver.

[1] Lo que Freudenthal llama objetos mentales es lo que Fechsbein denomina intuiciones y Piaget representaciones (González y Arévalo, 2019)

[340] (un alumno levanta la mano)

[341] M: fíjense (repite la acción de comenzar a contar de segundo pie) uno, dos, tres, cuatro, cinco. ¿lo hice bien o lo hice mal? ¿Quién cree que lo hice bien?

[342] (pocos alumnos alzan a mano)

[343] M: ¿quién cree que lo hice mal?

[344] (la mayoría de los alumnos levantan la mano)

[345] Aa: porque no contó el primero.

[346] M: ah, a ver fíjense vamos a escuchar todos porque aquí acaba de pasar algo muy interesante, algunos piensan de una forma y otros piensan de otra, verdad.

Podemos observar que cuando un alumno mide desde el segundo paso, está ignorando el inicio de la longitud y se centra en contar las veces que realiza la acción, sin embargo en la conversación colectiva un compañero se percata de que no se toma en cuenta la primera iteración. La norma matemática va tomando sentido conforme avanza la clase, los alumnos participan para identificar las propiedades de la medición, Stephan (2003) menciona que es necesario que los alumnos argumenten por qué es importante contar el primer paso y tomarlo en cuenta a la hora de medir una distancia, es decir, se debe expresar por qué es matemáticamente correcta una u otra forma de medir, al respecto Cordero (2001) afirma que las representaciones que van surgiendo de las interacciones reconstruyen los significados y conducen al alumno por el camino de la reinvención.

Desde la perspectiva del análisis fenomenológico, vivir el proceso de reconstrucción de la medición cambia el discurso, más allá de explicaciones formales se espera que el alumno hable del sistema de recursos que utiliza para construir sus propios significados tal como lo hicieron los matemáticos, claro con ayuda del docente, Thompson et al. (1994) distinguen dos tipos de discurso en este marco, el "discurso de cálculo" y el "discurso conceptual", el primero hace referencia a una explicación que describe el método o proceso por el cual se llega al resultado y en el segundo discurso, el que nos interesa, las explicaciones describen cómo se llegó a un resultado.

En este sentido nos interesa que los alumnos no sólo sepan medir, sino que sean capaces de argumentar por qué se mide de cierta manera, en el fragmento siguiente se observa que los alumnos reflexionan sobre la necesidad de cubrir la totalidad de la longitud y no sólo contar los pasos, la norma matemática se vuelve interesante al reconocer el papel del docente quien comete el "error intencionado" para que los alumnos identifiquen y argumenten por qué resulta inválido.

[359] M: A ver, a ver fíjense cómo lo está haciendo Lupita.

[360] Aa: (comienza otra vez, lo hace de manera correcta) uno, dos, tres, cuatro, cinco…

[361] M: Así medí yo Lupita, mira, es igual fíjense. Uno (comienza a contar desde el segundo pie), dos, tres, cuatro… es igual, ¿no?

[362] (varios alumnos dan su opinión a la vez, sólo uno levanta la mano)

[363] M: A ver, Lupita va a hacer la explicación, sale. Unos dicen que me adelanté un paso. ¿Quién cree que medimos igual? Levante la mano quién cree que medimos igual. Algunos creen que medimos igual, explícame por qué no medimos igual Leticia.

[364] (Lupita se levanta y pasa al frente)

[365] M: A ver, vamos a oír a Lupita.

[366] Lupita: es que primero comienza desde acá (indicando el segundo pie) uno y es desde acá (indicando el primer pie)

Observamos que el docente propone una forma de medir en la que se omite el primer paso, cuando los alumnos identifican el error lo exponen con la idea de que se tome en cuenta el primer paso, entonces se identifica el error en la medición, sin embargo aún no llegan a la argumentación necesaria para comprender y justificar porqué es necesario contar el primer paso para cubrir una distancia. Para continuar con la práctica era necesario que el docente insistiera en buscar una justificación de los alumnos que los llevará a un discurso conceptual para completar la reconstrucción del significado de medición.

[38] M: a ver si ya le entendimos.

[39] Jacinto: Es que no cuenta el que está pegado a la pared, no lo cuenta.

[40] M: ¿no lo cuento?

[41] Aos: ¡No!

[42] Jacinto: Comienza aquí (mostrando el segundo pie) uno. Usted empieza así.

[43] M: o sea, para mí así es uno, y para ti cómo es uno.

[44] Jacinto: Uno (contando desde el primer pie) dos, tres…

[45] M: ¿ya vieron la diferencia? A ver, a ver si ya me quedó claro, para medir bien éste tiene que ser uno (acentúa el primer paso).

[46] (los alumnos afirman)

[47] M: y éste dos, verdad. Yo como lo estaba haciendo era... era uno, verdad (comenzando del segundo pie) y entonces no estaba contando el primero que puse.

Conforme el docente conduce la discusión hacia la medición errónea, los alumnos se van percatando de la necesidad de cubrir totalmente la longitud y comprenden que la iteración contempla “uno” desde la primera posición y no a partir de la segunda, los alumnos entienden este factor y puntualizan que se debe comenzar a medir el primer paso desde la pared, es decir contar la primera iteración y no sólo los pasos que se dan.

Otro aspecto importante que es necesario reconfigurar para usarlo en posteriores momentos de la TEDE es la importancia de no dejar “espacios” entre cada iteración. Conforme avanza la TEDE este aspecto resulta indispensable en la iteración de la unidad (o subunidad) y sirve para la justificación futura de la importancia de iterar y no doblar la unidad por los huecos que se deja y lo que ello implica.

La exactitud, si así lo podemos nombrar, es un elemento clave como introducción de la fracción que se pretende trabajar a través de la iteración de la medida, puesto que indica las veces que se puede iterar una unidad o subunidad, reconocer esto dice Stephan (2003), es un condición que se da a partir de usar las medidas arbitrarias y de que los alumnos reconocen la idea de pasos “más grandes”, lo cual tendrá como consecuencia una alteración en el resultado, es decir cuando los alumnos reconocen este error están más cerca de la reconstrucción del significado de medición. Una de nuestras conjeturas era que la exactitud al medir (no dejar espacios) era un factor que podría aparecer, para ello se aprovecha la medición de un alumno para realizar el análisis y la argumentación de “qué pasa” cuando medimos así.

[412] M: A ver, ¿tú cuánto mides?

[413] César: uno, dos, tres, cuatro, cinco (midiendo con pasos largos y no con pies)

[414] M: ¿Qué les parece esa forma de medir con pies?

[415] Aos: están largos… va bien… no

[416] M: ¿les parece una buena forma de medir con pies?

[417] Aos: No.

[418] M: ¡quédate ahí César! ¿Por qué no es una buena forma de medir con pies o sí es una buena forma de medir con pies?

[419] (los alumnos hablan, pero no se entiende lo que dicen)

[420] M: A ver César otra vez, Luis Humberto, ¿ya viste o no viste?

[421] (el alumno regresa a medir)

[422] M: A ver, vamos a dejar que César lo haga otra vez, ¿cómo es?

[423] César: (comienza a medir otra vez con pasos más grandes) uno, dos, tres, cuatro, cinco.

En esta parte el docente les pide analizar el proceso de César para que identifiquen si hay un error en la manera de medir, a lo que un compañero (Jaime) exclama "están largos" lo que significa que ha identificado la necesidad de que la medición sea precisa y exacta; para ello pasa y hace medición de forma correcta:

> Jaime: (comienza a contar de forma correcta) uno, dos, tres, cuatro, cinco. Me quedé aquí y tú te quedaste allá (señalando a César que está más adelante).

El argumento de Jaime denota lo que Stephan (2003) mencionó, reconocer la exactitud implica determinar una distancia en especifico y cuando no se respeta esta propiedad el resultado se ve alterado, por eso identifica los pasos como más grandes y por ende más larga la distancia. Algo que nos gustaría acentuar es que, aunque identifica el error aun no ha llegado a una argumentación de lo que implica usar pasos "más largos", esta argumentación permitiría que la norma matemática siga fluyendo y la reconstrucción del concepto tome su curso para lo cual es necesario la reinvención guiada en la que el alumno matematiza. Sobre este respecto Cobb (2003) relaciona el proceso de matematización con la reinvención, señala que es un proceso en el que los estudiantes formalizan sus entendimientos informales e intuitivos, es decir, el discurso del alumno va encontrando sentido, lo que le permite expresar argumentos para justificar su actuar y a la par participar en una reconstrucción del concepto y los acerca a comprender que medir implica la iteración de una unidad, pero que esta iteración debe cumplir con ciertos requisitos .

[436] M: Pero ¿cuál es la diferencia en las formas de medir?

[437] Jaime: Ah, los pasos

[438] Ao: Es que él los hizo más largos.

[439] Jaime: los pasos más largos.

[440] M: A ver, pásale. Regrésate Jaime, regrésate a tu lugar. Vamos a ver que nos dice Lucas.

[441] Lucas: Es que él estaba así contando (pasos largos), así y así.

[442] M: Entonces, ¿cómo tendrías que medir?

[443] (César regresa a contar)

[444] César: (comienza a contar, esta vez de forma correcta con pies) uno, dos, tres, cuatro, cinco.

[445] M: Fíjate bien, ¿cómo tendrías que medir?

[446] César: Uno, dos (da un paso ligeramente más grande de pie), tres, cuatro, cinco.

[447] M: Cinco, y ¿los tengo que tener bien pegaditos o no?

[448] Aos: Sí

[449] M: o ¿los puedo tener así separaditos?

[450] Aos: No.

[451] M: ¿Qué tiene que los mida separaditos?

[452] Aa: porque mides más

En el fragmento anterior vemos las ventajas de las conversaciones colectivas en relación con el avance de los alumnos, la exposición de sus procesos de solución los lleva a reconocer las discrepancias que puede haber entre dichos procesos y cómo estas diferencias afectan. Por ejemplo identifican que César deja espacios al medir, por ello argumentan que esto es un problema porque "mide más", porque no mide la distancia sólo cuentan los pasos, lo cual no es una propiedad de la medición. La norma matemática se va reconstruyendo de manera tal que los alumnos son capaces de exponer las cualidades de la medición desde la matematización, desde un discurso que justifica el actuar y va más allá de explicar un método.

Una vez que van identificando elementos de la medición que servirán de modelo para medir en posteriores prácticas (hasta llegar a medir con subunidades), es el momento propicio para que los alumnos reinventen la noción de medición y reconozcan los elementos que la caracterizan, es cuando se analiza cómo afecta el tamaño de la unidad en la iteración. Para ello se propone a los alumnos una actividad relacionada a la medición de una bandera, la cual quiere ser replicada y para ello se buscan las medidas (con unidades no arbitrarias) para lograrlo.

[137] M: Vamos a pedirle a la maestra que mida, que nos enseñe su mano.

[138] Maestra: le va a salir cuatro, cuatro cuartas (levanta su mano derecha, entre murmullos:

[139] M: Levanten la mano quién cree que le va a salir un número más grande que ustedes.

[140] (nadie levanta la mano)

[141] M: ¿tú crees Sofía que les va a salir un número más grande que ustedes?, ¿quién cree que le va a salir un número más chico?

[142] (más de 13 levantan mano)

[143] M: vamos a ver, vamos a contar todos

[144] (la maestra coloca sus manos sobre la bandera)

[145] Aos: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

[146] (varios niños de asombran, sí le salió)

[147] M: cinco y cacho, ¿no?

[148] M: cinco y cacho, oigan ¿y a mí?, ¿me va a salir un número grande o chico?

[149] Aos: chico, medio chico, medio grande

[150] M: Pero ¿por qué medio chico?

[151] (murmullo cinco)

[152] M: ¿por qué chico, si mi mano está grande?

[153] Lucas: Porque entre más grande sea la mano, más chico…

En el fragmento anterior observamos cómo los alumnos reconocen la influencia del tamaño de la unidad de medida, lo que posteriormente les servirá para reconocer el valor unitario de los pequeños (fracción unitaria); en este momento de la clase, al intentar responder a la cuestión “quién cree que le saldrá un número más grande” los alumnos responden con base en los conocimientos que han ido construyendo, sus argumentos indican que han comprendido la relación entre el tamaño y el número de iteración, sin embargo para que el discurso tenga mayor alcance los alumnos deben justificar sus ideas, Stephan (2003) encontró que es necesario que se identifique la medida (los pies) para saber que cuando son más grandes se darían menos pasos. En la TEDE que desarrollamos la conclusión de los alumnos gira en el mismo sentido y la conversación colectiva lo recupera cuando se da la discusión sobre este aspecto.

[632] M: ¿y por qué Paola nada más le dio 13 y a Javier le dio un número más grande?

[633] (varios alumnos responden a la vez)

[634] M: A ver, tú…. Aarón.

[635] Aarón: porque está más grande

[636] M: A ver, no estamos respetando a Aarón (dice al escucharse ruido), Aarón, voz bien fuerte Aarón.

[637] Aarón: porque entre más grande menos espacio ocupa.

[638] M: ¿cómo, cómo, cómo?

[639] Aarón: o sea, porque entre más grande la mano menos números se hacen

En este momento de la clase los alumnos encuentran la relación entre el tamaño de la unidad (mano) y el número de iteraciones que se realizan, así la reconstrucción de medida en esta primera práctica va tomando sentido, los alumnos identifican algunas propiedades de la medición cuando practican cómo medir, a la par desarrollan el sentido de la relación entre tamaño de la unidad e iteración, cuando llega este momento el docente puede decidir avanzar en la narrativa y utilizar los mismos elementos que se han desarrollado para plantear la problemática entorno a la pregunta ¿qué pasa cuando los tamaños son diferentes y se tiene que usar una medida estándar?

5.2. LA VARA DE KÍA. LA BÚSQUEDA DE LA UNIDAD CONVENCIONAL

Las actividades que se han desarrollado en la primera práctica de la TEDE han girado en torno a la medición con unidades arbitrarias reconociendo las ventajas y desventajas de medir usando partes del cuerpo (manos, palmos, pasos, jemes, etc). Mediante esta práctica los alumnos reconocen que la medición parte de la iteración de una unidad, también reconstruyen las propiedades de la medida al recordar cómo se medía antes de que se utilizara el metro o regla. En una segunda parte de la misma práctica se introduce la medida estandarizada como una solución a los problemas de medir con unidades arbitrarias y de diferente tamaño, las cuales ellos mismos han ido identificando.

El docente aprovecha las problemáticas identificadas para introducir una narrativa que presenta una problemática similar, pero que brinda una solución, la narrativa trata de un pueblo antiguo que vivía en Napiniaca (pueblo mesoamericano) llamados los Acajay, reconocido por ser excelentes artesanos. La historia se plantea cuando el profesor enfatiza las dificultades de usar partes del cuerpo para medir y las consecuencias que esto trae:

[347] M: Numa, justamente se dedicaba a lo que dijo Ana Corina, hacia vasijas, pero no hacia cualquier tipo de vasija, hacia vasijas para los rituales que ellos hacían, entonces ¿ustedes creen que esas eran vasijas mal hechas o bien hechas?

[348] Aos: Bien hechas

[349] Lucas: porque iban a darlas para los rituales y tenían que estar bien, no deberían de fallar

[350] M: y tenía que estar bien hecha ¿verdad?, para los rituales que ellos hacían y entonces justamente fue lo que hizo que tuviera mucho éxito Napiniaca, porque llegaba gente de otros lugares ...

[351] Lucas: a comprarles

[352] M: A comprarles, a pedirles, a encargarles que les hicieran cosas y cuenta la leyenda que un día Numa se tuvo que ir a hacer un mandado y ¿sabe quién le ayudó a Numa?... Su hija y entonces llegaron unas personas importantes de otra comunidad y traían una vasija, la venían cargando con mucho cuidado, llegaron ahí donde tenía Numa su casita y su taller, donde hacía sus vasijas y dijeron: ¿está Numa, la artesana, la famosa Numa? y la hija dijo- no, no está - y dijeron - ah qué pena, porque nos tenemos que ir y no podemos dejar esta vasija, pero necesitamos que nos hagan una vasija que sea de la misma altura que esta vasija para nuestro ritual y ¿qué creen que hizo la hija?

[353] Lucas: la hizo ella

[354] M: Ella no era tan buena para hacerlo, pero ya había visto cómo su mamá media y para medir su mamá usaba (hace la representación con la mano)

[355] Lucas: cuartas... sus manos

[356] M: Las manos ¿verdad?, entonces ella dijo -pues no esta mi mamá, pero no se preocupen…

[357] Lucas: yo se las puedo hacer

[358] M: yo la puedo medir, entonces se puso a medir y midió, que media 7 cuartas (apunta en el pizarrón)

[359] Ao: yo creo …. (maestro ríe)

[360] Docente: medía siete cuartas y cuando llegó Numa ¿qué creen que pasó?

[361] Lucas: Se sorprendió y la regañó.

[362] M: le dijo: -mamá vinieron estas personas y dijo- pero como no estaba hubiéramos ganado un buen dinero con esa vasija, pero ya no la vamos a poder hacer porque ya se fueron; y le dijo su hija- no, no te preocupes mamá, yo la medí y mide 7 cuartas; dijo

Numa- ¡ah! vamos hacer la vasija. Numa se puso hacer la vasija, midió con mucho cuidado 7 cuartas, hizo la vasija y cuando llegaron a recogerla ¿qué creen qué pasó?

[363] Aos: Era más grande

[364] Ao: Más pequeña.

[365] M: Más pequeña (reafirma), y ¿qué creen que hicieron los clientes?

[366] Aos: Se enojaron , se fueron .

[367] M: y ¿qué creen qué pasó con Numa?

[368] Lucas: pues que se alteró.

[369] M: Pues se alteró mucho y le dio mucha pena, porque ella era la famosa artesana.

[370] (niños se asombran)

[371] Lucas: La primera vez que había fallado

Con la narrativa que introduce el docente, muestra a los alumnos la historia de antiguos artesanos que al medir con partes del cuerpo se han encontrado con una problemática similar a la de ellos; las medidas no son exactas y varían unas de otras. Cobb (2003) hace referencia al uso de este tipo de narrativas en la que los alumnos asocian los problemas de los personajes con los que ellos han encontrado al medir, son narrativas que permiten al maestro presentar herramientas (como la vara) como una solución razonable y no como algo arbitrario que se debe usar, de esta manera continúa con la narrativa para comprender el surgimiento de la vara con la que se ha de trabajar.

[375] M: Numa, Numa tuvo un sueño muy especial

[376] Aos: ¿cuál?

[377] M: Numa soñó que le hablaba Kia y que ella platicaba con Kia y le contaba lo que había pasado y como esas eran cosas que pasaban mucho en Napiniaca, que por estar midiendo con las manos luego uno tomaba una medida y otro hacia algo con esa medida...

[378] Lucas: porque era una niña

[379] M: y no quedaba igual y ¿qué creen que le dijo Kia?

[380] Lucas: No te preocupes, yo te ayudaré

[381] M: cuenta la leyenda que Kia les dijo -ustedes deberían medir todo con la misma vara. Con una vara que fuera, en lugar de con las manos, que midieran con una vara y en ese momento, pues como estaba dormida afuera, empezó a sentir que se le enterraba

algo ¿verdad? (en las manos que tiene hacias atras trae la vara)… entonces empezó a sentir que se le enterraba algo y ¿qué creen que se encontraba ahí?

[382] Aos: una vara

[383] (el maestro muestra la vara)

[384] M: La vara de kia

[385] Lucas: ¿la vara de kia? ¡a verla!

En la clase el profesor aprovecha la narrativa para ofrecer una solución a la problemática en común, cuando presenta la estrategia que emplearon los personajes de la historia permite a los alumnos sentirse identificados y encontrar en la vara una solución a su problema, como en la narrativa. En la TEDE se pretende que los alumnos usen una medida estandarizada (Tije, vara de 24cm) y que a partir de la narrativa encuentran el sentido de usarla y la utilidad que tendrá, además se va relacionando con uno de los principios de la EMR, el principio de realidad que plantea que no se trata de una realidad visible a los alumnos sino algo imaginable para ellos (Bressan et al., 2016), es decir los alumnos podrán imaginar ser parte de este pueblo y podrán usar la vara como una herramienta con significado y propósito. Lo anterior nace de la idea de Freudenthal (1991) en la que menciona que debe existir un contexto, en nuestro caso la narrativa de los Acajay, que debe presentar un dominio de la realidad y ser revelado al alumno para ser matematizado, se trata de que "los alumnos, quienes al principio no poseen herramientas matemáticas suficientes, las reinventen al abordar problemas presentados en contextos y situaciones realistas" (Bressan et al., 2016, p. 3).

Los alumnos han adquirido habilidades para "medir correctamente", aunque hasta el momento haya sido en un plano de medidas arbitrarias, de esta manera la puesta en marcha de la primera práctica se dirige a la indagación de cómo este pueblo establece las pautas para medir con la vara (como iterarla sin dejar espacios entre las iteraciones y sin sobreponer la iteración); para que esto suceda el principio de realidad debe llegar a su máximo esplendor, los alumnos deben experimentar aquello que imaginan y deben no sólo conocer la narrativa, sino sentirse parte de este pueblo. El docente debe involucrarlos de tal manera que el principio de actividad se presente y los alumnos comiencen a matematizar esa realidad y generen modelos que permitan el avance de la TEDE.

[197] M: … Entonces fíjense lo que vamos hacer… Vamos a imaginarnos que somos…

[198] Ao: Acajay

[199] M: Acajays, los Acajays de República de Tanzania, ok!

[200] (los niños ríen)

[201] M: Y entonces, como son Acajays a cada uno le voy a dar ....

[202] Ao: un Acajay

[203] M: ¿Saben como le decían a esta vara en la lengua de los antiguos?, ¿si les dije cómo? (escribe en el pizarrón Tije) así le decían a las varas en el tiempo de los antiguos, el Tije, ¿sí?

[204] (los niños reciben una hoja por parte de la maestra)

[205] M: Cada uno de ustedes va a ser Acajay, a cada uno de ustedes le voy a entregar lo que distingue a los Acajays, una vara de Kia.

Este momento resulta crucial para los alumnos y para nuestro experimento de enseñanza, los alumnos pasan de ser oyentes a formar parte de la narrativa, el docente los convierte en Acajay y ellos no van a medir por medir sino que medirán como lo hacían en el pueblo y con las herramientas que se usaban, Stephan (2003) habla sobre este respecto y menciona que “las herramientas también se ven como una parte constituyente de actividades” (p.31) en el sentido de que dichas herramientas ayudan a construir los significados que se quieren crear para alcanzar los objetivos planteados, por su parte Cobb y Yackel (1996) mencionan que estas herramientas se crean y evolucionan a medida que los estudiantes razonan con el material físico, como lo vimos en el fragmento anterior cuando usaron el Tije.

Es importante rescatar la manera como el Tije va tomando el protagonismo en la TEDE al ser reconocido como la unidad de medida que dará pauta a nuevas situaciones problemáticas cuando no se pueda cubrir la longitud completa y se tenga que recurrir a otro tipo de estrategia y herramientas. En esta parte de la práctica los alumnos han reconstruido algunas ideas en torno a la medida, sin embargo los *modelos de,* que han creado tendrán que seguir evolucionando para llegar a los *modelos para*, en este sentido es necesario que sean partícipes de la actividad a través de la acción de matematizar.

La práctica invita a los alumnos a que participen en un proceso de medición de objetos de su entorno, dicha medición deberá hacerse con la unidad establecida, el Tije, y los conducirá a reflexionar sobre los beneficios de contar con una medida estandarizada, además de seguir puntualizando sobre cómo medir.

El papel del docente es muy importante en este punto, monitorea la actividad matematizadora de los alumnos, sin intervenir de manera directa en su quehacer es capaz de identificar cómo los alumnos realizan la actividad. Durante la actividad los alumnos realizan la medición con el Tije, en el proceso se pueden observar diferentes estrategias que creíamos están superadas por lo que se ha vivido a partir de las primeras actividades en la práctica, pero el docente (como parte de una conjetura) prevé que pueden existir algunas inconsistencias, las cuales incluye en una conversación colectiva para redirigir la actuación de algunos estudiantes.

Sobre este respecto Freudenthal (1991) menciona que los alumnos deben participar en un proceso de re-invención de ideas y de herramientas matemáticas a partir de interactuar con situaciones problemáticas (como medir con el Tije) y con sus pares, por supuesto bajo la guía del docente lo que es de suma importancia porque los alumnos debieran usar sus propias herramientas, pero si se les "abandona" tardarán mucho tiempo en darse cuenta que cometen un error que altera el resultado, es por eso que la intervención del docente resulta adecuada en este tipo de situaciones, tal y como lo podemos ver a continuación:

[247] M: A ver ¿cómo le mediste?

[248] (las alumnas miden el ancho del pizarrón una pone su vara, enseguida otra niña pone su vara, luego otra vara, hasta medir el ancho)

[249] (César mide el marco de fotos dando vuelta a la vara, para no moverla, Javier también mide así la ventana)

[250] M: Vamos a sus lugares

[251] M: Daniela, ¿qué mediste? el escritorio, la bandera, ¿qué más mediste? Tienes que medir cuatro cosas.

[252] M: ¿ya mediste cuánto mide tu banca de alto? A ver los que ya acabaron vayan a sus lugares, Acajay.

[253] (alumna mide el marco para la foto y lo hace dando vuelta a la vara)

[254] M: ¿cómo le estás haciendo? Platícame cómo, a ver cuéntame ¿cuántas varas mide la bandera?

[255] Aa: tres varas y cachito (mide la bandera dando vuelta a la vara)

[256] M: tres varas y cachito

[257] M: ¿para qué le das la vuelta?

[258] Aa: para no perder la medida

[259] (Azucena mide el ancho del pizarrón dando vuelta a la vara, así mismo lo hace Daniela pero de la parte de la base)

[260] M: Azucena ¿que has medido?, mide el escritorio, ¿a ver?

(Azucena gira su vara)

[257]Aas: cinco.

Como se puede observar, el docente se percata de las estrategias que utilizan los alumnos para realizar la medición, a partir de ello analiza un error al iterar la vara (cuando los alumnos van girando), esto representa un problema en la medición porque altera el resultado de la medición misma. Es importante rescatar, como lo dijo Stephan (2003), que en este tipo de situaciones debe aprovecharse este detalle para abrir tema de conversación y que sean los alumnos quienes identifiquen el error y puedan corregirlo a través de las discusiones colectivas.

[301] M: ¡Muy bien!, oigan lo que ví es que medían un poco diferente, algunos y otros ¿verdad?, les platico como ví que medían y me dicen si fue una buena forma de medir o no ¿sí?

[302] (el maestro toma el cuadro para fotos)

[303] Ao: Se va a tomar una foto

[304] M: Voy a medir el marco de acá ¡sale!, fijense, a ver si alguien se dio cuenta que midió así, ¡sale!, fijense cuento uno, dos…(va dando vuelta a la vara)

[305] Aa: Cuatro y medio

[306] M: Y algo, verdad, ¿esa es una buena forma de medir?

[307] M: ¿Quién midió así? levante la mano

[308] M: ¿A quién no le pareció que esta era una buena forma de medir? y midió de otra forma

[309] M: ¿A nadie? A mí si se me hace que hay un problema si medimos así, fijense

[310] Ao: También se puede con compañeros

[311] M: No saben por qué, porque estamos midiendo con esta parte de la vara, ¿entienden lo que estoy diciendo o no? (indica la parte interior de la vara)

El docente pone el error sobre la mesa al realizar la medición (girando la vara), así espera que detecten el inconveniente en esta acción, sin embargo los alumnos no logran identificar el problema y lo consideran una forma correcta y "práctica" de medir, en este momento es importante tomar la decisión de orientar a los alumnos sobre el inconveniente que se está presentando y explicar por qué resulta equivocada la estrategia. Para el docente resulta importante que los alumnos modifiquen esta acción para que el proceso de reconstrucción del significado que los llevará a la reinvención de la medición con una unidad estandarizada cumpla con los requisitos correctos, por ello pone a discusión la inconsistencia de este tipo de medición, para que ellos reflexionen lo qué está pasando.

> [317] M: A ver mide cómo midieron ellos (empieza a medir y va dando vuelta a la vara, que se sostiene en su parte circular)
>
> [318] M: Entonces explícales
>
> [319] Jacinto: aquí ya está midiendo una parte (se refiere a la parte circular de la vara cuando está en vertical)
>
> [320] M: Ese espacio lo estoy midiendo, pero no lo estoy contando, ¿sí?

Aunque al inicio los alumnos no parecen percibir el error, uno de ellos se percata de que medir así resulta incorrecto, Stephan et al., (2003) hablan de cómo en las conversaciones colectivas se intenta validar una acción y como esta misma acción provee al profesor de un respaldo para las argumentaciones presentadas, se trata entonces de ir buscando las respuestas (argumentos) que permitan reconstruir el significado de la medición y que contribuyan a la reinvención de los significados matemáticos, en este caso la iteración resulta errónea cuando se gira la vara, por el espacio que se está omitiendo y que cambia el resultado.

La acción debe modificarse porque está estrechamente relacionado con la "exactitud" que resulta necesaria para trabajar con los pequeños (lo que en parte-todo sería la propiedad de congruencia), la medición debe ser exacta para determinar qué pequeño cubre el total de la unidad, aunque es un tema que se analizará más adelante creemos conveniente que los alumnos, como lo dijo Gómezescobar (2018), reconozcan dónde comienza y termina la unidad que está siendo iterada que corresponde a los espacios que se dejan entre cada paso.

Aquí podemos hablar de otra característica de la EMR, la que habla de la matematización progresiva, Freudenthal (1991) menciona que dichas características no corresponden a una jerarquía estrictamente ordenada, esto es que cuando los alumnos comienza a matematizar la realidad y avanzan en los modelos de referencia que emplean, no están obligados a avanzar de manera lineal sino que pueden regresar a indagar aquello que parecía estar superado. Cuando el alumno externa que ese espacio no está siendo contado hace alusión a la exactitud que es necesaria al iterar cuando se mide la longitud, aunque no haga alusión a este término sin duda les ayuda a reconstruir esta idea, que se ha visto desde el inicio de la práctica.

También es interesante ver cómo el docente plantea más situaciones donde no existe una medición exacta y los alumnos argumentan el por qué resulta inapropiada, es decir, el discurso va cambiando porque la práctica "no consiste en establecer una definición matemática sino en establecer o identificar todas las relaciones en el marco de referencia del contenido (herramientas y significados) a través de las representaciones y los procedimientos que se derivan de éstas en el contexto de la interacción" (Cordero, 2001, p. 12), a partir de esto podemos observar las múltiples respuestas de los alumnos que no hablan de un concepto matemático, pero son capaces de reconocer y justificar una acción cuando describen las consecuencias de dejar espacios al iterar.

[331] M: Entonces ¿qué pasa si midiera así y fuera yo un Acajay?

[332] Aa: Que le saldría mal

[333] M: ¿Saldría mal , verdad? contaría menos de lo que tengo que contar

[334] Aa: y ya no sería más, porque como hay un espacio lo haríamos más grande

[335] M: ¿Por qué no es una buena forma de medir eso?

[336] Jaime: porque estamos dejando un espacio y no lo estamos contando ése

[337] M: ¡Ok! Azucena ¿tú entiendes cuál es el espacio que no estamos contando?

[338] Jaime: Es esta parte (le señala a Azucena, indica con su mano y vara cuál es), esta parte que tu la estas dejando, no la estás contando.

[339] Ao: O sea nomás la hace así

[340] Aa: Pedacitos, un espacio.

[341] Jaime: Es por decir que dejaras un cuadro, un cuadro un espacio, ese no lo estás contando

[342] Sofía: Porque aquí dejamos un gran espacio con el dedo y aquí sientes que no cuenta, pero sí cuenta y mides mal

En este fragmento se puede observar que, a partir de que el docente presenta el inconveniente (dejar espacios en la vara), los alumnos comprenden y son capaces de justificar a través de discursos conceptuales que dan cuenta que identifican y reconocen la propiedad de la exactitud, por qué no se deben dejar espacios en las iteraciones al medir . Así la reconstrucción de las ideas sobre la medida de longitudes con una unidad (Tije) sigue avanzando y la matematización de la realidad se va convirtiendo en significados matemáticos, los alumnos reconocen las particularidades de la medición a través del quehacer que han desarrollado y con ello han creado ideas matemáticas que podrán matematizar más adelante. Desde este punto y en relación con las ideas de herramientas y símbolos que Stephan (2003) propuso, el maestro deberá introducir un problema que los lleve a la matematización progresiva y les demande nuevas y mejores herramientas.

Con lo anterior nos referimos a que se han superado ciertos elementos y ha llegado el momento de entrar en el análisis de lo que implica un “cachito”, es decir, de aquella parte de la longitud que no puede ser cubierta por completo con la unidad. En la tercera sesión el profesor mide un objeto (portarretrato) con la vara y se observa que mide más de cuatro Tijes, pero menos de cinco. La pregunta que lanza el profesor los lleva a reflexionar qué pasa con ese espacio, ¿cuál es la medida correcta, cuatro o cinco?

[389] M: ¿quién le quiere ayudar a sus compañeras? ¿Por qué creen que no es una buena manera medir cinco?

[390] (Mario levanta la mano)

[391] M: pásale, todos vamos a ponerle atención a Mario

[392] Mario: por que sobra, queda un espacio acá.

[393] M: A ver, vamos explicando

[394] (las alumnas junto con Mario miden con las tres varas, uno, dos, tres, cuatro…)

[395] Ao: cuatro y medio

[396] (al terminar de medir Mario pone los dedos donde se quedó, toma la vara y la muestra)

[397] Mario: porque aquí queda mucho espacio

[398] M: A ver ¿qué nos está explicando Mario? a mí no me queda muy claro

[399] Jaime: que sobra mucho espacio

[400] M: Preguntenle a Mario

[401] (Mario muestra dónde quedó la vara y cuánto espacio sobra)

[402] Aos: cuatro y medio

[403] Ao: ¿cuánto sobra de espacio?

[404] Aa: cuatro y medio

[405] M: ¿ustedes qué opinan chicos?

[406] Aos: cuatro y medio

La conversación gira en torno de la situación en la que los alumnos explicaron por qué no puede medir cinco aunque mida más de cuatro, Cortina (2013) menciona que este tipo de situaciones permite a los alumnos reflexionar e imaginar una solución en las fracciones (las cuales se discuten, pero en un plano de parte-todo y no como iteración de una subunidad) y saber que se debe encontrar un número entre cuatro y cinco que permita dar cuenta de la medición. Con ello se posibilita alcanzar los objetivos planteados en la TEDE, esto es reconocer a la fracción como un número capaz de cuantificar y no sólo como la parte de un todo.

Al analizar esta situación, se observa el tipo de discurso que emplean los alumnos en relación a las herramientas y símbolos que van generando, Cobb (2003) consideró importante que los alumnos cambien su discurso al justificar sus respuestas porque se busca ir más allá de describir un método o proceso por el cual se produce un resultado para pasar a un argumento que nace del entendimiento del estudiante.

Los alumnos asumen que no es cuatro porque hay un espacio que sobra, pero tampoco cinco porque la unidad rebasa el espacio, en ello se aprecia la importancia de los "objetos mentales[2]", Freudenthal (1983) sugirió que estos deben ser construidos antes de los conceptos matemáticos con la finalidad de recoger todos los significados de los fenómenos que están siendo organizados y que en relación a la norma matemática permiten transitar por la reconstrucción y reinvención de la medición con medidas arbitrarias y no arbitrarias, de sus cualidades y en este caso las limitaciones al usarlas.

Aprovechando estos objetos mentales, el docente plantea una nueva situación que permite a los alumnos reconocer que tener solo el Tije como unidad de medida es suficiente. La

---

[2] Lo que Freudenthal llama objetos mentales es lo que Fichsbein denomina intuiciones y Piaget representaciones (González y Arevalo, 2019, p. 3)

actividad consiste en formar equipos y medir la estaturas de los miembros usando unas tiras de papel que el profesor les ha entregado. El proceso de reconstrucción comienza cuando tienen que obtener su medida en Tijes, lo que será el pretexto para presentar las subunidades.

En la norma matemática que describimos en este apartado, la reconstrucción del concepto medida y sus propiedades, el papel del docente es fundamental, por ello nos parece importante resaltar la manera como el docente se percata que los alumnos comienzan a reconocer la iteración exacta como un elemento de la medición, sin embargo aún hay alumnos que aún emplean estrategias inadecuadas para medir con exactitud. El docente reconoce que un elemento indispensables para que la TEDE siga su curso es la iteración, los alumnos deben apropiarse de esta práctica cuando matematizan a pesar de que crean que pueden usar otra estrategia (como doblar la tira). El docente reconoce cuándo es necesario intervenir para direccionar el quehacer de los alumnos y apoyar en esa reinvención.

> [250] (docente pasa a supervisar trabajo en lugares)
>
> [251] M: a ver, los que lo hicieron enrollado no funciona (refiriéndose a dobles), hay que medir haciendo rayitas (iterando). Muy bien (a equipos que si iteraban). Miren que bien lo hizo Carmen (muestra tira), hizo sus rayitas, ya vieron cómo midió Carmen (pasa al frente y muestra a todos), haciendo sus rayitas.
>
> [252] M: A ver, ¿ya midieron?
>
> [253] (docente se aproxima a alumno y le pide ver su tira medida)
>
> [254] (los equipos siguen midiendo con iteración)
>
> [255] M: A ver, ¿por qué no hacen rayitas? (mientras monitorea equipos)
>
> [256] Ao: ya lo mediste todo chueco (al iterar)
>
> [257] (los alumnos se ayudan a iterar dentro del equipo)

En su mayoría los alumnos identifican la iteración como un elemento consustancial a la medición, la reconstrucción del concepto se da y la norma matemática se cristaliza para permitir que los alumnos reinventen la medición desde la unidad estandarizada, sobre este respecto Gómezescobar (2019) menciona que la idea de marcar la iteración sirve para que se reconozca el tamaño de la unidad y no se pierda la exactitud al realizar la medida, además nuestro experimento permitirá desarrollar las herramientas necesarias para el uso de las subunidades. En el momento de la conversación colectiva es necesario que se presente el problema para dar pie a la matematización progresiva, los alumnos miden con una unidad (Tije) pero no pueden llegar a la exactitud que se requiere y como lo detectó Stephan (2003), esto genera incertidumbre entre los alumnos pues no se sabe qué pasa con la parte de una unidad de medida que puede extenderse más allá del punto final.

Lo anterior se observa cuando la estatura de una alumna se ubica entre cinco y seis Tijes, después de que comprueban que la tira sobrepasa la longitud de la unidad, el docente lanza la pregunta que busca determinar los qué pasa con esa situación, este es el pretexto para avanzar en la TEDE y pasar de una matematización horizontal a una vertical donde se ha de reflexionar sobre las medidas menores a la unidad.

[48] M: Ayúdenme chicos ¿nadie quiere opinar?

[49] (los alumnos comentan en general)

[50] M: A ver, vamos a escuchar a Leticia

[51] Leticia: ¡No mide seis!

[52] M: a ver Lupita, escucha bien lo que opina. Escuchamos a Leticia

[53] Leticia: No mide seis porque mide cinco… mide cinco y cacho

[54] M: Mide cinco y este pedacito, este pedazote, ¿verdad?, pero no mide…

[55] Aos: Seis

Durante la conversación los alumnos se encuentran ante una pregunta interesante, la medida de su compañero ¿es cinco o seis?; las reflexiones giran en torno a que se pasa de cinco pero le falta para ser seis; en expresiones como "cinco y cacho" van identificando que no se puede determinar la medida exacta, así los estudiantes se ven orillados a identificar que el Tije no es suficiente para realizar una medición, Gravemeijer et al., (2003) hablan de cómo esto le permite al profesor presentar nuevas herramientas para el proceso de reinvención guiada, se dice guiada porque como dicen los autores, "no podemos esperar que los estudiantes inventen espontáneamente estas herramientas (…) confiamos en el maestro para resolver la aparente paradoja de la "planificación sobre la marcha" (p. 63). Esto significa que el docente tiene la solución que ayudará a cuantificar ese cacho que hay en la medida.

[421] M: Ok. Entonces, ¿cómo creen qué habrán hecho los Acajay cuando pasó esto? Median y no les daba exacto, estos mismos problemas tenían los Acajay.

[422] Ao: Lo intentaban otra vez.

[423] M: Lo intentamos, pero ¿cuántas veces lo intentamos con Hernán?

[424] Ao: 100

[425] M: Y de todos modos ya vimos que Hernán mide más de cinco, verdad

[426] Ao: Y menos de seis

[427] M: Y bastante más de cinco (señalando iteración entre cinco y seis), pero ¿son cinco y medio?

[428] Aos: No

[429] Ao: Casi llega a seis

[430] M: Pero ¿no llega a seis, verdad? A lo mejor para diciembre ya llegó a seis, verdad, o para enero, pero ahorita no mide las seis varas, ¿se queda corto verdad? ¿Qué habrán hecho los Acajay para medir esos espacios, cuando miden más de cinco, pero menos de seis, qué habrán hecho?

[431] Aa: (alza mano) utilizaron cuartas

[432] M: Utilizaban cuartas, esa sería una buena idea, verdad.

[433] Ao: Pero no tenían las mismas medidas

[434] M: ah, ya oyeron lo que dijo Jaime; pero no tenían las mismas cuartas, ¿también podían usar dedos, verdad?

[435] Ao: Pero no tenían los mismos dedos

[436] M: Pero no tenían los mismos dedos tampoco funciona, chispas. Ya sé, ya sé qué podrían haber hecho, inventar una nueva vara.

[437] Aos: ohhh

[438] Ao: Más chiquita

[439] M: ¿Qué les parece mi idea de hacer una nueva vara?

[440] Ao: Está buena, está buena la idea.

[441] M: Pero vean (mide espacio de tira de alumno que no se completa en vara)

[442] Ao: Tampoco, salió lo mismo.

[443] M: A lo mejor una más chiquita

[444] Ao: Si

[445] Ao: Más pequeña

[446] Ao: Que mida la mitad de un Tije

[447] M: ¿que mida como la mitad de un Tije? ¿Y eso por qué ayudaría?

[448] Ao: Para que queden los medios exactos.

En este fragmento se observa que los alumnos y el docente buscan encontrar la medida del alumno (que pasa de cinco pero es menor de seis); cuando algunos exponen con el dedo o la mano se retoma ideas que ya han construido y mencionan que esto resulta inconveniente porque miden diferente, no obstante un alumno plantea la posibilidad de usar una subunidad (la mitad del tije) como una herramienta de solución. Como hemos mencionado, dentro de las sesiones las actividades se modifican para plantear nuevos problemas que aparentemente ya estaban resueltos, en este caso miden con una unidad estandarizada y aprenden cómo hacerlo, sin embargo ese "cacho" que sobra presenta una nueva oportunidad para seguir avanzando en la TEDE. El maestro involucra a los estudiantes para que sean ellos quienes propongan soluciones que se convierten en tema de discusión para analizar su viabilidad y explorar las ventajas y desventajas de las soluciones sugeridas (Gravemeijer, 2003).

En el marco de la narrativa, los alumnos saben que una buena idea es hacer nuevas varas que midan menos que el Tije (menos que la unidad) como lo expresa un alumno "que mida la mitad de un Tije" "para que nos queden exactos", para él una vara que mida la "mitad" será suficiente para cubrir toda la longitud, con ello hace referencia a la idea parte-todo de la fracción al expresar "mitad", sin embargo el docente conduce la idea para más adelante proponer la herramienta óptima bajo las condiciones que se requiere.

[455] M: Pero esa parte de la leyenda no se las he platicado, de cómo resolvieron este problema los Acajay. ¿quieren saber cómo resolvieron este problema?

[456] Aos: Síiii

[457] (Jaime levanta su mano)

[458] M: Jaime

[459] Jaime: porque ellos no tenían las mitades exactas y quisieron inventar la mitad de uno.

[460] M: Muy bien, hicieron una nueva varita, ok.

[461] Ao: y utilizaron un machete

[462] M: ¿se acuerdan que quería decir oticaimo? A ver, no me están escuchando, no quieren saber cómo resolvieron el problema los Acajay

[463] Aos: Síiii

[464] M: ¿se acuerdan que quería decir aticaimo?

[465] Aos: No

[466] M: Empieza con "p" de pequeño

[467] Aos: Pequeño

[468] M: Ah que bien, que niños tan listos, que niños tan listos, qué quería decir caimo.

[469] Aos: Pequeño

[470] M: Pequeño, y por qué le dirían pequeño

[471] Jaime: porque era más chico que el Tije

A partir de las aportaciones de los alumnos el docente busca introducir la herramienta necesaria para seguir avanzando en la TEDE, aprovecha las contribuciones de los alumnos para seguir con la narrativa que les permitirá avanzar en la matematización progresiva y cumplir los propósitos del experimento de diseño. En la conversación, Jaime insiste en introducir una vara que mida la mitad, tomando su aporte el docente propone utilizar algo que denominaron "caimo" que significa pequeño, el alumno agrega que se llama pequeño porque es más chico que el Tije, esto permitirá al docente presentar y trabajar con las subunidades del Tije.

Hasta este momento la norma matemática en torno a la reorganización del concepto medida se ha desarrollado de tal manera que ha permitido que los alumnos "reconstruyan el significado" de la medición y que junto con el maestro desarrollen la interacción que ha instaurado una nueva forma de medir (matematizar un fenómeno de la realidad) y que ha concluido en la reinvención de herramientas que permiten realizar la medición, es decir, primero se ha reconstruido el significado de medir (desde la idea de las propiedades no explícitas de medición) y después se ha avanzando para que los alumnos tengan un nuevo significado de medida, una reinvención del concepto.

En el marco de la primera práctica de la TEDE analizamos cómo los alumnos han adquirido los puntos clave de la norma matemática al reconocer la medida como una necesidad social y además, han reorganizado el concepto de ésta al implementar medidas arbitrarias y reconocer sus limitaciones al emplearlas. Esto dio lugar a buscar y reinventar una herramienta que ayudará a resolver los problemas anteriormente identificados, *el Tije*, lo cual resultó de utilidad para desarrollar los objetos mentales necesarios y reconocer las propiedades de la iteración, tales como comenzar desde cero, no dejar espacios y no superponer las unidades de medida. Consideramos que este primer momento se concluye con éxito y sienta las bases para continuar en el experimento de enseñanza.

A partir de esta norma matemática la TEDE puede continuar buscando la consolidación de más normas matemáticas, que en conjunción con las normas sociales han de permitir que la matematización de los alumnos siga avanzando. Desde la visión de la EMR, se trata que el experimento de enseñanza lleve a los alumnos por el mundo de los matemáticos en la creación (reinvención) de los conceptos y significados de las matemáticas, en este sentido los alumnos ahora estarán ante la tarea de interpretar una nueva norma matemática relacionada con las subunidades (los pequeños).

Finalmente, en lo que toca a los principios de la EMR en la actuación del maestro podemos decir que la necesidad de trabajar el principio de realidad resulta indispensable, pues los alumnos tienen el primer contacto con algo que para ellos es imaginable y capaz de generar una actividad matematizadora, lo cual dará pie a comenzar con una matematización horizontal donde se actúa sobre el fenómeno en sí. En las ideas de la EMR esto resulta fascinante porque los alumnos juegan el rol de matemáticos y "reinventan" los conceptos matemáticos. Por ejemplo, volverse parte de un grupo (los Acajay) y recrear la medida convencional con la vara, da respuesta a muchas de sus problemáticas al medir y a partir de las interacciones todo tiene sentido.

En estos momentos el papel del docente es esencial para poder guiar a los alumnos, de ahí la reinvención guiada como principio, pues en la clase, con el rol de las normas matemáticas y las normas generales, el docente encuentra las pautas de direccionalidad para que se pueda llevar los momentos de la matematización progresiva donde el alumno, a partir de esta realidad de medición, irá transitando a nuevos saberes que le permitirán tener una reconstrucción de la fracción, por ejemplo con esta necesidad de saber cómo medir "los cachitos" sobrantes al iterar la unidad de referencia.

En las ideas de Gravemeijer (1990) los puntos de partida de una secuencia instruccional deben crear experiencias reales a los estudiantes en el sentido de que ellos puedan involucrarse en actividades que les sean personalmente significativas para que de lo informal (matematización horizontal) creen bases para un proceso formal (matematización vertical).

VI

REINVENTAR LAS FRACCIONES UNITARIAS.
UNA NORMA MATEMÁTICA

Recordemos que al finalizar la primera práctica, siguiendo la narrativa de los Ajacay el profesor pidió a los alumnos buscar una solución para definir lo que significaba “un cachito” y encontrar una posible solución a la problemática utilizando subunidades y para que el alumno encuentre significativas las herramientas que el docente va proporcionando, señala Gravemeijer (2003), debe estar inmerso en un proceso de matematización que le ayude a dar sentido a aquello que utiliza, sin que se vea como una imposición sino como una necesidad, cuidando además que el nuevo problema de la TEDE esté arraigado al escenario anterior y no sea un problema arbitrario.

Dentro de este capítulo analizamos la segunda práctica matemática de la TEDE, la cual tiene como propósito utilizar el Tije para cubrir una longitud sin que quede residuo, en esta práctica los alumnos se percatan que la longitud de muchos objetos no se corresponde con un número exacto de iteraciones de la unidad (Delgado y Cortina, 2020) de manera que el uso de subunidades (“pequeños”) debe convertirse en la oportunidad de cuantificar la diferencia entre las estaturas de los alumnos y de todo aquello que se desea medir con exactitud y que no puede hacerse con unidades exactas.

En otras palabras, el objetivo de esta segunda práctica consiste en que los alumnos reconozcan el tamaño relativo de una subunidad de medida en referencia a la unidad (Tije) cuya longitud corresponde a una fracción unitaria. En esta práctica matemática es importante resaltar el rol del docente quien debe procurar que los alumnos no asuman que las subunidades corresponden a la idea de parte-todo, esto es, que las subunidades no están contenidas en la unidad sino que son independientes, por ejemplo un “pequeño” de dos requiere iterar dos veces para para cubrir la longitud del Tije que es la unidad. Por la razón anterior resulta importante la manera como se dan los primeros contactos con estas herramientas.

6.1. EL TAMAÑO RELATIVO DE LOS “PEQUEÑOS”. RECONOCIENDO LAS FRACCIONES UNITARIAS

La norma matemática que se intenta instaurar en esta segunda práctica consiste en que los los alumnos reinventen el significado de fracción, en este sentido la norma guía el actuar de los alumnos y docente (en torno al objeto matemático fracción) para poder adentrarse al mundo de los matemáticos e “inventar”, matematizar y apropiarse de las ideas en torno al concepto matemático, en este sentido se espera que reconstruyan su significado alejándose de la idea que estipula que las fracciones están incluidas dentro de la unidad de medida, al contrario de esto como se señaló “esperamos que los estudiantes interpreten las fracciones como medidas que explican la iteración del tamaño de una subunidad” (Cortina, s/f, p.7). En este sentido, la introducción de la subunidad no se realiza cortando la unidad en mitades, que podría ser lo más sencillo ya que se consideraría como parte de un todo, sino que se introduce cortando cilindros de papel o popotes de plástico hasta lograr que su longitud cumpla con una condición específica, así el número de iteraciones determinará su valor relativo y ayudará a entender que por ejemplo 2/3 se interpreta como 1/3 que se iteró dos veces.

> el numerador en una fracción se interpretará como indicando el número de veces que se iteró una subunidad, para representar un cierto tamaño, y el denominador, el tamaño de la subunidad que se usó, en relación con el tamaño de la unidad de medida” (Cortina, s.f., p.7).

Lo importante es que las subunidades no estén contenidas en una unidad, que no sean una parte del todo (unidad) y que puedan concebirse como independientes, como algo capaz de cuantificar. En el primer acercamiento con la idea de los “pequeños los alumnos buscan crear el “pequeño” de dos, cuya condición es que al iterarlo dos veces cubra el total de la vara, en ese caso se obtiene su valor relativo, 1⁄2 que al iterarlo dos veces es equivalente a la fracción unitaria, para lograrlo, los alumnos comienzan la reinvención a partir del “oticaimo”, que significa “pequeño de a dos”:

> [191] M: a ver, voy a medir, quién me presta su lápiz, ¿tienen lápiz todos? Necesitamos lápiz, lo voy a medir ¿si cabe dos veces exactas?
>
> [192] Aos: no
>
> [193] M: ¿Necesito algo más largo o algo más corto?

[194] Aos: más corto

[195] M: a ver, cómo de qué corto, ustedes me dicen de qué largo, ¿así creen que funcione?, a ver voy a probar… (corta) uno, dos (iterando) ¿necesito uno más corto o uno más largo?

[196] Aa: un tantito más largo

[197] M: un tantito más largo… ah entonces voy a necesitar uno nuevo, verdad ¿alguien tiene duda de cómo hacerlo? ¿Mario?

[198] Mario: no maestro

Al presentar la actividad, el profesor es muy preciso en explicar cómo los alumnos deben construir la primera subunidad, cuando les muestra que si al iterarse el "pequeño" sobrepasa la unidad se considera que es muy largo y se debe cortar, por el contrario si es muy corto deben tomar un nuevo popote para cortarlo nuevamente. La idea de que el profesor muestre cómo realizar el pequeño tiene doble intención, primero en sentido de que la fracción no se vea contenida en el todo (la vara) y que no se parta la unidad para obtener la medida, sino que desde este proceso de la creación de subunidades se conciba una independiente de la otra, sin embargo si se dejase hacerlo sólo al alumno, quizá el tiempo empleado sería demasiado largo para poder crear estas nociones, es por eso que la "reinvención guiada", toma sentido para apoyar a los alumnos y llevarlos en el proceso de creación y acercarlos cada vez más al cumplimiento del objetivo de la práctica.

La intención es que el alumno considere al "pequeño" como un instrumento de medida independiente del Tije. Al matematizar esta actividad los alumnos no sólo construyen una subunidad sino que participan en un contexto interactivo que les permite la reconstrucción del significado (Cordero, 2001), es decir comienzan a percibir la fracción como algo que sirve para cuantificar.

Es interesante ver cómo los conocimientos de la primera práctica no sólo son la base para presentar nuevas problemáticas que permiten desarrollar diferentes herramientas, sino que también se aprecia la transición de *modelos de* a *modelos para* (Bressan et al., 2016) cuando los alumnos tienen que iterar la subunidad aplicando los conocimientos que han adquirido previamente (no dejar espacios) y que les sirven en un nuevo contexto. Los alumnos miden de manera correcta utilizando los saberes que ya han adquirido.

[24] M: oigan, entonces ¿qué fue lo que hicimos ahorita, qué fue lo que hicimos ahorita que hicieron los Acajay?

[25] Ao: marcamos y medimos

[26] M: ¿pero cómo se llama ese popotito?

[27] Aos: oticaimo

Cuando el alumno expresa "marcamos y medimos", hace referencia a lo que se trabajó en la práctica uno y los alumnos reconocen que para una iteración más precisa doblar en dos partes la unidad no es lo más viable por los espacios que puede omitir, es por eso que las iteraciones deben ser lo más exactas posible y para lograrlo marcar resulta una mejor estrategia. En este sentido, aquello que anteriormente comprendieron ahora lo aplican de manera natural.

El ajuste de los modelos nos permite observar que los alumnos despliegan sus conocimientos y se hacen partícipes de una matematización progresiva, son capaces de superar el contexto de referencia y van sentando las bases para la progresión de la TEDE. Un ejemplo de ello es el fragmento siguiente en el que los alumnos reconocen que el hecho de que la unidad (en este caso subunidad) sea más pequeña implica que la iteración sea mayor.

[28] M: ok, y ¿ustedes creen que con esos dos ya podían medir todo exactamente?

[29] Aos: no

[30] M: Dominic, por qué no

[31] Dominic: porque también hay más grandes que la mitad

[32] M: porque luego tendríamos que medir cosas que son más grandes que la mitad y con esto ¿no nos saldría exacto?

[33] Dominic: (niega)

[34] M: algunas cosas sí, pero otras no nos darían exactas con éste, verdad, entonces, ¿qué habrán hecho los Acajay?

[35] Ao: profe, por eso yo hice dos de estos

[36] M: no, teníamos que hacer uno nada más. ¿todavía no has hecho tu pequeño de a dos, entonces?

[37] Ao: sí

[38] M: a ver chicos, entonces ¿qué habrán hecho los Acajay si no les alcanzaba?

[39] Aa: hicieron más pequeños

[40] M: ¿eh? uno más pequeño

[41] Aa: sí

[42] M: cómo o por qué uno más pequeño, fíjense lo que hicieron, el eticaimo, a ver necesito atención. Entonces el oticaimo no era suficiente entonces hicieron el…

[43] Aos: eticaimo

[44] M: ¿qué creen que quiere decir eticaimo?

[45] Aa: pequeño de a tres

[46] M: muy bien, tú sabes Acajay, pequeño de tres, muy bien Victoria

[47] Aos: ¿Victoria?

[48] M: ah muy bien Sofía, muy bien. A ver, ¿cómo sería el pequeño de a tres?

[49] Aos: más pequeños

[50] M: a ver ¿cómo sería el pequeño de a tres, qué característica tendría?, Dominic ya sabe, Lucas ya sabe, Donatello ya sabe, a ver Noemí, a ver vamos a escuchar a Noemí

[51] Noemí: tiene que ser más chiquito para que quepan tres popotitos aquí (se refiere a la vara)

[52] M: Tiene que caber…

[53] Aa: tres veces

[54] M: tiene que caber tres veces en la vara ¿va a ser más largo o más chico que el pequeño de a dos?

[55] Aos: más chico

[56] M: por qué si tres es más grande que dos

[57] (todos hablan al mismo tiempo)

[58] M: a ver, Fabiola tiene una respuesta, vamos a escuchar

[59] Fabiola: tiene que ser más pequeño porque si no, no cabe (tomando vara)

[60] M: ¿sí es más grande que el pequeño de a dos no va a caber aquí?

[61] Ao: no, tiene que ser más pequeño

En el fragmento anterior, el docente plantea la necesidad de crear más subunidades, una cuestión que los alumnos reflexionan de forma acertada, cuando les pregunta si el pequeño de tres es más grande o más chico que el de dos, una alumna identifica que entre más iteraciones necesite para cubrir la vara más pequeño será su tamaño para que "quepa". En este momento los alumnos identifican el tamaño relativo de las subunidades y son capaces de argumentar dicha afirmación, lo que nos permite conjeturar que la matematización sobre las herramientas va generando los conocimientos base sobre fracciones, es decir, el valor unitario que representa. El papel del docente es importante en la apropiación de ideas sobre la relación recíproca de tamaño relativo, pues a través de las conversaciones colectivas orienta a los alumnos para la modificación de sus esquemas fraccionarios y los lleva a identificar la relación que hay entre la unidad y el número de iteraciones de un pequeño (relación recíproca de tamaño relativo).

Es importante reconocer cómo se va pasando por un nivel de matematización horizontal (al realizar los pequeños) a un nivel de matematización vertical (cuando reconocen el valor relativo de cada uno de los pequeños); el principio de niveles, el de interacción y la reinvención guiada se ven presentes y esto ayudará a reconocer que $1/7$ no es mayor a $1/5$ por el hecho de que el 7 es un número mayor, sino que tiene que ver con el tamaño relativo de la subunidad, otro ejemplo se da al crear más "pequeños".

[91] M: Entonces, ¿cómo es? Es un pequeño de…

[92] Aos: De a cuatro

[93] M: De cuatro y va tener que caber aquí ¿cuántas veces?

[94] Aos: cuatro veces.

[95] M: Fíjate Cecilia, éste cabe tres veces (muestra el popote), el que quepa cuatro, ¿va ser más chico o más grande? (le pregunta a una alumna) ¿tú que crees?

[96] Aa: Más chico.

Vemos cómo los alumnos identifican con facilidad el tamaño relativo de cada uno de los pequeños que van creando, respecto de este momento de la clase Stephan (2003) menciona que las prácticas matemáticas involucran al alumno a tal grado que es capaz de razonar y argumentar matemáticamente dentro de la norma matemática en la que la fracción es una subunidad independiente de la unidad (Tije) y no como algo contenido en ella, este tipo de argumentos sientan la base para dar el valor a las fracciones unitarias considerando el tamaño relativo de los "pequeños", pues en su justificación los alumnos mencionan que al ser iterado más veces para completar la unidad, el "pequeño" será más chico, por ello mencionan que el "pequeño de cuatro" es menor que el "pequeño de tres".

Empero, la norma matemática (reinventar las fracciones unitarias) no tendría sentido sin la ayuda de las herramientas, la idea de matematización que comparten Freudentahl (1991) y Gravemeijer et al., (2003) es que en el experimento de diseño los escenarios se unen para lograr que los alumnos realicen un quehacer matemático sobre una realidad, la medición con "pequeños". Desde esta idea, el uso de las herramientas ha permitido que dentro de la clase nazca una nueva noción de lo que significa la fracción y que los alumnos reconozcan las características esenciales de ésta, es decir, los alumnos comienzan a dibujar una fracción que cuantifica y que es independiente de la unidad en lugar de imaginarla contenida en un todo.

La creación de los "pequeños" (de dos, tres, cuatro, cinco, seis) lleva a los alumnos crear nuevos objetos mentales (que como ya mencionamos, anteceden a los conceptos) que les permiten apropiarse de aquello que implica el concepto fracción como cuantificador. Durante la creación de estos objetos mentales los alumnos demuestran que los "pequeños" (que luego serán fracciones) no están contenidos en la unidad sino que son una herramienta independiente que nos permite medir, por eso, en el transcurso de su creación buscan la aprobación del maestro para demostrar que han comprendido la manera como deben surgir estas subunidades, esto se visualiza en partes de la clase cuando le cuestionan si así debe ser el pequeño e iteran junto a él para comprobar la medida.

En el siguiente fragmento observamos cómo la norma se hace evidente cuando, para elaborar los "pequeños", los alumnos deciden hacerlo no a partir de dobleces o pensando que la subunidad está contenida en el Tije, sino que las crean como unidades independientes y reconocen que deben cortar o emplear un nuevo popote si no cumple con la condición de iteración solicitada:

[391] M: ¿ya te quedó el de a tres? Wow miren acá hay un súper Acajay, ya se están haciendo profesionales

[392] Ao: a mí también ya me quedó el de a tres

[393] Ao: ya me quedó, ya me quedó

[394] M: ¿el de a dos si lo mediste bien?

[395] (un alumno marca e itera para comprobarle al docente su pequeño de a tres)

[396] M: ¿le sobra verdad?

[397] (el alumno corta el excedente)

[398] Ao: ¿me puede dar otro? (se acerca otro alumno)

[399] Ao: (demuestra a docente pequeño de a tres iterando)

[400] M: perfecto, ayúdale a tus compañeros (regresa con el primer alumno) a ver, a ver ¿cómo te está saliendo?

Las expresiones y acciones de los alumnos cómo "¿me puede dar otro? me sobra" muestran que han comprendido uno de los elementos principales de las subunidades, que no son parte de un todo y al mismo tiempo la iteración (que lleva a la exactitud) se vuelve parte del quehacer matemático que realizan. La iteración les permite alejarse de estrategias como la medición y el doblez de la unidad. Sin duda, como se puede apreciar, "el uso de herramientas puede servir no sólo para amplificar sino para reorganizar la actividad" (Cobb, 2003, p. 6), de aquí la importancia de que el docente reconozca los objetivos de la TEDE y encuentre los momentos ideales, a través de las conjeturas, para problematizar la situación y lograr que los alumnos busquen más y mejores herramientas que le permitan resolver la situación y hagan evidente el razonamiento que justifica su acción.

Conforme avanzan las sesiones de la segunda práctica observamos cómo los alumnos reconstruyen la idea de fracción (aun sin saber que están trabajando sobre esto), sobre el respecto Steffe (2002) reconoció que el esquema fraccionario del alumno va cambiando cuando sus argumentos toman sentido en la iteración y no en las partes de un todo, es importante que los alumnos reconozcan el número de veces que se necesita iterar un pequeño para cubrir la unidad de referencia y alejarse de la idea de que en la unidad hay cierto número de piezas de un mismo tamaño. De esta manera el tamaño relativo de la fracción toma un nuevo sentido para los alumnos y abona a la comprensión de la unidad unitaria porque pueden ver e imaginar la superficie que cubrirá, es decir, se comprende que a diferencia de los números enteros, la fracción unitaria no es mayor por comprender un número más grande, sino que está en relación con el número de iteraciones que se requiera para cubrir la unidad.

[136] M: Ahora sí va el reto difícil Ana. En la hoja quiero que dibujen, primero quiero que lo imaginemos, uno que no hemos hecho, quiero que lo imaginemos, no vamos a decir nada, solo que lo imaginemos el pequeño de a veinte, vamos a imaginarlo.

[137] M: voy a ver quién la hizo bien. ¿Quién dibujó algo muy grande? (los niños mueven la cabeza en señal que no)

[138] M: Obvio si no dibujaron algo muy grande la tienen mal, porque veinte es un numerote.

[139] (No, no, es chiquito, se comenta en el grupo)

[140] M: El veinte es un numerote, tendría que dibujar algo muy grande, ¿no?

[141] M: Lucas ¿dibujaste algo grande o pequeño?

[142] Lucas: Pequeño

[143] M: ¿Por qué pequeño? Hazlo con tus dedos (hace la marca con los dedos, otros niños también la hacen) ¿qué escribiste?

[144] Lucas: Para que quepa bien en la vara.

[145] M: El popote debe de ser chiquito… ¿Alguien más quiere compartir lo que escribió? (Ana, Jaime y Luis Humberto quieren participar)

[146] Jacinto: Yo creo que sería de este tamaño, porque se va dividir en más partes

[147] M: Algo diferente a lo de Jacinto.

[148] Leticia: Entre más grande el número menos grande el popote.

[149] Sofía: sería de este tamaño, porque si fuera más grande sería 19, 18, 17, etc.

[150] Ana Paula: Yo creo que sería de este tamaño porque si lo hago muy grande no me cabría 20 veces, pero de este tamaño si cabe las 20.

[151] Luis Huberto: Entre más grande el número, más chico tiene que ser el popote.

[152] Fabiola: Porque si estuviera más grande no podría ser pequeño de a 20 y así sí porque está chiquito.

Cuando el docente les dice “imaginemos un pequeño de 20” busca que, a través de las reflexiones hechas hasta el momento, los alumnos puedan desplegar un discurso en el que reconozcan su tamaño relativo a partir de las nociones de iteración, así las respuestas que dan los alumnos nos permiten observar cómo han ido comprendiendo la fracción, en su mayoría dicen que el tamaño tiene que ver por el número de iteraciones que se requieren para completar la unidad, por ejemplo Ana Paula dice “si lo hago más grande no me cabría 20 veces”, lo que nos hace pensar que ella imaginó la subunidad de tal modo que al iterarla tendría que caber 20 veces, sin embargo alumnos como Jacinto aún tienen arraigado la idea de la división al expresar que “se va a dividir en más partes”, en este momento de la clase el docente busca validar con otra respuesta para ir cambiando los esquemas de fracturador en relación a las actividades realizadas, al hacer esto intenta potenciar aquellos discursos que ayuden a comprender la fracción en una idea de medida, claro, sin mencionar que existe un error.

Se trata de crear "*un número fraccionario* como número que denota numerosidad y longitud, sin hacer una comparación explícita de parte a todo" (Steffe, 2002, p. 28), por lo que se tendrán que presentar las fracciones como magnitudes cuantificadoras que son algo externo al entero, lo que ayuda además a interpretar a las fracciones desde un factor multiplicativo. Los pequeños ayudarán a "orientar a los estudiantes a pensar en las fracciones unitarias como multiplicandos (…) que sean concebidas como números que cuantifican tamaño, por tratarse del tamaño de una sola cosa" (Cortina y Zúñiga, 2008, p. 43).

6.2. LA SIMBOLIZACIÓN DEL DENOMINADOR

Los mismos argumentos de los alumnos les han permitido avanzar en la TEDE, ellos comprenden que las subunidades representan una herramienta que les permite cuantificar (Stephan, 2002) y se han apropiado de ésta sin que haya sido impuesta por el docente y han reconocido la necesidad que han de satisfacer y reconocen también las propiedades que requiere implementarse (no dejar espacios, comenzar desde el inicio). Una vez que el docente identifica que los alumnos han dominado esta parte de la matematización puede ir avanzando hacia nuevos quehaceres, en este proceso el docente continúa con la práctica intentando ahora instaurar un símbolo (que representara el denominador).

Gravemeijer et al. (2003) señalaron lo importante que son las herramientas y los símbolos para el proceso de reinvención de la fracción, afirma que éstas pueden verse como un reflejo de la misma actividad, lo que puede apreciarse en la segunda práctica, cuando los alumnos reconocen los "pequeños" como algo capaz de cuantificar. No obstante tal comprensión se hace necesario acceder al mundo de los símbolos y por esa razón el docente apoya a los alumnos para que lo logren, para ello les presenta una problemática que los Acajay habían enfrentado cuando tuvieron la necesidad de utilizar subunidades.

> [186] M: Otro problema que tuvieron los Acajays es que escribían la medida de los pequeños, pero para escribir el pequeño de a 20 fíjense que largo, para escribir el *pequeño de a 20* , ¡ay gastamos mucha tinta¡, ya vieron todo lo que hay que escribir para poner pequeño de a 20 (lo subraya en el pizarrón) ¿no habrá una forma más económica, más simple de escribir?

[187] Lucas: Con un palito

[188] M: Pero sin escribir tantas letras, tantas palabras, verdad. Qué tal que nada más escribieran así miren! (El maestro apunta en el pizarrón “20”)

[189] Ana Corina: Porque no sabes 20 de a qué; ¿20 cuartas?

Con la pregunta ¿cómo hacer para representar el “pequeño” de 20 sin tener que escribir tanto? se logra que los alumnos pasen a una nueva etapa de razonamiento que ha de concretizarse en futuras prácticas con la representación escrita de la fracción, esto ayudará a que los alumnos reconozcan el denominador como el “pequeño” del que se está echando mano y dejar fuera la expresión “es el que dice en cuántas partes de divide el entero”, la idea es que sea el mismo alumno quién encuentre una forma diferente de hacerlo porque, como lo dice una alumna, escribir solo el número 20 da pie a que se pueda pensar en diversas unidades de medida.

Las soluciones que ofrezcan los alumnos podrán ayudar al maestro a presentar el símbolo necesario para la comprensión de la convencionalidad de la escritura de la fracción, sin que sea vea como una imposición del maestro sino como solución a la problemática, por eso, ante lo planteado, el docente pone a discusión las soluciones que han presentado los alumnos pero hace énfasis en aquella que más se relaciona con la que ha de emplear.

[124] M: A ver, enséñalo, fíjense, él no escribió letra, ¿si entendemos cómo es?

[125] (un alumno pasa al pizarrón a escribir)

[126] M: ¿todos lo ven?

[127] Aarón: (escribe en pizarrón “↓-20”)

[128] M: ¿qué querrá decir?

[129] Aos: pequeño de 20

[130] M: Xiomara, ¿cómo que es pequeño de a 20?

[131] Xiomara: porque está hacia abajo y la línea… (tono de voz muy bajo)

[132] M: ¿eh?

[133] Xiomara: porque la línea está indicando hacía abajo y está…

[134] M: la flecha indica hacia abajo, ¿y qué más?, fuerte porque no te escucho

[135] Xiomara: la línea yo siento que es pequeño

[136] M: dices que es como la forma de decir que es pequeño (indicando guión)

[137] Ao: que disminuye menos 20

Al utilizar símbolos, los alumnos reconocen la oportunidad de emplear un lenguaje que les permita entender "pequeño de 20" sin la necesidad de escribir demasiado, las propuestas que brindan denotan que comprenden la necesidad de contar con un símbolo para expresar el tamaño de los pequeños, esto posibilita introducir el primero de los símbolos que ayudará a los alumnos a comprender el sentido de la notación de fracción. Resulta interesante observar que los alumnos identifican la oportunidad de comunicar ideas o conceptos matemáticos con notaciones diferentes lo que la convierte en una oportunidad para que el docente presente el símbolo que ha de emplearse.

[155] M: ¿y el de 13? ¿Qué les parece este sistema?

[156] Aos: Bien, y no usa letras ya vieron

[157] Ao: con símbolos

[158] M: que original, fíjense que me llamó mucho la atención éste sistema porque estuve viendo y los Acajay hicieron algo parecido a lo de Aarón, inventaron un símbolo especial para señalar que algo era pequeño, entonces no usaban una inicial o una abreviación, que también serían buenas ideas. Ellos usaban un símbolo especial, como si hiciéramos el pequeño de a 5 en el sistema de Aarón (escribe en pizarrón "↓-5") entonces para escribir nada más el 5 para pequeño de a 5 en su sistema sería así, verdad, pero los Acajay lo pensaron un poco diferente, ellos usaban otros números, sus propios números, pero aquí vamos a usar los que conocemos, los que nos enseñaron desde preescolar, entonces lo que hacían es que escribían el número y hacían esto, fíjense (escribe en el pizarrón $\boxed{5}$)

[159] Román: (habla muy bajo)

[160] M: ¿Qué es Román?

[161] Román: ya no me acuerdo.

[162] Ao: yo le entendí que debían encerrar el número.

[163] M: lo encerraban en una cajita, ¿para qué lo encerraban en una cajita?

[164] Ao: para que no se perdieran

[165] M: Para saber que era pequeño, ¿Ana Corina qué entendiste?

[166] Ana Corina: porque las cosas pequeñas van en una caja

Presentar la solución a un problema a través de una herramienta o un símbolo, menciona Gravemeijer (2003), es crucial para que los alumnos avancen en la agenda y vayan apropiándose de nuevos sentidos en su quehacer matemático que los lleven a reinventar nuevos conocimientos. De esta manera el símbolo presentado resulta significativo para ellos porque ahora tienen una manera de distinguir las unidades de las subunidades y la “cajita” contiene la medida que ha de ayudar a cubrir una longitud con exactitud (Ver figura 18).

Figura 18

Notación no convencional con la que se presenta el tamaño de la subunidad.

$\boxed{\mathbf{2}\qquad}$

Nota. Tomada de Delgado y Cortina (2020). La longitud representa 1/2.

La reconstrucción de las subunidades que ayudan a cubrir un “cacho” de una longitud dan sentido a la reinvención de las fracciones como noción distinta al parte todo y en ese proceso es importante que el alumno sienta que ha sido él quien ha generado este conocimiento y que utilice argumentos que lo ayuden a justificar su actuar y su toma de decisiones. En este sentido, reconocer los “pequeños” como noción de tamaño relativo ayudará a cumplir el objetivo de la segunda práctica, a saber que los alumnos sean capaces de realizar comparaciones de fracciones unitarias y que justifiquen por qué una u otra es mayor o menor.

Cuando los alumnos comparan fracciones unitarias y distingue cual es mayor o menor, las dificultades que comúnmente se encuentran son de origen epistemológico y aparecen cuando los conocimientos que han adquirido se contradicen y dificultan la adquisición de otros nuevos, la noción “mayor qué” desde los números enteros se contrapone con la noción en número fraccionario porque ahora el número “más grande” no corresponde a la cantidad mayor, por ejemplo el 7 podría verse mayor a 5 si se tratara de números enteros, pero no ocurre lo mismo con los números fraccionarios. Por esta razón, durante el experimento de enseñanza intentamos que los alumnos cambien y reorganicen sus ideas en torno a lo que significa mayor que dentro del contexto de las fracciones, para ello en las actividades que se han realizado los argumentos de los niños han demostrado que reconocen que entre mayor sea el número de iteraciones menor será el tamaño de la unidad, sin embargo son necesarias más actividades de comparación para que los alumnos interioricen esta propiedad.

Delgado y Cortina (2020) reconocieron la necesidad de comparar longitudes utilizando los “pequeños” para reconocer y comparar la longitud de las medidas (subunidades), proponen hacerlo primero con las longitudes que han tenido oportunidad de manipular y posteriormente que comparen el tamaño relativo de las que no han manipulado, se trata de analizar hasta qué nivel los alumnos han relacionado el número de iteraciones con el tamaño que tendrá. En un primero momento la comparación se hace de manera grupal con la intención de reconocer el dominio alcanzado con el material y para explicar los símbolos matemáticos de los que se echarán mano >, <, = (existe un ejercicio para explicar su uso dentro de la misma actividad).

[380] M: (escribe en el pizarrón $\boxed{4}$ $\boxed{5}$)

[381] M: ¿qué dice aquí, cuál será más grande?

[382] Azucena: (señala $\boxed{4} > \boxed{5}$)

[383] M: ¿Quién está de acuerdo con Azucena?

[384] (varios alumnos alzan la mano)

[385] M: ¿qué dice ahí Azucena?

[386] Azucena: que el cuatro

[387] M: ¿el cuatro?

[388] Aos: el pequeño de cuatro

[389] Azucena: el pequeño de a cuatro es mayor que el pequeño de cinco

[390] M: muy bien, un aplauso para Azucena

Los alumnos logran definir el uso de los símbolos sin entrar en detalles (reconocen si el pequeño es menor o mayor utilizando el signo), sin embargo no justifican y el maestro, en primera instancia, busca superar esta parte para adentrarse en el discurso que determina la comprensión que ha alcanzado el alumno en torno al objetivo de la segunda práctica y puedan definir por qué es menor o mayor que la otra; mediante cuestionamientos concretos el profesor permite a los alumnos definir los “pequeños” como número con propiedades diferentes a los números enteros advirtiendo que su cuantificación será diferente; la reinvención guiada que juega el docente propone esa primera reflexión en torno a las representaciones gráficas, a partir de ahí buscará la justificación de las comparaciones a hacer.

Cuando entramos al juego de la comparación, el objetivo es que los niños sean capaces de ver la fracción (pequeños) como algo capaz de cuantificar, de tal manera que al reconocer su tamaño relativo puedan determinar cual es menor o mayor y comprender justificar por qué. Asimismo, al adentrarnos a la comparación de fracciones unitarias buscamos apoyar el conocimiento base de fracciones y pasar de la idea de que $1/n$ es algo que expresa el tamaño de los segmentos producidos al dividir un entero en n partes y permear la idea, como dice Steffe (citado en Cortina, 2008), de que "$1/n$ como algo que cuantifica el tamaño de una sola cosa, la cual, si se itera (o copia) n veces, produce algo que es del mismo tamaño que un entero" (p.43).

Para lograr lo anterior, en el desarrollo de la sesión el docente pide a los alumnos que resuelvan un par de ejercicios de comparación y que escriban una justificación de por qué una es mayor que la otra, en este ejercicio nos podemos ir dando cuenta del tipo de justificaciones que emplean los alumnos en la conversación colectiva y cómo el argumento se hace más firme y convincente en el discurso pasando de un discurso del cálculo a un discurso conceptual Cobb (2003).

Comparación 1: $\boxed{7}\ \boxed{50}$

Comparación 2: $\boxed{77}\ \boxed{76}$

Ambos ejercicios se realizaron por escrito con la finalidad de analizar el discurso, también se realizó una conversación colectiva para determinar si los alumnos podrían argumentar por qué una es mayor o menor que la otra. En estas comparaciones aparecieron dos tipos de argumentos, uno justifica de manera sencilla y otro que implicaba un argumento más sólido.

[492] Antonio: ¿por qué?, porque el siete sólo cabe siete veces y el otro cincuenta

[568] Dominic: porque yo sé que el 77 es menor que 76

[569] M: ¿pero por qué?

> [570] Dominic: porque cabe una vez menos

En ambos discursos los alumnos usan un argumento simple que, aunque da cuenta que comprenden cuál "pequeño" es menor o mayor, no dan una explicación precisa de por qué y no logran justificar del todo su respuesta, sin embargo, es importante reconocer que identifican el tamaño relativo de la subunidad al expresar las veces que caben, también reconocen el factor multiplicativo cuando hacen referencia a la iteración.

Por otra parte tenemos el argumento que indica que no sólo han comprendido cuál "pequeño" es mayor o menor sino que también son capaces justificar su respuesta recurriendo al valor relativo de la subunidad, es decir, pueden expresar cómo produjeron un resultado y no sólo el método que han utilizado (Cobb, 2003).

> [522] Horacio: entre más grande sea el número, más pequeño se hace para caber las veces que te diga
>
> [581] M: entonces no me queda tan claro. A ver, vamos a oír a Jaime, sale
>
> [582] Jaime: el 77 es mucho más pequeño y cabe más veces en el Tije y mientras que el 76 es más grande, y entre menor… mayor número, menor tamaño y el 76 es menor número, mayor tamaño

En sus argumentos los alumnos mencionan la relación que existe entre el número de iteraciones y el tamaño que representará la subunidad, logran expresarlo de forma sencilla al decir que "entre más grande sea el número (denominador) más chico será el tamaño". Esto significa que ven a los pequeños como algo capaz de cuantificar y que al ser multiplicado por números naturales tendrá una longitud igual al número de veces que se itere, en este caso el tamaño de la unidad. En segundo lugar se puede apreciar que son capaces de imaginar el valor unitario de la fracción como objeto independiente de la de la unidad.

Esto significa que la norma matemática enfocada a la reinvención de la fracción unitaria cobra sentido para el alumno y va creando bases para comprenderla, pues a través de sus discurso denota que reconoce la relación recíproca de tamaño relativo entre la subunidad y la unidad de referencia, la cual ayuda a determinar su tamaño; además va reconociendo propiedades importantes del denominador que ayuda a superar los obstáculos epistemológicos, por ejemplo creer que por ser $1/7$ es mayor a $1/3$ debido al dígito 7 que en los números naturales corresponde a una cantidad mayor.

De acuerdo con Steffe (2002), Zuñiga y Cortina (2011), los argumentos de los alumnos nos acercan a percibir las fracciones unitarias en términos de multiplicandos que pueden satisfacer un criterio específico de iteraciones, es decir, en lugar de verse como propiedades de parte-todo (sumativas) la fracción se concibe como un número que se puede iterar de tal manera que su resultado está determinado al multiplicarse por un entero, por ejemplo $1/7\ x\ 5$ corresponde a iterar cinco veces la subunidad obteniendo $5/7$.

Como se mencionó en el capítulo anterior, resulta importante que los alumnos expongan sus resultados en la conversación colectiva, ya que pesar de que hubo argumentos que dan cuenta que reconocen el valor unitario de la fracción, algunos alumnos persisten en las ideas y nociones de número naturales al decir que el pequeño más grande era aquel que contenía la cifra mayor.

[98] M: Ok. ¿Quién cree que se equivocó?, levanten la mano, ¿tú crees que está mal? muy bien Xiomara, quien más cree que se equivocó? (nadie más levanta la mano), ok. ¿qué dice ahí?

[99] Fabiola: El pequeño de a dos es mayor que el pequeño de a cuatro (lo leé mientras indica con su plumón)

[100] M: ¿si escucharon? ¿si estás de acuerdo o no?, sí, entonces ¿está bien o está mal Xiomara?

[101] (Xiomara está indecisa y piensa)

[102] Xiomara: Sí, pero es que el cuatro es más grande, se debería comer al…

[103] M: ¿Pero es 4 o es el pequeño de a cuatro?

[104] (Xiomara, piensa)

[105] Xiomara: Pequeño de a cuatro

[106] (Jaime y Xioamara siguen discutiendo el pequeño de a 4)

[107] M: No pasa nada si se equivocó, ¿se vale equivocarse?

[108] Aos: Sí.

[109] M: Pásale Xiomara, no pasa nada (le entrega un Tije del material de su bolsa)

[110] M: A ver si hicieras un pequeño de a dos ¿de qué tamaño te quedaría más o menos?

[111] (Xiomara indica en su Tije)

[112] M: Entonces si hiciera un pequeño de a dos quedaría ¿cómo de a qué tamaño?, ¿de así? (dibuja en el pizarrón) y si hicieran un pequeño de a cuatro?

[113] (Xiomara lo indica en su tije, se ríe)

[114] Xiomara: Ah! Ya entendí.

[115] M: Si hicieras un pequeño de a cuatro sería?

[116] Xiomara: Más chico, ya entendí, más chiquito, ya entendí.

Ante la consigna de identificar si el "pequeño" de a dos es mayor o menor que el de cuatro, Xiomara comete un error epistemológico, usa sus conocimientos sobre los números enteros para responder y expresa que el cuatro es mayor que el dos, sin embargo al percatarse de eso el docente entra en escena y cuestiona sobre el material que previamente se había elaborado.

Siguiendo las ideas de Stephan (2003) el uso de herramientas en las narrativas permite al alumno no sólo matematizarlas sino también usarlas como base para sus argumentos ante diversas problemáticas, por eso el docente encontró en los "pequeños" elaborados la solución ante la percepción que la alumna tenía. Se trata de que el alumno sepa y comprenda el tamaño relativo de cada fracción unitaria a través de las iteraciones que el "pequeño" deba dar para completar la unidad.

La manera en que se desarrolló la segunda práctica en relación con la norma matemática que tratamos de interiorizar, nos lleva cada vez más cerca de comprender la fracción como un elemento cuantificador. La función del docente se encuentra bien definida dentro del proceso de reinvención de la fracción unitaria (vista como norma matemática) pues en su rol de guía lleva a los alumnos de ver el "pequeño" como algo que representa un cacho (matematización horizontal) a reconocerlo como una medida de orden inverso del Tije (matematización vertical) lo cual podemos definir como una clara matematización progresiva.

Cuando los alumnos inventan los pequeños, desde su quehacer en el aula, son capaces no sólo de emplearlos sino de justificar sus acciones en torno a ellos, en este primer momento identifica cuál es mayor o menor, sin embargo en esta misma idea de progresión, el docente deberá crear nuevas situaciones y problemas que sirvan como base para nuevos conocimientos, esto es para definir nuevas nociones en torno a la fracción, tal es el caso del numerador.

Hasta el momento los alumnos han identificado la relación recíproca de tamaño relativo que les ayuda a comprender la fracción de manera unitaria, de esta manera se da por concluida esta práctica pues los alumnos son capaces de identificar la multiplicidad de subunidades a través del símbolo que representa al denominador, dando paso a la tercera práctica donde se reconoce la propiedad iterativa de las subunidades.

VII

REINVENTAR EL TAMAÑO RELATIVO DE UNA FRACCIÓN. UNA NORMA MATEMÁTICA

Uno de los objetivos en el desarrollo de nuestra TEDE es lograr que los alumnos reconozcan la fracción como un sistema de cuantificación racional, es decir que sea concebida como una medida y no como una parte contenida en un entero.

Con la implementación de las primeras prácticas matemáticas los alumnos han reconocido propiedades de la medición como la iteración y la exactitud, específicamente en la segunda práctica han identificado el tamaño relativo de las subunidades en comparación con la unidad, es decir las fracciones unitarias son vistas en relación recíproca del tamaño relativo como resultado de multiplicar la subunidad por números enteros (un Tije es dos veces el pequeño de dos $2/1$, por lo tanto el pequeño de dos es la mitad de un Tije, $1/2$).

En la tercera práctica matemática, que se analiza en el presente capítulo, el objetivo es que el alumno interprete la fracción como una medida de longitud que surge de iterar una subunidad, iteración que puede resultar menor que la unidad (tres pequeños de cinco $3/5$), igual ($5/5$ cinco pequeños de cinco) o mayor (siete pequeños de cinco $7/5$) a la unidad de referencia. Para lograrlo es necesario establecer una norma matemática que permita a los alumnos encaminarse hacia ese logro, en este sentido se espera que en esta tercera práctica los alumnos logren "reinventar las fracciones propias e impropias"

El trabajo con esta práctica comienza con la iteración de una subunidad determinada, por ejemplo al usar el pequeño de 2 (equivalente a ½) si se itera tres veces se obtendrá una medida de $3/2$. Esta iteración nos llevará a realizar la comparación del tamaño relativo para obtener un resultado legítimamente razonable de las fracciones impropias (Cortina y Zúñiga, 2008), porque se espera que los alumnos reconozcan la fracción en términos multiplicativos y no como algo que cuantifica en términos de carácter partitivo, es decir, se trata de ver a la subunidad como una medida independiente que puede ser iterada tantas veces sea necesario para obtener un resultado proporcional entre la iteración y el tamaño (multiplicativamente), con esto se busca modificar el esquema donde la fracción se ve contenida dentro del entero que ha sido dividido en tantas partes (partitivo) y se identifica una fracción al sumar equis partes del todo dividido (Thompson y Saldanha, 2003).

Para lograr el objetivo de esta práctica, reconocer y dar cuenta del tamaño de una fracción, resulta necesario introducir las nociones de numerador y denominador ya que la relación entre ellos indica el tamaño del "pequeño" y el número de veces que la subunidad fue iterada, de esta manera el denominador de la fracción determina el tamaño de la subunidad y el numerador las veces que fue iterada (Delgado y Cortina, 2021).

7.1. LA ITERACIÓN DE LA SUBUNIDAD

Como se mencionó, en esta tercera práctica se busca que los alumnos determinen y comparen el tamaño relativo de las fracciones tomando como referencia la unidad (fracciones propias e impropias). De esta manera los alumnos pasarán de reconocer la fracción unitaria a la necesidad de comprender la iteración para determinar el tamaño de la medida, es decir, se trata de iterar fracciones unitarias para producir fracciones no unitarias (Tzur, 2002).

Thompson y Saldanha (2003) encontraron que pensar la fracción como "A partes de B" dificulta a los alumnos comprender expresiones del tipo $6/5$ pues resulta difícil comprender cómo pueden tomarse dos partes de algo que está dividido en cinco, para ello se propone, como en nuestra TEDE, que las fracciones sean concebidas desde una perspectiva multiplicativa, esto es iterar seis veces $1/5$ o multiplicar seis iteraciones por $1/5$.

Por su parte, Freudenthal (1983) advierte que la comparación y descripción de objetos son fenómenos de las fracciones que pueden considerarse ideales para la enseñanza de este objeto matemático, lo cual se asocia con la fracción como comparador en un primer nivel de abstracción. Para lograr que los alumnos realicen acciones (describir y comparar) se requiere que el docente plantee una situación en la que puedan reflexionar sobre la relación entre numerador y denominador y sean capaces de determinar su tamaño para posteriormente realizar comparaciones entre la fracción y la unidad de referencia.

Por la razón anterior, para adentrar a los alumnos en estas ideas se ha incluido en la agenda de la TEDE una problemática referida al tamaño relativo de la fracción, para solucionar los alumnos deberán determinar en primera instancia qué medidas son menores, mayores o iguales a la unidad de referencia. Cobb (2003) mencionó que “la comprensión del aprendizaje matemático de los estudiantes está profundamente influenciado por las herramientas que utiliza” (p.3) y, sobre todo, por el contexto en el que las utiliza, por ello, al continuar con la narrativa de los Acajay el docente plantea la siguiente problemática.

[253] M: También para medir los terrenos o las herramientas con las que iban a trabajar, a lo mejor también tenían que ser de un tamaño específico, verdad, pero algo muy importante que era para ellos medir era su vestimenta.

[254] Lucas: por decir sus cascos que usaban

[255] M: sus penachos

[256] Lucas: Sus botas

[257] M: Su calzado

[258] M: Pero algo que era muy importante, particularmente para los Acajay, porque los Acajay eran los sabios de la comunidad, verdad, no todos los que vivían en Naíniaca eran Acajay, sino que los Acajay eran sabios. Y una de las cosas por las que se distinguían es que se ponían tiras

[259] Lucas: Tirantes

[260] M: No, así como listones, así grandes

[261] Lucas: como para cuando iban a unos 15 años

[262] M: Ah! Como si fuera para los 15 años, pero ¿qué creen que les gustaba de sus tiras? Que fueran…

[263] Aos: Especiales.

[264] M: De una medida específica, porque como eran Acajay la medida de la tira tenía que ser

[265] Ao: A su gusto

[266] M: Muy exacta, y entonces algo que era muy importante medir era esas tiras, esos listones que se colocaban en sus ropas ¿si Acajay, Denisse? ¿entendimos lo

que dije Penélope?, sí, entonces a ver Acajays les voy a pasar (muestra un fragmento de tira de papel) vamos a pensar que esta era una…

[267] Ao: Tira

[268] M: De las que se colocaban en sus ropas.

[269] Ao: Chiquita

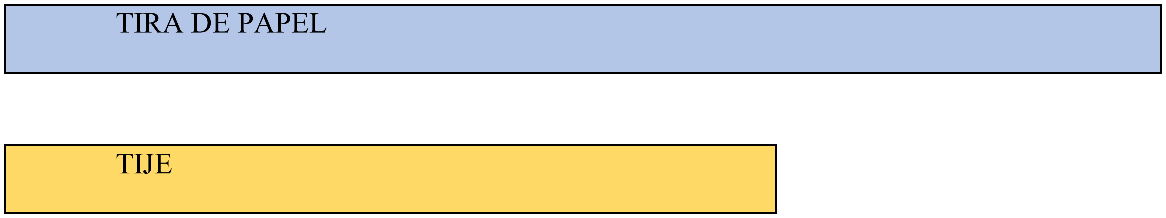
[270] M: Pues de este tamaño se las colocaban a la mejor porque se colocaban muchas, pero cuando las hacían así todas eran del mismo tamaño, la pregunta es ¿cuánto medirá?, entonces vamos a usar nuestra vara y nuestros pequeños, oigan no empezamos hasta que todos nos queda claro, con la vara, con nuestro pequeños vamos a medir la tira y vamos a apuntar la media en nuestra hoja en donde está el inciso A, justito en el inciso A, vamos apuntar cuánto midió nuestra tira, sale!

Como se puede apreciar, los alumnos deberán medir "tiras" que se supone usaban los habitantes para adornar los trajes y distinguirse del resto de los pueblos, para conseguir dichas medidas y poder replicar la tira deberán utilizar el Tije y los "pequeños" con los que han trabajado anteriormente (ver Figura 19). A través de esta nueva consigna el docente da la primera pauta para que los alumnos puedan reinventar las fracciones propias e impropias al matematizar la medida de las tiras, se trata de generar en ellos la necesidad de resolver la problemática de los Acajay, de la que ya son parte, de esta forma el principio de niveles de EMR se hace presente, pues los conocimientos que han adquirido respecto a las fracciones les han de servir para poder generar otros ligados a un nuevo objetivo.

En los procesos de reinvención el profesor juega un papel fundamental para que los alumnos pueden crear ideas matemáticas (tal como lo hicieron los matemáticos), el apoyo del profesor les permite optimizar el tiempo y las ideas que generan; es decir, los alumnos son capaces de formular objetos matemáticos con la "guía" del profesor, pero sin que éste sea el protagonista sino los mismos alumnos.

Figura 19

Tiras de papel



Nota. La tira de papel se debe medir en relación con el Tije (unidad).

7.1.1. Comparar Unidades y Subunidades. Un Problema en la Iteración

La intención de esta actividad es que los alumnos reconozcan que al iterar las subunidades se pueden generar medidas diferentes cuyo tamaño dependerá de las veces que sea iterada, sin embargo en este primer acercamiento aparece un obstáculo que dificulta la comprensión del tamaño relativo de la fracción, los alumnos no utilizan una misma subunidad para medir las tiras de papel, usaron dos unidades diferentes, un Tije y un "pequeño" de dos; lo que daría como resultado una fracción mixta.

El problema en este primer acercamiento, como lo señala Tzur (2002) tiene que ver con la combinación del entero y una subunidad, lo cual llevará al alumno a medir en términos de fracción mixta al combinar un entero con alguna otra subunidad, por ejemplo un Tije y un pequeño de a dos (1 y 1/2), cuando intentan combinar los alumnos determinan que la tira es mayor que la unidad de referencia pues emplean un Tije y se dan cuenta que "sobra" un espacio por medir, sin embargo esto no permite trabajar las fracciones impropias ya que es necesario que identifiquen el tamaño de la fracción unitaria en relación con el número de iteraciones, es decir que usen una sola subunidad que permita medir la tira y determinar su tamaño.

El uso de diferentes "pequeños" imposibilita hacer una comparación adecuada y limita la matematización progresiva, pues las conceptualizaciones de los alumnos y sus objetos mentales ven la actividad dentro de una combinación de unidades de medida que no los llevarán a la construcción del de tamaño relativo, pues se centran en buscar dos o más fracciones que cubren una longitud y no en la proporcionalidad que lleva a ver a la fracción en términos multiplicativos, es decir, al iterar una subunidad el tamaño crece en relación a esa iteración lo que implicaría un tanto número de veces esa unidad, de no observar así la matematización se dirige a otras propiedades de la fracción.

En este sentido, el detalle suscitado en la clase da la oportunidad al profesor de re direccionar la actividad y a los alumnos de reflexionar en torno a la necesidad de usar una misma subunidad; la matematización se da a través de este tipo de experiencias, en las cuales, las respuestas diferentes ante una actividad permiten reorganizar las ideas que guiaron la ejecución de las acciones, se busca vivir la experiencia propia de matematizar, en un proceso donde no hay respuestas correctas o incorrectas, sino la oportunidad de crear y reorganizar ideas con la ayuda del profesor.

En esa situación, señala Freudenthal (1983), es necesario que el docente intervenga para guiar a los alumnos hacia el logro del objetivo, manteniendo "un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar" (Freudenthal, 1991, p.55), es por eso que la consigna deja a los alumnos crear estrategias diversas y después, a través del principio de interacción, el profesor los guía hacia aquello que pudiera abonar al cumplimiento del objetivo. Si se dejara a los alumnos que fueran quienes se dieran cuenta de las dificultades al usar dos unidades de medida, la norma matemática que apunta a reinventar las fracciones propias e impropias ocuparía mucho tiempo en institucionalizarse, lo mismo pasaría con la reinvención de ese objeto matemático.

También sobre el papel del profesor, Cobb (2003) menciona que al proponer actividades a los alumnos, el docente puede conjeturar acerca de ciertos discursos y validaciones erróneas que pueden cometer (a través de los experimentos de diseño ejecutados previamente), pero es importante que no se involucre en la acción de los alumnos con un discurso de cálculo (tratando de explicar fórmulas), sino que sean ellos quienes desarrollen un discurso conceptual a través de la matematización, pues el acto de resolver está estrechamente relacionado con la actividad y la manera cómo la entendieron. En este sentido, en el siguiente fragmento puede observarse cómo los alumnos miden por primera vez las tiras con diversas subunidades.

> [322] M: A ver hay tienen su hoja y ahí tienen su "pequeño"
>
> (el maestro lee); 3 pequeños de a 3, ¿un pequeño de 3?

[323] Sofía: Tres (indica) tres pequeños y uno de a seis

[324] M: Ok, ah! Ya vieron que interesante? No sé si sea correcto, pero miren cómo escribió 3 veces.

[325] Ao: El "pequeño" de a tres

[326] M: Tres veces el "pequeño" de a 3 y uno de a seis, verdad ¿Alguien midió tres pequeños de a dos?

[327] Lucas: Yo medí el pequeño de a dos y me dió tres.

[328] M: ¿y cómo lo escribiste? A ver chequen si la de Lucas está bien

[329] Jaime: Yo maestro, yo escribí dos pequeños de a dos y un pequeño de… bueno la mitad de un pequeño de a seis.

[330] M: y esa era la medida de la vara?

[331] Ao: No

[332] M: Denisse

[333] Denisse: Yo puse un Tije y dos pequeños de a 4

Como podemos observar, la estrategia que utilizan los alumnos parece viable y más eficiente pues logran medir de manera más rápida al utilizar el Tije y alguno de los "pequeños" de manera combinada, sin embargo no han interiorizado la norma matemática necesaria que gira en torno del esquema fraccionario iterativo que ayuda a determinar una numerosidad como longitud que contiene subunidades iguales que se producen iterando y por consecuencia, al no interiorizar, no pueden determinar el tamaño relativo de las fracciones.

En el afán de que los alumnos reinventen (reinvención guiada) las fracciones propias e impropias compararlas, el docente pide a los alumnos exponer sus resultados y centrarse en cuestiones propias de la medición para, poco a poco introducir la idea que resulte más adecuada, para medir con un solo pequeño. En este sentido Cobb (2003) menciona que es necesario establecer criterios que lleven a la reconceptualización del objeto matemático y buscar recursos que le permitan al alumno reorganizar su pensamiento, es por ello que después de socializar algunos resultados el docente, en el contexto de la narrativa, hace una propuesta a los alumnos (que no les suena absurda porque está acorde con la historia) que se ha trabajado desde el inicio y ha permitido desarrollar el principio de realidad.

[396] M: Oigan, fíjense que los Acajay cuando empezaron a medir con los Tijes se dieron cuenta que no era tan buena idea combinarlos, lo mejor era usar uno solo, el Tije o uno de los pequeños, pero medir toda la tira con el mismo, ¿se podrá medir con el mismo toda la tira?

[397] Aos: Sí

[398] M: A ver, vuelvanlo a medir usando un solo Tije, el que ustedes quieran, el que ustedes escojan

[399] Aos: ya

[400] M: Perdón un sólo caimo, un sólo pequeño o el Tije, pero todo lo tiene que medir usando el mismo y la medida que les salga escríbala en el B. Entonces volvemos a medir la tira, pero ya no se vale usar de varios, verdad, porque Dominic ¿tú cómo lo mediste?

[401] Dominic: Un Tije, un pequeño de a seis y un pequeño de 4

[402] M: Fijensé Dominic midió un Tije, un pequeño de a seis y un pequeño de a 4. Uso tres, en tres diferentes, pero los Acajay les gustaba usar el mismo, entonces usen el mismo y escriban su medida, en la B pongan la medida cuando se usa el mismo.

La manera en que el docente pide a los alumnos que usen una misma subunidad no resulta extraña, pues ellos se han identificado con los personajes de la narrativa y son capaces de emplear las herramientas de maneras más provechosas; la intención es que los alumnos se introduzcan y puedan conceptualizar la medida en términos multiplicativos (al iterar) y matematicen esas ideas en relación a el significado del tamaño relativo (Thompson y Saldanha, 2003).

En este sentido nuestra agenda lleva a los alumnos a interpretar a la fracción como una forma de medición lineal y a determinar su tamaño para poder entrar en el juego de las comparaciones (Freudenthal, 1983), para ello han logrado identificar el valor unitario de las fracciones, sin embargo ahora es necesario que reconozcan el valor relativo que se puede llegar a obtener al iterar la subunidad y apropiarse de una nueva simbología que les ayude a interpretar sus mediciones, el docente ha guiado el actuar de los alumnos para razonar en torno a la fracción unitaria y ahora guiará las conversaciones colectivas para reconocer y comparar el tamaño relativo y determinar cuál es mayor o menor que la otra.

7.1.2. La Iteración de Pequeños. El Surgimiento del Numerador

Lo que se intenta con la TEDE es que los alumnos reconozcan a la fracción como un número que expresa el tamaño de un atributo y que puede ser iterado más allá de la unidad de referencia (entero). Para lograr dicho objetivo el docente juega un papel fundamental, pues busca transformar los esquemas del alumno a través de las actividades donde reconstruye las ideas en torno a una subunidad que puede ser iterada sin restricciones, se busca cambiar su percepción de fracción que es vista como una parte contenida en un todo. De esta manera es el alumno quien ha de reorganizar su conocimiento para modificar las estructuras conceptuales que tiene, para Steffe (2002) es importante saber que los nuevos esquemas no reemplazan a los anteriores sino que los esquemas de reemplazo resuelven mejor algunos problemas.

Para ello, cuando se miden las tiras se reconoce que sirven de base fenomenológica para ayudar a los alumnos a razonar sobre el tamaño relativo de las fracciones respecto a la unidad de referencia, pues la actividad pide a los alumnos matematizar en términos de reconocer la iterisidad como una solución que ayuda a comprender el objeto matemático, es decir las fracciones impropias. La iteración de los pequeños ha de llevar a los alumnos a tener contacto con fracciones no unitarias, sin embargo antes de avanzar es necesario instaurar una forma de representación (simbología) que les permita nombrar la relación entre la iteración y el tamaño de la unidad iterada, es decir la relación entre el numerador y el denominador.

En el trabajo con el experimento de enseñanza, las herramientas y la simbología resultan de suma importancia porque ayudan a los alumnos a reinventar el objeto matemático ya que, como lo mencionan Gravemeijer y Stephan (2003), la aparición de estos recursos deben darse de forma gradual y en apoyo a la matematización que los alumnos realizan, es por eso que las nuevas problemáticas que el docente presenta deben estar en concordancia con la actividad anterior y ofrecer una solución a lo que se intenta resolver.

En este sentido, dentro de la agenda, el docente busca que creen una nueva simbología que les permita identificar el tamaño relativo de la fracción en relación con la iteración, en pocas palabras busca que los alumnos generen nociones sobre la relación entre numerador y el denominador al plantearles la posibilidad de buscar una manera “sencilla” de escribir el número de iteraciones realizadas de un pequeño al medir.

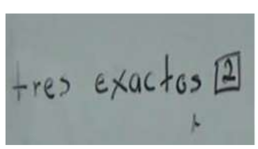
[148] M: De la medida, ¿verdad? Después se las colocaban y se decoraban, tanto hombres como mujeres. Imagínense que impresionante se veían con eso bordado así en sus telas (hace ademanes para señalar como se colocaban las tiras), ha de ver sido maravilloso como se vestían, ¿verdad? Y ustedes entonces midieron... (borra lo que está escrito en el pizarrón), midieron la tira, ¿verdad? Y luego de que la midieron, ¿qué hicieron?

[149] Ao: La cortamos.

[150] M: Algunos, por ejemplo, usaron su “pequeño de a dos”, (señala la medida de la tira en el pizarrón), la usaron tres veces ¿verdad? Pero después lo tenían que apuntar y de hecho lo apuntaron de diferentes formas... no venía preparado, pero (busca algo) hice esta hoja (se las muestra) con las formas que ustedes usaron, ¿si alcanzan a ver? (se acerca a los alumnos para mostrarles la hoja), son las diferentes formas que usaron. Sofía, ¿te acuerdas de la tuya? (observa la hoja para buscar la forma de Sofía), ah no... entonces, Noemí, ¿te acuerdas cómo escribiste la medida?

Lo que está haciendo el profesor tiene que ver con la necesidad de generar conversaciones colectivas, es decir que “las soluciones ofrecidas por los estudiantes se convertirán en el tema de discusión de toda la clase del tal manera de que los estudiantes puedan explicar las ventajas y desventajas de cada solución sugerida” (Gravemeijer et al., 2003, p. 63), por esa razón, exponer las anotaciones que realizaron para representar el número de iteraciones con un pequeño, les permite reconocer las diversas formas de representación que han utilizado, para posteriormente reconocer aquella que pudiera ser más funcional.

[156] M: Escribe aquí arriba para que todos vean (señala el pizarrón), fíjense como apuntó la... Noemí: (Escribe en el pizarrón “tres exactos $\boxed{2}$”)

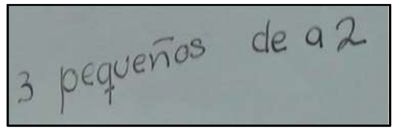


[157] Ao: Tres exactos.

[158] M: ¿Qué habrá querido decir Noemí con eso?

[159] Ao: Hay tres, tres exactos.

[193] Carmen: (Escribe en el pizarrón “3 pequeños de a 2”)



[194] M: ¿Midieron lo mismo... Carmen y Noemí?

[195] Aos: Sí

[196] M: Sí, ¿verdad? ¿Pero qué diferencia hay?

[197] Ao: Otra explicación.

[198] M: Ahorita vemos, espérame...

[199] Fabiola: (Levanta la mano)

[200] M: ¿Qué diferencia hay Fabiola? Pásale a tu lugar (refiriéndose a Carmen)

[201] Fabiola: Que no lo escribieron igual.

[202] M: ¿No? ¿Y cuál es una diferencia importante en cómo lo escribieron?

[203] Ao: (Levanta la mano)

[204] M: Fíjense, ¿Noemí escribió “pequeño de a dos”?

[205] Aos: No...

[206] M: ¿No?... ¿No escribió “pequeño de a dos”?

[207] Aa: Sí, pero de otra forma.

En la clase los alumnos han buscado diferente formas de expresar los pequeños utilizados para dar a conocer las medidas empleadas, cuando el docente las expone en la conversación busca se pueda determinar la viabilidad de una u otra; en esta actividad el papel del docente resulta fundamental para guiar a los estudiantes hacia las respuestas más cercanas a la solución, las que los Acajay emplearon, aunque como se puede apreciar, comienza analizando las formas de escritura más alejadas de las que esperaba, luego hace énfasis en la simbología que utilizó Nohemí para adentrar a los alumnos en la escritura de la fracción. El docente, tal como lo plantea Cobb (2003), puede esperar que los alumnos den respuestas encaminadas a cumplir los objetivos de la práctica, en este caso a la escritura de las fracciones donde se interprete el numerador y denominador; la intención del docente es que reconozcan el símbolo, pero sobre todo su significado (la relación entre la iteración y la subunidad empleada).

Cuando el docente reconoce en las matematizaciones de los alumnos una respuesta que se acerca a la que ha de presentar, la aprovecha para usarla como medio, lo que significa que el docente ha conjeturado que los alumnos reconocen la relación entre el pequeño y las iteraciones que se hacen con él, sin embargo hace énfasis en aquellas que apoya de manera más cercana la convencionalidad de la fracción en su escritura, tal como lo podemos apreciar en el siguiente fragmento.

[323] M: Fíjense cómo le hizo Ana Corina...

[324] M: Ah...ah...Xiomara, fíjate como lo escribió Ana Corina (se acerca Xiomara)

[325] Ana Corina: (se mueve hacia su lugar)

[326] M: Quédate ahí Ana Corina...

[327] Ana Corina: (Regresa al frente del salón)

[328] M: ¿Qué escribió Ana Corina?

[329] Xiomara: ¿Escribió "tres pequeños de a dos"?

En un primer momento de la clase se exponen las aportaciones más alejadas de la respuesta esperada para, con la aportación de Ana Corina, adentrarse a la convencionalidad que propone la TEDE y la escritura de las fracciones. Como se puede observar, los alumnos contribuyen a la matematización progresiva a través de sus discursos y objetos mentales, es Ana Corina quien realiza una aportación considerable que el docente aprovecha para llevar a los alumnos a la creación de un símbolo que represente la relación entre iteración/pequeño en términos de fracción numerador/denominador. Aunque aún no es la escritura que el docente propondrá, se acerca mucho a ella y resulta conveniente para ir haciendo énfasis en el significado de la simbolización.

[244] M: Dile, "compañera Ana Corina..."

[245] Román: Compañera Ana Corina, ¿qué significa?

[246] Ana Corina: Tres es...

[247] M: Muy buena pregunta, vamos a escuchar a todos, ¿sale?

[248] Ana Corina: Bueno, el tres es el número que se hace y el “pequeño de a dos” el que se ocupó.

[249] M: Explícanos cómo si estuvieras midiéndolo (le entrega el popote azul)

[250] Ana Corina: Una, dos, tres... (mide con el pequeño de dos la tira que está en el pizarrón)

La justificación de Ana Corina responde, como dice Cobb (2003), a un discurso de tipo conceptual que usa un lenguaje que da respuesta sobre los métodos empleados, en este caso el símbolo que utiliza es capaz de explicar que el número que está fuera de la casilla representa las veces que ha iterado el número que está dentro (el “pequeño”). El hecho de desplegar este discurso en una conversación colectiva permite al resto de los alumnos matematizar la idea y usarla de manera que se entienda el significado del numerador y el denominador.

Al realizar la medición con el “pequeño” de dos, Ana Corina demuestra las iteraciones realizadas para determinar el tamaño de la tira de papel, esto permite a los alumnos tener un acercamiento con el significado de la simbología empleada. Este momento resulta crucial para el desarrollo de la agenda, ya que mediante esta conversación colectiva se coloca a los alumnos cada vez más cerca de la reinvención de las fracciones (propias e impropias) y de la notación convencional. Como se ha visto, el principio de realidad y reinvención guiada juegan un papel importante para la matematización por la que atraviesan los alumnos, llevándolos a concebir a la fracción como una medida independiente de la unidad de referencia.

Para el docente resulta importante que los alumnos reconozcan el numerador como parte de los símbolos que dan cuenta del tamaño relativo de una fracción, pues están estrechamente vinculados con una relación multiplicativa que nace de la iteración, sobre ese respecto Thompson y Saldanha (2003) mencionan que es necesario que los alumnos consideren a la fracción con propiedades multiplicativas y no sumativas, pues tiene sus raíces en las nociones proporcionales que implican X número de veces la unidad, en nuestro caso los “pequeños”.

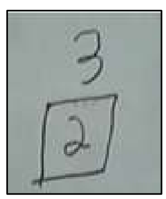
Cuando a través de la iteración, los alumnos relacionan las propiedades multiplicativas de la fracción con el símbolo que representan, reconocen una cantidad medida, por ejemplo 3/5 implica que la subunidad de 1/5 ha sido iterada tres veces para medir una longitud. Es por eso que el docente instaura, como lo menciona Gravemeijer (2003), una idea de la que los alumnos se apropian para simplificar el trabajo de escritura, pero para nosotros significa que se van adentrando cada vez más en las ideas matemáticas bajo la matematización que realizan.

A través de las conversaciones colectivas, el docente ha presentado un símbolo del sistema de notación ya establecido, "implica agregarle un número a la casilla, el cual se agrega a la parte superior de la misma". Para los alumnos llega a ser significativo, pues no lo consideran arbitrario y sin sentido, sino un elemento que les ha de ayudar como supuestos Acajay.

[350] M: ¿Sí?... Oigan, fíjense que me emocioné mucho cuando vi que escribían los pequeños así, porque se parece mucho a cómo lo hacían los Acajay... se parece muchísimo.

[351] Ao: Es que ya vivíamos antes.

[352] M: Ya vivían antes, yo creo porque se parece muchisísimo a como lo escribían los Acajay, ellos cuando escribían estas medidas, también ponían (escribe en el pizarrón) el tamaño del pequeño, pero, ¿qué creen?, este no lo ponían aquí (señala el número tres de " 3 $\boxed{2}$ "), lo ponían aquí (escribe de nuevo en el pizarrón) miren...



[353] Aos: Oh...Oh...

[354] M: Entonces, ¿ahí qué dice?

[355] Aos: El "pequeño de a dos" ... (hablan varios a la vez)

[356] Lucas: El "pequeño de a dos" tres veces

[357] M: ¿Lucas?... Dice lo mismo, dice tres "pequeños de a dos", tres veces...

[358] Aos: "El pequeño de a dos"

En este momento de la clase el maestro reconoce las aportaciones de cada uno de los Acajay y dicho símbolo que representa el tamaño relativo de la fracción y tiene relación con el número de veces que un "pequeño" ha sido iterado es aceptado y entendido por los alumnos, al ser introducido de manera adecuada lo consideran útil pues usa las mismas construcciones de los alumnos para articularlas con las que desarrollaron los Acajay, de esta manera les da la oportunidad de recrear y reinventar las nociones de la fracción desde su simbología, además cuando se pide que expliquen lo que significa logran hacerlo sin dificultad y encuentran la relación entre el número fuera de la casilla (numerador) y el que está dentro de la casilla (denominador).

Para guiar la reinvención, el docente plantea actividades donde es necesario emplear la escritura que han acordado para simbolizar la relación entre la iteración y el pequeño, la intención es que los alumnos se apropien de dicha escritura y puedan usar un discurso conceptual para explicar lo que representa y por qué se usa ese símbolo.

[359] M:… ¿Quién cree que ya le entendió al código Acajay?

[360] Aos: (Varios levantan la mano)

[361] M: Será, será, será... a ver... que pase...Denisse.

[362] Denisse: (Pasa al pizarrón)

[363] M: ¿Cómo escribirían...seis veces el "pequeño de a cuatro"?... ¿Cómo escribirían la medida seis veces el "pequeño de a cuatro"?

[364] Denisse: (Escribe en el pizarrón)

[365] M: ¿Sí? ¿Quién no está de acuerdo?

[366] Aos: (Nadie contesta)

[367] M: Wooow, sí está bien, ¿verdad?... Ahora que pase...Daniela, ¿cómo escribirían... tres

[368] Daniela: (Pasa al pizarrón)

[369] M: Tres veces el “pequeño de a cuatro”. Daniela: (Escribe en el pizarrón)

[370] M: ¿Sí está bien? ¿Tres veces el “pequeño de a cuatro”?

[371] Aos: Sí

[372] M: Muy bien Daniela, ahora pasa...Azucena...pásele. Azucena: (Pasa al pizarrón)

Con la presentación de un par de ejemplos que dan cuenta de la relación iteración/pequeño el docente puede corroborar que se los alumnos han entendido lo que implica cada uno de los elementos de la simbolización. En este sentido el uso del símbolo y el discurso que sobre él han desarrollado permite pasar a otra etapa de la agenda, a la del reconocimiento de fracciones menores, mayores o iguales que la unidad de referencia. Para lograr que el alumno modifique sus esquemas en torno a la fracción, se ha pensado en la relación entre notación y la misma fracción, y, en relación con las normas generales, la norma matemática va teniendo sentido a través de las conversaciones colectivas y el desarrollo de un esquema iterativo fraccionario.

7.2. COMPARAR SUBUNIDADES (FRACCIONES)

Como mencionamos, el objetivo de la tercera práctica es que los alumnos logren interpretar a la fracción como una medida de longitud a través de la iteración de una subunidad (pequeño) y dicha medida puede resultar menor, mayor o igual que la unidad de referencia (Tije). Para lograr este objetivo el docente tiene que introducir a los alumnos en una norma matemática que le permita reinventar las fracciones propias e impropias y estructurar un discurso que les permita justificar su respuesta.

Hasta este momento, las prácticas matemáticas desarrolladas en nuestra TEDE, han buscado que el alumno reconozca la fracción como una idea alejada del significado parte todo (subunidades contenidas dentro de la unidad de medida) y han procurado que desarrolle nociones para que reconozca que esas subunidades son independientes de la unidad de medida. Estas ideas, como lo mencionamos, encajan con lo que plantea Freudenthal (1983) en relación al enfoque fenomenológico comparativo de las fracciones, ya que al considerar las subunidades independientes da la oportunidad de comparar tamaños de objetos a partir de fracciones propias e impropias que dan cuenta de una medida.

En la secuencia que a continuación analizaremos se espera que los estudiantes interpreten las fracciones como medidas que explican la iteración de los pequeños y que permiten interpretar cuando algo es menor, mayor o igual a la unidad de referencia, lo que dará pie a la apropiación de las fracciones propias e impropias. Para lograr dicho objetivo en un primer momento el alumno tendrá que reconocer en qué situación la medida (a través de la iteración de un pequeño) es igual a la unidad de referencia.

7.2.1. Iterar e Igualar con la Unidad de Referencia.

Thompson y Saldanha (2003) mencionan que es necesario que los alumnos comprendan la relación entre la unidad de referencia y la fracción, es decir que si A es 1/5 de B, entonces B es 5 veces mayor A; esta comprensión ayuda a entender el número de iteraciones necesarias de un pequeño para igualar la unidad y posteriormente determinar si la medida es menor o mayor a la unidad.

Lo que se busca en la agenda es que el alumno comprenda la relación entre el número de iteraciones y la subunidad empleada para igualar al Tije, es decir que si se emplea el "pequeño" de dos requiere dos iteraciones, si selecciona el de tres necesita tres iteraciones y así sucesivamente. Para que los alumnos encuentren esa relación el docente propone una actividad.

[456] M: ¡Chicos!... escuchen lo que está pasando...no hay varas.

[457] Aa: Con el Tije.

[458] M: ¿Con este Tije lo podemos hacer? (lo muestra) pero, ¿qué creen que le pasó a este Tije?

[459] Aos: Se rompió...

[460] M: ¿Qué habrán hecho los Acajay cuando se les perdía la vara?

[461] Aos: (Hablan al mismo tiempo) Quién sabe...Hacer otra...

[462] M: O se les rompía...

[463] Aos: (Hablan al mismo tiempo) Usaban los pequeños... Pues la pegan con pegamento...

[464] M: ¿Cómo usaban los pequeños?

[465] Aos: (Hablan al mismo tiempo y no se entiende)

[466] M: Vamos a escuchar chicos, para que todos estemos claros. Lupita...

[467] Lupita: Los unimos.

[468] M: ¿Los unimos?

[469] Lupita: (Afirma con la cabeza)

[470] M: ¿Cómo vamos a unirlos?... Luis Humberto tiene una idea, ¿qué podemos hacer si no hay varas? Y la vara que tenemos...

[471] Ao: Se rompió...

[472] M: Está rota, ¿qué habrán hecho los Acajay cuándo se les rompía su vara?... Vamos a escuchar a Luis Humberto.

[473] Luis Humberto: (Muestra sus “pequeños”) Medían dos veces el “pequeño de a dos” para hacer una vara.

[474] M: Luis Humberto cree que podían usar sus “pequeños” para hacer una vara...

[475] Aos: (Hablan al mismo tiempo) Oh...Sí, si podían...

[476] M: ¿Quién más? ¿Quién está de acuerdo con Luis Humberto?

Como se puede ver, el trabajo del docente es crear una situación problema que lleve a los alumnos a reflexionar en torno de lo que se espera que hagan, en este sentido se propone que resuelvan la falta de unidad de referencia (Tije) a partir del uso de subunidades para su recreación, es decir que puedan adentrarse en la comprensión de la relación recíproca de tamaño relativo; además busca que en las conversaciones colectivas los alumnos desplieguen sus discursos, que no den una explicación basada en definiciones sino que sean capaces de comprender el por qué de sus acciones. De esta manera se pone en marcha el principio de interacción, pues es a través de las aportaciones del grupo (lo que dice y escucha) que se avanza en los procesos de matematización. Antes de aceptar una respuesta como válida el docente busca que sean los alumnos quiénes rechacen la propuesta, por esa razón cuando Luis Humberto da una solución que podría ser adecuada el docente pregunta quién está de acuerdo con él.

En esta parte de la clase lo que se busca es que el alumno pueda determinar cuándo una medida es igual a la unidad de referencia y cuándo la medida será menor o mayor a dicha unidad. Se puede ver que el alumno ha razonado la relación entre el número de iteraciones de un pequeño y la unidad, pues puede determinar que si utiliza dos veces el pequeño de dos puede rehacer el Tije, aún sin realizar la medición comprende la relación que existe entre el numerador y denominador ya que reconoce que el tamaño del denominador deberá de ser iterada dos veces para lograr completar la unidad, en otras palabras, reconoce la relación invariante multiplicativa (Tzur, 2002), es decir el tamaño de la fracción unitaria en referencia al entero y puede apropiarse de la relación multiplicativa que hay entre el pequeño y la unidad (el pequeño de dos dos veces). Para lograr que el grupo se apropie de esta idea el docente propone la siguiente actividad.

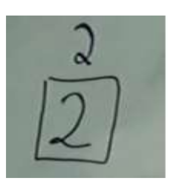
[480] M: ¿Alguien creé que si les paso un popote puede hacer una nueva vara?

[481] Aos: (Varios levantan la mano y hablan al mismo tiempo) Yo...Yo...

El objetivo del profesor es generar una reflexión colectiva en la que, mediante la discusión, comprendan la relación entre el pequeño empleado y el número de iteraciones necesarias para completar la unidad (Cobb, 1997). La finalidad del maestro es llevar a los alumnos a matematizar esta idea más allá de la elaboración del Tije para que puedan percibir de manera simbólica dicha relación y facilitar en un futuro la comparación de medida. Para ello se retoma la actividad realizada para la socialización de los procesos y discursos de alumnos dentro del grupo.

[510] M: Leticia, vamos a darle oportunidad, acuérdense que siendo pacientes también ayudamos.

[511] Leticia: (Pasa el pizarrón y escribe)



[512] M: ¿Está bien?

[513] Leticia: (Afirma con la cabeza)

[514] M: Fíjense, fíjate Dominic lo que escribió Leticia, ¿qué dice ahí?

[515] Dominic: Que dos veces cabe el "pequeño de a dos".

[516] M: Dos veces el "pequeño de a dos". Eso es lo mismo que, ¿qué?

[517] Aos: (Nadie responde)

[518] M: Eso es lo mismo que, ¿qué?

[519] Aa: Yo, maestro.

[520] M: ¿Qué mide dos veces el "pequeño de a dos"?

[521] Leticia: El Tije.

[522] M: Ah, entonces ponlo ahí (señala el pizarrón)

[523] Leticia: (Escribe en el pizarrón "Tije")

[524] M: Entonces, ¿qué es más grande? ¿el Tije o dos veces el "pequeño de a dos"?

[525] Aos: (Hablan al mismo tiempo) El Tije...Los dos...Igual...

[526] M: ¿Quién cree que son del mismo tamaño?

[527] Aos: (Algunos levantan la mano)

[528] M: Vamos a pedirle a Jaime que nos explique... ¿Por qué dices que es del mismo tamaño?

[529] Jaime: (Pasa) Porque un Tije mide lo mismo que dos "pequeños de a dos".

[530] M: ¿Un Tije mide lo mismo que dos "pequeños de a dos"?

[531] Aos: Si...

[532] M: ¿Así fue cómo hicieron su vara ahorita?

[533] Aos: Si...

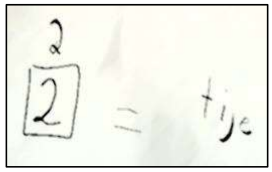
[534] M: Oigan, ¿y cómo se escribe es lo mismo? (señala el pizarrón)

[535] Ao: Yo, yo...

[536] Leticia: (Toma el plumón)

[537] Ao: Es igual...

[538] Leticia: (Escribe en el pizarrón)



En este fragmento de clase pueden observarse dos elementos clave para el desarrollo de la norma matemática que se intenta instaurar. El primero gira en torno de las ideas necesarias para lograr la igualdad entre fracción y unidad que los alumnos identifican. El segundo tiene que ver con la forma en que el docente guía dicha reinvención, es él quien lleva a los alumnos a depurar sus ideas y compartirlas con los demás, "el docente maneja estos eventos con miras a maximizar oportunidades para la producción, el intercambio y la apropiación de ideas por parte de los alumnos" (Bressan et al., 2016, p. 6).

En relación a lo anterior con la necesidad que el docente expresa de saber que los alumnos han comprendido, busca profundizar en la actividad dándole una variable a la problemática resuelta, usar otros pequeños.

[545] M: ¿Qué tal...que también se nos hubiera perdido el "pequeño de a dos"? ¿Hubiéramos podido hacer el Tije?

[546] Aos: (Hablan al mismo tiempo) ¡Sí!...

[547] M: ¿Quién cree que sí?

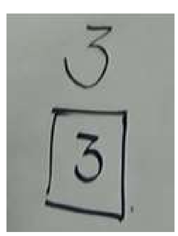
[548] Aos: (Varios levantan la mano)

[549] M: ¿Cómo lo hubieras hecho, Fabiola?

[550] Fabiola: Con el "pequeño de a tres".

[551] M: Entonces, ¿cómo habría sido? ¿Cuántas veces lo habrías usado?

[552] Fabiola: (Pasa al pizarrón y escribe)



[553] M: ¿Entendemos eso, Penélope? ¿Le entiendes a eso? ¿Está bien Fabiola?...

[554] Aos: (Hablan al mismo tiempo)

[555] M: ¿Eso qué es Fabiola? ¿Eso es igual a qué?

[556] Fabiola: (Habla muy bajito)

[557] M: Hasta no te escuché, casi nada...Voz de recreo...

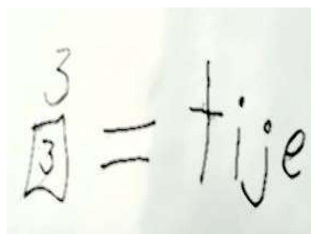
[558] Fabiola: Es que escuché...digo, es que puse tres veces el “pequeño de a tres”.

[559] M: O sea, ¿ocupamos tres veces el “pequeño de a tres”?... Penélope, ¿nos va a salir algo más largo o más corto o igual que la vara?

[560] Penélope: Igual que la vara...

[561] M: ¿Igual que la vara?... Entonces, ¿cómo lo escribirías? (refiriéndose a Fabiola) Fíjate cómo lo escribió, Leticia

[562] Fabiola: (Escribe en el pizarrón)



[563] M: Tres veces el “pequeño de a tres” es...igual al Tije... pues ahí les va otro reto... ¿Quién tiene duda? ¿están de acuerdo o a alguien no le queda claro?

En esta actividad la finalidad del docente es que los alumnos comprenden cuándo una fracción es igual a la unidad de referencia, para ello los fue lleva a reflexionar sobre la proporcionalidad entre el número de iteraciones y el tamaño del “pequeño” utilizado, de esta manera van adquiriendo el sentido de reciprocidad que guarda la fracción con respecto al entero (Thompson y Saldanha, 2003). Esto resulta importante porque permite al alumno trabajar de manera más sencilla la comparación de fracciones y le será más fácil determinar si una medida es menor, mayor o igual a la unidad de referencia, así, como lo menciona Bressan et al. (2016), los alumnos pasan por una matematización progresiva donde unos conocimientos (igualdad entre fracción y unidad de referencia) sirven de base para otros (la comparación de medidas y determinar si es menor o mayor a dicha unidad de referencia) lo que significa transitar de una matematización horizontal a una matización vertical.

7.2.2. Comparar la Medida. Mayor, Menor o Igual a la Unidad de Referencia

Al analizar que el tamaño de la fracción está dada por el número de iteraciones de la subunidad y que dichas iteraciones no son menores a la unidad de referencia, la TEDE llega a uno de los momentos clave para que los alumnos comprendan las fracciones como algo que no está contenido en un todo. la reinvención de las fracciones impropias.

El objetivo principal, como lo mencionó Steffe (2002), es que los alumnos se apropien de la idea de que una subunidad puede ser iterada tantas veces como sea necesario incluso más allá de la unidad de referencia. Además, en esta parte de la agenda pueden comparar su tamaño y determinar si es igual, menor o mayor al entero (Tije). La intención es que el docente pueda desarrollar en ellos un "esquema fraccionario iterativo" que consiste en reconocer que los números fraccionarios denotan una numerosidad como longitud y que contiene subunidades que se pueden iterar en una relación multiplicativa. Pero cuando hablamos de desarrollar esquemas no nos referimos a eliminar el esquema de fracciones que ya tienen, sino que el esquema que el docente intenta desarrollar ayuda a resolver de forma más clara situaciones y problemas que el otro no, por ejemplo las fracciones impropias.

Para trabajar y desarrollar dichas nociones el docente propone a los alumnos, en el contexto de la narrativa de los Acajay, que fabriquen tiras de diversas medidas, que servirán para la comparación entre fracciones menores, mayores o iguales a la unidad de referencia (Tije). Lo que se pretende es que los alumnos estructuren discursos conceptuales que les permitan explicar y validar cómo se puede determinar la medida de unas fracciones en comparación con otras.

> [100] M: Pero no sólo vamos a hacer eso, entonces es muy importante que antes de que empecemos la actividad (busca algo) estemos todos listos, cuando ya haga mi tira (señala el pizarrón) de esta medida, vamos a hacer tiras de medidas, le pongo cuánto midió y mi nombre, y lo meto en este sobrecito (se los muestra) cada quien va a tener un sobrecito, ¿sí? Entonces, Fabiola (le entrega sobres para que reparta) y Jacinto (le entrega sobres para que reparta).

Tiras a realizar (anotadas en pizarrón)

1 Tije	4/3	5/6	2/2	6/5

En su función de guía, el docente realiza un primer acercamiento a la actividad al recordar nociones abordadas en clases previas, por ejemplo el valor unitario de la fracción y la iterisidad de las subunidades. Cuestiona a los alumnos sobre una de las tiras a realizar (4/3) y los lleva a la reflexión en torno de dicha medida. De esta manera intenta que sean los alumnos quienes matematicen la información con la que se está trabajando, por ello el docente debe estar siempre presente para facilitar y ahorrar tiempo en los procesos de apropiación.

[35] M: Denisse, ¿qué dice ahí?

[36] Denisse: Cuatro veces el "pequeño" de a tres.

[37] M: ¿Escuchamos Xiomara?... ¿Qué dijo Denisse? ¿Está haciendo tarea de otra cosa?

[38] Xiomara: Este...

[39] M: Denisse, otra vez.

[40] Denisse: Cuatro veces el "pequeño" de a tres.

[41] M: ¿Éste qué "pequeño" es? (señala el pizarrón dirigiéndose a Xiomara, pero ella no está atenta) Ana, ¿qué "pequeño" es?

[42] Ana: El "pequeño" de a tres.

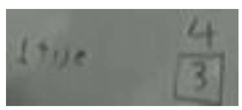
[43] M: Ajá, ¿y este cuatro quiere decir? (señala el pizarrón)

[44] Ana: Cuatro veces.

El momento en que el docente recuerda las nociones de iteración es muy corto porque su intención es sólo analizar si los alumnos recuerdan lo visto anteriormente y si tienen posibilidades de emplearlo para comparar el tamaño de diferentes medidas. Se puede apreciar que los alumnos se han apropiado de normas matemáticas trabajadas anteriormente, como el valor unitario cuando hablan del pequeño de tres (denominador). De igual manera reconocen el valor relativo cuando expresan la cantidad de veces que se ha iterado el pequeño y finalmente, reconocen la simbología empleada para representar la relación entre el pequeño y la iteración, es decir, entre numerador y denominador.

Una vez que el docente confirma que los alumnos tienen los elementos necesarios para la actividad, permite que sean ellos quienes realicen las tiras de diversas medidas (menor, mayor e igual al Tije) para utilizarlas en las comparaciones.

[240] M: Ésta es una pregunta...ahorita acabamos de recoger Noemí, vete a tu lugar ya...ah y Mario también...esta es una pregunta bien difícil de Acajay, esta es una pregunta clave, chico, que a veces se la he hecho a muchos chicos de secundaria y no me la saben contestar bien, así que necesito toda su atención...entonces dejamos los materiales, ¿listo Jaime?... Vamos a pensar, no vamos a contestar... ¿Cuál tira nos habrá salido más larga? (señala)



[241] Aos: (Algunos levantan la mano)

[242] M: Fíjense, ¿una medía...? (señala en el pizarrón)

[243] Aa: Un Tije...

[244] M: ¿Y la otra medía...? (señala en el pizarrón)

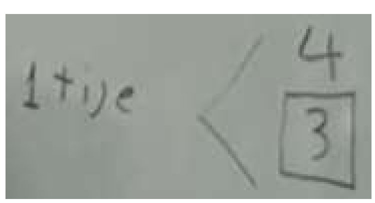
[245] Aos: Cuatro veces el "pequeño" de a tres.

[246] M: Entonces, piensen cuál habrá salido más larga.

[262] M: ¿Sí?... Sofía, pásale, vamos a ver si están de acuerdo o no, porque no sabemos

[263] Sofía: (Pasa al frente)

[264] M: Vamos a usar el pac-man...la boca del pac-man. Sofía: (Escribe en el pizarrón)



[265] M: ¿Quién está de acuerdo con Sofía?

[266] Aos: (Varios levantan la mano)

[267] M: ¿Quién no está de acuerdo con Sofía?

[268] Aos: (Algunos levantan la mano)

Como se puede observar, la primera comparación tiene que ver con la unidad y una medida mayor a ella, los alumnos identifican que 4/3 es más grande que un Tije, sin embargo resulta más interesante que el razonamiento se acompaña de la justificación. El docente pide que explique la razón de su resultado para generar una conversación colectiva en la que todos puedan ampliar las nociones que les permiten comparar fracciones.

[270] M: Varios no están de acuerdo, ¿ya ven?... Vamos a escuchar el razonamiento de Sofía... para los que no están de acuerdo y para los que no sabían, ahorita nos tiene que quedar...nos tiene que quedar clarísimo cómo está pensando Sofía, sino nos queda claro, ¿qué hacemos?

[271] Aa: Preguntar...

[272] M: ¿A quién le preguntamos?

[273] Aos: A Sofía...

[274] M: A Sofía

[275] Sofía: Que el Tije es más pequeño, porque éste (señala en el pizarrón 4/3) ocupa más espacio, si aquí diría tres (escribe "3" en el pizarrón) sería igual que el Tije, aquí es más grande porque aquí se le aumenta uno (escribe en el pizarrón "1" a un lado de 4/3).

La reflexión que hace Sofía se corresponde con lo que la TEDE pretende desarrollar, trata de que los alumnos vean las fracciones como algo que puede ser iterado más allá de la unidad de referencia. Cuando Sofía expresa que si 4/3 dijera 3/3 sería del mismo tamaño, pero como tiene una más (iteración) resulta ser mayor.

Por otra parte Tzur (2002) reconoce al docente como sujeto que orienta a los alumnos hacia la reflexión sobre la experiencia, en este caso en la relación que hay entre el número de iteraciones de una subunidad y un pequeño. Cuando el maestro pone en juego esta comparación espera que los alumnos lleguen a este tipo de reflexiones para abonar a los conocimiento comparativo de las fracciones, pues las fracciones han de servir para expresar el resultado de una comparación de cantidades o valores de magnitud, lo cual en un primer nivel de abstracción se asocia con la fracción como comparador (Real, 2013), es decir, los alumnos están interiorizando cómo se ve una fracción mayor o menor en comparación que otra al ser comparada con la unidad.

En primer momento, al reconocer, elementos sencillos los alumnos mejoran su nivel de abstracción para después poder comparar fracciones (punto de la cuarta práctica), para llevar a cabo esta reflexión Sofía puso en juego varios conocimientos, reconoció el tamaño del Tije en relación con la fracción unitaria, para posteriormente encontrar la igualdad en el sentido de una relación recíproca (Thompson y Saldanha, 2003). Después entró en juego la noción multiplicativa de un "pequeño" que ha sido iterado más allá de la unidad, es decir fracción impropia. Todo esto resulta natural para Sofía porque lo comprende como una medida mayor al Tije porque pone en juego múltiples nociones en esta primera comparación, lo que indica que ha tenido que interiorizar otras normas matemáticas que le permiten hacer esos análisis, tal es el caso de la reconceptualización de fracciones unitarias a través de la relación recíproca de tamaño relativo y la oportunidad de iterar dichas subunidades de manera que pueda ir más allá de la unidad.

Por su parte, con el objetivo de que toda la clase comprenda, el docente cuestiona a los alumnos en torno a la reflexión de Sofía y les pide que expresen cómo determina qué fracción es mayor que la otra.

> [278] M: ¿Nadie?... ¿A ti te quedó clara la explicación de Sofía? Jacinto, pásale...Fíjate, Sofía, Jacinto va a hacer tu explicación, fíjate si sí es o no es...
>
> [279] Jacinto: (Pasa al pizarrón) Éste es más pequeño (señala en el pizarrón "1 Tije") que éste (señala en el pizarrón 4/3) porque si diría tres veces el "pequeño" de a tres, sería igual, del mismo tamaño que el Tije, pero no, se le aumenta otro...son cuatro.

Cuando Jacinto explica cómo ha determinado que 4/3 es mayor a un Tije deja ver leer entre líneas que comprende la relación recíproca entre el pequeño y el entero, pues decir que 3 de 1/3 es equivalente a un entero e identificar que si se le añade otro de ⅓ es mayor que la unidad, deja ver sus reflexiones en torno a la comparación esperada. En este momento es de suma importancia la acción del docente, pues está relacionada con lo que Cobb (2003) señala respecto de los discursos que los alumnos emplean, cuando los alumnos utilizan discursos conceptuales de este tipo les proporcionan recursos al resto de la clase que les permitirán reorganizar su pensamiento y además, son de suma importancia para la clase en general porque permiten seguir avanzando en las prácticas. Empero, al reflexionar sobre una medida mayor al Tije es necesario también que generen discursos sobre las medidas que pudieran resultar menores a éste, para ello el docente propone otra comparación.

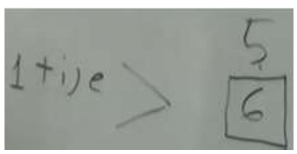
[327] M: Ahí les va otro reto Acajays, ¿listos? (escribe en el pizarrón 1 Tije – 5/6)

[328] Aos: (Algunos levantan la mano) Yo...Yo...

[329] M: Cuál será más grande, ¿cinco veces el "pequeño" de a seis o un Tije? (se acerca a Xiomara y le entrega plumón)

[330] Xiomara: (Pasa al pizarrón)

[331] M: Dominic, ¿qué será más largo? ¿cinco veces el "pequeño" de a seis o el Tije?



[332] Xiomara: (Escribe en el pizarrón)

[357] M: Todos estamos aprendiendo a explicarnos, entonces no tiene nada de malo explicarlo así...Así va a hacer un gran esfuerzo Xiomara para explicarse y no hay nada malo...
[357] Xiomara: Es que el "pequeño" de a seis, si lo medimos cinco veces en el Tije va a quedar más chiquito, pero si fueran seis, quedaría igual que el Tije, porque es el "pequeño" de a seis y por eso el Tije es más grande que el "pequeño" de a seis si lo medimos cinco veces.

[358] M: ¿Lo explicó así o lo explicó así?

[359] Aos: Lo explicó así (seña de bien)

[360] M: ¿Quién le entendió a Xiomara? Levanten la mano.

[361] Aos: (Todos levantan la mano)

[362] M: Wow, vaya explicación, ¿quién no lo entendió? Azucena, ¿lo entendiste?

Al igual que en el caso anterior, en esta situación Xiomara toma como referencia la relación entre el Tije y el número de iteraciones que requiere un "pequeño" para lograr la igualdad, es evidente cuando menciona que es el pequeño de seis y ocuparía seis de ellos para que midan igual, pero como miden cinco entonces es más chico. La relación multiplicativa que encuentran los alumnos los ayuda a comparar y determinar si es menor o mayor a la unidad de referencia.

Un punto a destacar es la manera cómo el discurso de los alumnos en las conversaciones colectivas se va haciendo de todos, lo que nos lleva a concluir que la calidad de las conversaciones colectivas como eventos sociales en los que los estudiantes participan "se consideran un medio principal de apoyar su inculturación en valores, creencias y formas de conocer la disciplina" (Cobb, 2003, p.9).

En las reflexiones de los alumnos se aprecia que toman como parámetro de comparación la igualdad con la unidad de referencia (el Tije), esto les permite saber si una medida es menor o mayor a dicha unidad. Para continuar con la agenda y con la instauración de la norma matemática el docente propone otro "reto Acajay", el cual ha de permitir a los alumnos consolidar sus ideas en torno a la comparación de fracciones.

[368] M: Ahí va otro reto Acajay, para Lupita (escribe en el pizarrón 1 Tije – $2/2$)

[369] Lupita: (Pasa al pizarrón y escribe "1 Tije< $2/2$")

[370] Aos: ¡Qué! ... (Hacen mucho ruido)

[371] M: Así piensa ella...

[372] Lupita: (lo borra y escribe ">" y después pasa a su lugar)

[373] M: ¿Quién está de acuerdo con Lupita?... Donatello, ¿tú estás de acuerdo con Lupita?

[374] (alumno afirma)

[375] M: Donatello está de acuerdo con Lupita. ¿tú también Leticia? ...Carmen, ¿tú estás de acuerdo con Lupita? ...Yuya, ¿sí?... ¿Quién no está de acuerdo?

[376] Aos: (La mayoría levantan la mano)

[377] M: Daniela, ¿tú lo quieres explicar?

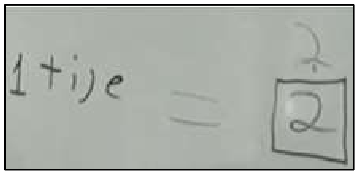
[378] Daniela: (Niega)

[379] M: ¿Tú no?

[380] Aos: (Otros levantan la mano) Yo... Yo...

[381] M: Mario... vamos a oír a Mario por qué no está de acuerdo contigo, ¿sale? (dirigiéndose a Lupita)

[382] Mario: Porque si son dos veces...es igual que un Tije (escribe en el pizarrón)



[383] Aos: (Aplauden)

La importancia de las conversaciones colectivas se puede apreciar en este fragmento de clase. Lupita no identifica el signo para representar cuál es mayor, primero menciona que un Tije es menor que 2/2, luego que el Tije es mayor. Cuando el docente pregunta "quién está de acuerdo" lo que hace es invitarlos a que expresen y validen sus ideas, esta parte resulta enriquecedora porque por sí mismos los alumnos pueden apreciar sus errores al escuchar la respuesta de los demás, contribuyendo con ello a mejorar su discurso para futuras actividades.

Mario es quien refuta la respuesta de Lupita, expresa "porque si son dos veces es igual a un Tije"; él sabe que el pequeño de dos tiene que ser iterado dos veces para llegar a la igualdad , esto significa que encuentra la relación recíproca del tamaño relativo de la que hablan Thompson y Saldanha (2003), identifica A como 2 veces B y B como ½ de A, por lo tanto reconoce que cuando ½ es iterado dos veces se ha generado la igualdad. Esta noción fue desarrollada en la sesión previa a la comparación y ha servido de base para que los alumnos comprendieran las comparaciones hechas:

> [408] Fabiola: Como dijo Lupita la mitad del Tije es el dos...la clase pasada que no trajimos las varas le hicimos con las de dos y se formó un Tije.

Las nociones y discursos que han empleado los alumnos a lo largo de esta práctica han demostrado el valor de las conversaciones colectivas para el desarrollo de las normas matemáticas, en este capítulo hemos visto cómo se han apropiado de las nociones de comparación en torno a la unidad de referencia. Esta norma, asociada con las ideas de Freudenthal (1983), atribuyen a la fracción la posibilidad de verlas como un número genuino que puede ser comparados e identificar cuál es mayor, menor e igual.

Los alumnos han matematizado la actividad de tal manera que encuentran natural que una fracción pueda ser mayor a la unidad, ya no la ven contenida dentro de un todo, sino de forma independiente con la posibilidad de ser iterada sin restricciones. Las estrategias que emplean para determinar el tamaño de una medida y posteriormente poder compararlas está inmersa en dicha matematización progresiva, con ella pasaron de reconocer un valor relativo (matematización horizontal) a una comparación (matematización vertical); sin embargo, es necesario que ese razonamiento se vea reflejado en su discurso, es por eso que el docente aprovecha comentarios como el de Fabiola para rescatar los haceres e ideas que ayuden a concretar las nociones de fracción.

7.3. INTERPRETAR LA COMPARACIÓN DE FRACCIONES

El desarrollo de la tercera práctica ha evidenciado las estrategias de comparación de los alumnos y al exponerlas, el docente las toma como recurso para organizar una conversación colectiva en la que las respuestas expuestas permiten convertirlas en herramientas conceptuales que los alumnos pueden emplear posteriormente. Para cerrar este momento de la agenda se plantea a los alumnos una comparación que puede resultar sencilla cuando han comprendido el valor relativo de la fracción, sin embargo lo que a interesa es el nivel de abstracción que han alcanzado para validar su respuesta.

Se trata de que los alumnos encuentren un argumento justificatorio de por qué $9/10$ es menor que $10/9$.

$$\frac{9}{\boxed{10}} < \frac{10}{\boxed{9}}$$

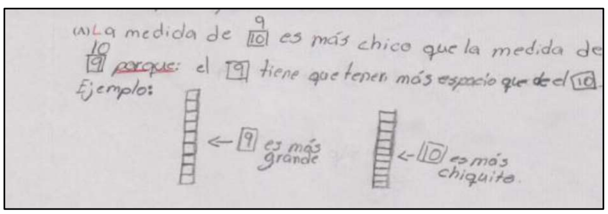
7.3.1. Interpretar la Relación Recíproca de Tamaño Relativo

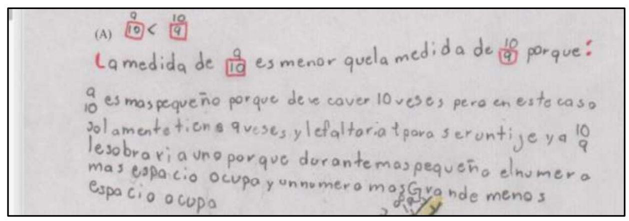
Una de las primeras nociones que los alumnos debían comprender es el tamaño de una fracción unitaria, recordemos que es uno de los obstáculos epistemológicos al trabajar con fracciones por las nociones de número natural que tienen los alumnos. Dicho obstáculo aparece por ejemplo cuando se les pide determinar si 1/5 es mayor a 1/7, en este caso ellos podrían argumentar que el 1/7 es mayor que 1/5 porque el 7 es más grande.

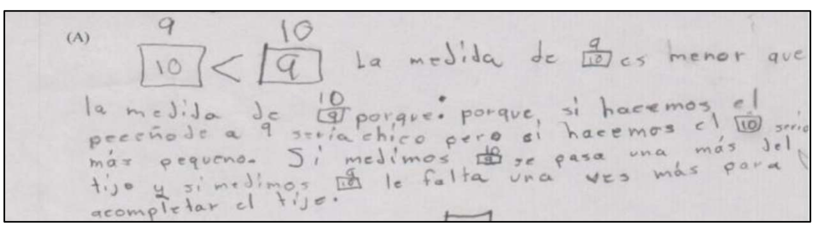
Como lo plantea Cortina (2013), con el desarrollo de la agenda se busca que los alumnos desarrollen nociones de número fraccionario, para ello deberán reconocer la relación recíproca de tamaño relativo que guarda con la unidad de referencia, es decir, comprender que si A es 5 veces B, entonces B es 1/5 de A (Thompson y Saldanha, 2003). Estas ideas permitirán al alumno reconocer las fracciones como medidas independientes que no están contenidas en un entero. Mediante esta actividad (por qué 9/10 es menor que 10/9) nos percatamos que los alumnos han consolidado esta noción y que les permite determinar cuándo una fracción es mayor a la otra:

Figura 20

Ejercicios comparación de fracciones







Nota. Trabajos tomados de las actividades de los alumnos.

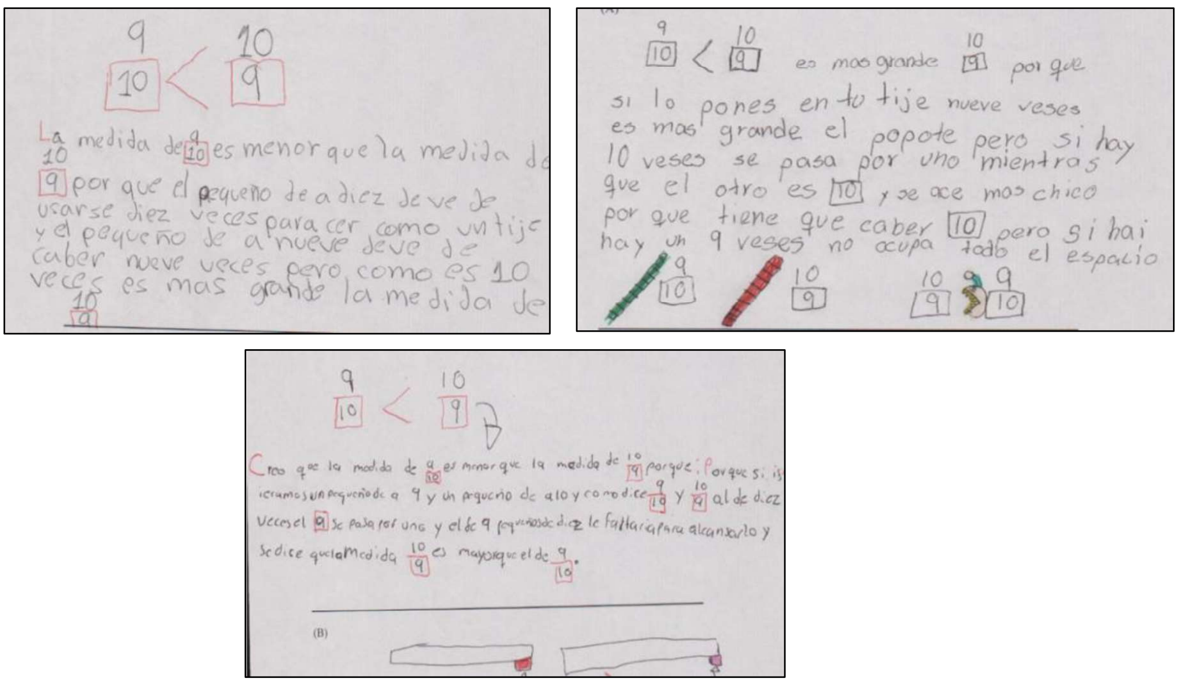
Como podemos apreciar, las respuestas muestran que han comprendido el tamaño unitario de la fracción, superando así uno de los primeros obstáculos para su aprendizaje. Explican que para igualar al Tije, entre más veces tenga que iterarse el pequeño su tamaño será menor, desde esa perspectiva reconocen su valor unitario y le dan el atributo de medida.

7.3.2. Interpretar el Tamaño Relativo

Otra de las nociones necesarias para comprender la fracción tiene que ver con reconocer la propiedad multiplicativa de la fracción (en un sentido de proporcionalidad) que permite determinar que una subunidad puede ser iterada las veces necesarias para obtener una medida, incluso más grande que la unidad de referencia. Hasta este punto de la agenda, los alumnos se han apropiado de las operaciones cuantitativas que dan pie a una unidad compuesta iterable, es decir, emplean un discurso en donde el tamaño de la fracción está determinado por el número de veces que tienen que usar un pequeño para medir (iterar).

Figura 21

Ejercicios comparación de fracciones



Nota. Trabajos tomados de las actividades de los alumnos.

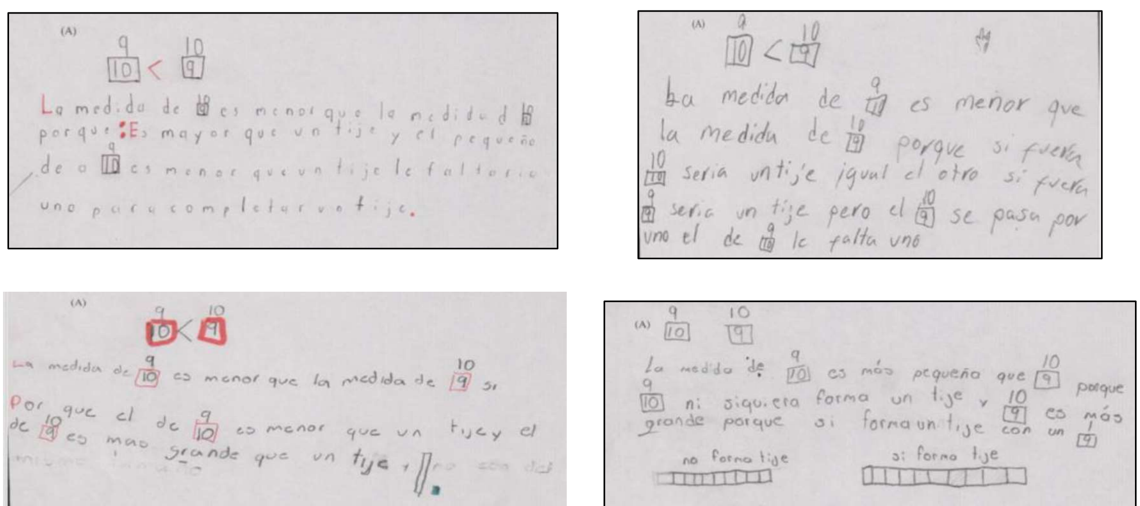
La explicación que usan para decir por qué uno es más grande que el otro los lleva a reflexionar la relación multiplicativa que se requiere para obtener un tamaño relativo, frases como “el pequeño de 10 debe unirse 10 veces” “diez veces el 9” dan cuenta que se han apropiado y han visto a las subunidades como algo que se puede iterar sin restricciones. El esquema fraccionario iterativo que propone Tzur (2002) ayuda a los alumnos a abandonar la idea de que la fracción está contenida en un entero, también los ayuda a establecer las ideas necesarias para comprenderla como un número que expresa un tamaño que puede ser acumulado e iterado más allá de la unidad de referencia.

7.3.3. Interpretar la Relación Multiplicativa con un Todo de Referencia

En el campo de las fracciones, la relación multiplicativa es una de las nociones que Thompson y Saldanha (2003) y Tzur (2002) señalan como indispensable para que el alumno comprenda el tamaño relativo de la fracción, es decir, el alumno debe reconocer la iteración como un medio para determinar una medida; esta acción le permite reconocer a la fracción como independiente de la unidad de referencia y generar esquemas para comprender las fracciones impropias.

Figura 22

Ejercicios comparación de fracciones



Nota. Trabajos tomados de las actividades de los alumnos.

En la práctica tres, los alumnos deben de reconocer si las fracción es menor, mayor o igual tamaño que la unidad, para ello toman como parámetro la misma unidad y referencia les permite comparar el tamaño de cada una de las medidas. De esta manera el alumno es capaz de reconocer la independencia de unidades y subunidades, pero no desconoce la relación que guardan entre sí, por ello pueden determinar cuándo una medida es más grande o más chica, partiendo de la unidad de referencia y de las nociones que han adquirido.

El discurso de los alumnos muestra que logran determinar que una medida era mayor que la otra usando a la unidad como referencia, también comprendieron la relación que guardan como medidas recíprocas (A es 9 veces B por lo tanto B es 1/9 de A), a partir de ello saben si "llena" el Tije o no, y eso les permite reconocer cuál es más grande que la otra.

Las ideas de los alumnos, externadas en las conversaciones colectivas, han permitido que éstas y otras nociones sean adquiridas por ellos, se trata del principio de interacción, porque en la EMR el aprendizaje es social para que los alumnos tengan la oportunidad de mostrar sus estrategias e invenciones "al escuchar y observar lo que otros han desarrollado y escuchar las distintas maneras de resolver un problema, se les permite tomar algunas de esas ideas para mejorar naturalmente sus estrategias" (Santamaria, s/f. p. 22).

La matematización que realizan los alumnos está relacionada con esas acciones en clase, pues la reinvención de nociones comparativas está determinada por su razonamiento y lo que han podido rescatar de los otros, como el hecho de reconocer estrategias sencillas como usar la unidad de referencia como parámetro comparativo.

La tercera práctica se da por concluida cuando los alumnos son capaces de comparar correctamente y con facilidad, el tamaño de medidas fraccionarias y de interpretar la simbología fraccionaria como medidas compuestas por dos números en donde el tamaño del pequeño significa el denominador y el número de veces iterado el numerador.

Las nociones hasta ahora desarrolladas servirán de base no sólo para determinar si es menor o mayor a la unidad de referencia, también les permitirá reconocer cuando una fracción es menor, mayor o igual que una medida realizada iterando la unidad.

VIII

UNA NORMA MATEMÁTICA PARA COMPARAR FRACCIONES IMPROPIAS

El objetivo de la cuarta práctica matemática es que las fracciones sean interpretadas como una medida de longitud que puede ser menor, mayor o igual que una determinada que se hizo iterando la unidad. En este caso entonces, la enseñanza estará encaminada a que los alumnos reconozcan, por ejemplo, que $12/5$ es mayor que dos unidades, pero menor a tres unidades, para lograr esto el profesor debe presentar a los alumnos ciertas herramientas que les ayuden a generar estrategias para determinar el tamaño relativo de la fracción y compararla con la misma iteración de la unidad, Cobb (2003) define a esas herramientas como elementos razonables que brindan soluciones a problemas que tienen importancia dentro del contexto de la narrativa, en este caso a elementos que apoyarán a los alumnos a solucionar el problema de medir cuando las longitudes correspondan a dos o más iteraciones de la unidad.

Hasta el final de la tercera práctica el maestro ha guiado la TEDE para que los alumnos determinen el tamaño relativo de la fracción al compararla con la unidad, también los ha introducido en la notación convencional de la fracción al reconocer el denominador como la subunidad empleada y el numerador como el número de veces que dicha subunidad ha sido iterada, estos conocimientos servirán de base para trabajar dentro de la cuarta práctica, cuyo propósito es que amplíen su conocimiento ante las fracciones impropias.

La cuarta práctica matemática ha de permitir que el docente ayude al alumno a comprender la relación entre la unidad, las partes y el todo para comparar fracciones y determinar el tamaño relativo, sin dejar de reconocer que estos elementos están separados los unos de los otros, lo cual permite su comparación; es por ello que en un primer momento el docente debe plantear una nueva problemática en el contexto de la misma narrativa que les exija reflexionar (conversaciones colectivas) para la creación de nuevas herramientas conceptuales.

Para lograr el objetivo de esta práctica, el docente involucra a los alumnos en el uso de la recta numérica, entendida como un segmento dividido en partes iguales donde el todo es la recta y cada uno de los segmentos equivale a la unidad, lo que la convierte en algo definido, continuo y con estructura lineal que permite la reflexión más allá de la clásica equipartición del pastel (área) (Valenzuela et al., 2016). En este sentido el docente busca la creación de rectas a partir de la iteración del tije para que los alumnos reconozcan que la unidad puede ser iterada, de igual manera que la subunidad, sin restricciones.

8.1. CONSTRUIR UNA HERRAMIENTA. LA RECTA NUMÉRICA

Como se mencionó, en esta cuarta práctica el docente busca que los alumnos comprendan las fracciones impropias como una subunidad que fue iterada sin restricciones, pero que tiene relación con la unidad de referencia. Como se ha señalado, uno de los problemas en la enseñanza de las fracciones reside en que, cuando se pide a los alumnos representar fracciones mayores que la unidad aparecen múltiples dificultades que derivan de la noción parte-todo, por esta razón, en esta práctica la idea es utilizar la recta para seguir trabajando desde la noción de fracción como comparador en el contexto de medida de longitud propuesto por Freudenthal (1983).

En este sentido, autores como Valenzuela y Figueras (2016) han reconocido las ventajas de utilizar la recta numérica como recurso didáctico para la enseñanza de las fracciones[1] y entre los beneficios que mencionan en su utilización se cuentan los siguientes:

1. Visualizar fracciones impropias
2. Comparar fracciones a través de posición que ocupa
3. Unidad representada por magnitud (longitud) y no por área
4. No hay separación visual de unidades
5. Recta requiere signos numéricos para definir unidades
6. Iteración de unidades y subunidades sin restricción
7. Comienza desde 0, a diferencia de áreas donde comienza donde sea
8. Acerca de la noción de densidad de los racionales.

[1] En México, la representación de fracciones en la recta numérica aparece en los programas de estudio para la escuela primaria en 5ª y 6ª grados.

Al reconocer las bondades de usar la recta en el experimento de enseñanza, el docente busca instaurar que utilicen esta herramienta sin que parezca arbitraría y se vale, como lo menciona Cobb (2003), que les permita identificar la necesidad de utilizarla para resolver las problemáticas que se proponen. Para instaurar la recta como herramienta el maestro parte de la problemática siguiente:

> [44] M: ¡Imagínense!, imagínense que fuéramos a hacer tiras para todo el quinto "A" y cada quien va a hacer su traje con cincuenta tiras. (El maestro señala al pizarrón), que midieran así, ¿cuánto nos tardaríamos haciéndolo?
>
> [45] Aos: Uuuuy ... Como medio año ... Como tres meses.
>
> [46] M: ¿Se les ocurre alguna forma en la que lo podrían hacer más rápido sin tener que medir cada una?

La problemática que el docente plantea en torno a realizar varias tiras busca encaminar a los alumnos a que aparezca la recta numérica como herramienta de solución, sin embargo cuando los alumnos matematizan la situación recurren a las nociones ya establecidas en anteriores prácticas y proponen algo que parece lógico, utilizar una recta.

> [60] Ana Corina: primero ponemos una tira y después la repetimos
>
> [61] M: ¿Oyeron lo que dice Ana Corina?
>
> [62] Aos: Sí ... No.
>
> [63] M: ¿Quién lo oyó?
>
> [64] Aos: (levantan la mano en señal de que escucharon la participación de su compañera).
>
> [65] M: Ok. ¿Quién no oyó?
>
> [66] Aos: (levantan la mano en señal de que no escucharon la participación de su compañera).
>
> [67] M: Ok. Voz bien fuerte Ana Corina, porque creo que es muy interesante lo que estás planteando.
>
> [68] Ana Corina: Bueno, primero se hace...
>
> [69] M: (Interrumpe la participación de Ana Corina). A ver, pásale y explícanos para que te escuchemos bien todos, ¿qué propondrías que haríamos? Podrías decir: ¡Compañeros Acajay, así habría que hacerle! Aos: (Se ríen de lo que el profesor acaba de decir).
>
> [70] Ana Corina: (Posicionada frente al grupo) Bueno, primero tendríamos que poner la medida en una tira...

[71] M: (Interviene) Haríamos primero una tira...

[72] Ana Corina: ¡Ajá!

[73] M: ¿Que midiera?

[74] Ana Corina: (Señalando al pizarrón) ¡Siete veces el pequeño de a seis!

[75] M: ¡Ajá!

[76] Ana Corina: Y después poner la otra tira y hasta ahí cortarle.

[77] M: ¡Ah! Y después ponemos una, la ponemos juntita y la usamos de guía, ¿verdad?

Ante el cuestionamiento del docente Ana Corina ve viable la réplica de una primera tira como una respuesta que facilita el trabajo; en este sentido la respuesta de los alumnos toma en cuenta las necesidades planteadas en la actividad pues para ellos resulta lógico crear la tira y replicarla, en este momento el docente tiene dos opciones; continuar con la conversación colectiva hasta que alguien proponga algo más acercado a la creación de una recta o ser él, a partir de las ideas de los Acajay, quien proponga una solución que sea aceptada por la clase. El docente opta por la segunda opción.

[87] M: (Mostrando una tira que está pegada en el pizarrón) Fíjense, esta era una de las tiras que hacían ellos, de este tamaño, ¿sí? Y hacían muchas, ¿ok? ... (se dirige al pupitre de un alumno) A ver, ¿nos la puedes medir?, trae tu lápiz.

[88] Mario: (Pasa a medir la tira del pizarrón).

[89] M: Vamos a ver cuánto mide, le pedí a un Acajay de los expertos medidores Acajay que hay en quinto "A", que pasara a medir.

[90] Ao: ¡El ingeniero Acajay!

[91] M: El ingeniero Mario...

[92] Aos: (se ríen).

[93] M: de quinto "A".

[94] Mario: (Continúa midiendo la tira).

[95] M: Cuatro exactas, ¿verdad?

[96] Mario: ¡Sí!

[97] M: ¡Muy bien!, entonces fíjense lo que hacían los Acajay, le hacían un poco diferente a como propuso Ana Corina, ¿verdad? Ellos lo que hacían es que ... (le pide ayuda a la maestra nuevamente, para trazar una recta en el pizarrón). M: (Escribe en

el pizarrón "recta de medición") Miren como le decían (despega la tira), ¿ya vieron? La recta de medición, ¿verdad? Y ¿cómo usarían la recta de medición?

En este momento, la reinvención guiada en tanto principio de la EMR, juega un papel importante en la clase pues el docente tendría que llevarlos a las ideas de recta numérica (a través del nombre "recta de medición") para comenzar con su uso sin que suene alejado de la realidad de Acajays. Es importante recordar que este tipo de actos por parte del maestro ayudan al desarrollo de la agenda porque se le brindan al alumno herramientas útiles para continuar y participar en el proceso de matematización vertical, al comparar con la unidad de referencia ahora tendrá conocimientos base para comparar la fracción con la unidad iterada, es decir 2 o 3 varas (Bressan, 2016).

Cuando el docente propone a Mario medir la distancia de la recta, guía a los alumnos hacia el reconocimiento de la iteración de la unidad de referencia, es decir, los lleva a la reflexión de que la recta representa un segmento que vale cuatro unidades, de manera que al trabajar con las fracciones en la recta pueden identificar aquellas que se ubican entre el 0 y el 4, esto les representa la ventaja de reconocerlas en un todo unido ilustrado en la recta y no de manera aislada, como podría ser en las áreas (4 pizzas) (Valenzuela et al., 2016).

Al organizar la conversación colectiva se trabaja con ideas construidas desde la práctica uno, cómo es el hecho de iterar la unidad de referencia sin que queden espacios. Para continuar con la introducción a la recta el docente busca una estrategia en la que sólo se determine su tamaño sino que se reconozcan cada uno de los segmentos de unidades que la componen para realizar la marcación de cada uno de ellos.

[107] M: ¿Sí?, pero fíjense a veces no solo hacían esto ... tiras de cuatro tijes, también hacían tiras de tres tijes, a ver, platiquen entre ustedes qué podrían haber hecho los Acajay.

Ante la consigna, los alumnos buscan diferentes formas de resolver la situación, la manera en que el docente lleva la clase es a través de las conversaciones colectivas que le permiten ver que cada alumno ha razonado, por ello aprovecha las respuestas para poder orientarlas hacia los objetivos propuestos y concretar la actividad en torno a la creación de la recta como herramienta para la apropiación y comparación de fracciones propias e impropias.

[123] M: Ok. A ver Ana, ¿qué pasó?, pásale.

[124] Ana: (se levanta para pasar al frente).

[125] M: Fíjense lo que se le ocurrió a Ana.

[126] Ana: Que le podemos quitar la rayita para formar las tres tiras.

[127] M: A ver, pero ¿cómo lo harías?

[128] Ana: (itera tres veces tije en tira).

[129] M: Muy bien. ¿Hasta aquí le harías una marca especial?

[130] Ana: ¡Sí!

En la situación anterior puede observarse la manera como el docente guía a los alumnos para que reconozcan que en la recta (de longitud de cuatro varas) pueden señalarse tres varas, esto permite mostrar la segmentación de unidades que existe, sin que sea él quién marque y especifique dónde está cada una de las unidades. Para continuar con la segmentación lanza un cuestionamiento similar, razón por la que los alumnos lo pueden inferir y exponer a sus compañeros en las conversaciones colectivas.

[159] M: Y, ¿si quisiéramos hacer de dos?

[160] Aos: (Levantan la mano)

[161] M: ¡Ana!

[162] Aa: le quitamos uno

[163] Ana: (Participa en con voz muy bajita).

[164] M: Ana, si quisiéramos hacer de dos, ¿podríamos poner una marca para que fuera de dos

[165] Aos: (Levantan la mano).

[166] M: Aarón.

[167] Arón: Marcar la mitad de la tira de...

[168] M: A ver, ¿dónde pondrías la marca para hacer tiras de dos tijes?

[169] Arón: Marcar la mitad de la tira de cuatro tijes.

[170] M: Y, ¿cómo encontraríamos la mitad?

[171] Aos: (Levantan la mano).

[172] M: Victoria, ¿cómo la encontraríamos? A ver, enséñanos.

[173] Victoria: (Se dirige al pizarrón y con la ayuda del maestro, comienza a hacer marcas en la recta que está trazada).

[174] M: Ah, entonces aquí podríamos hacer de dos tijes, ¿verdad?, ¿sí, chicos?, ¿y de un tije?... ¿Ana Corina?

[175] Ana Corina: Ahí nada más le ponemos bien la línea.

[176] M: (Hace las marcas que le dice Ana Corina, en la recta trazada en el pizarrón) ¡Aquí! Entonces, ¿hasta aquí las haríamos?, ¡Ay, pero nos va a olvidar!, ¿qué podemos hacer para que no se nos olvide cuál es cuál?, ¿qué podemos hacer?... A ver.

[177] Esteban: (Pasa al pizarrón).

[178] M: ¡Esteban va a salvar el día!

[179] Ao: ¡Wuuu!

[180] M: ¿Qué podemos hacer? Para saber ¿cuál es cuál?

[181] Esteban: (Comienza a numerar los segmentos de la recta trazada en el pizarrón).

[182] M: ¡Claro!, ¿a quién le parece una buena idea?

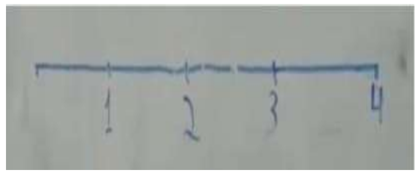
[183] Aos: (Levantan la mano en señal de conformidad) Muy bien.

Al continuar con la segmentación los alumnos participan para identificar cada una de las unidades dentro de la recta, para que posteriormente Esteban identifique a través de las marcas dónde está cada una de las iteraciones de la unidad. En un experimento realizado por Gravemeijer et al., (2003) encontraron que cuando los alumnos se enfrentan a un recta numérica vacía, ésta podría funcionar como un modelo para el razonamiento matemático para encontrar el sentido de la segmentación en base a una unidad de referencia. En ese caso el docente promueve la reflexión para reconocer cada una de las unidades que componen lo que él ha denominado “recta de medición” y lleva a los alumnos a la reflexión de cómo se compone “ya que los números en la recta numérica vacía comenzarían para derivar su significado de un marco de relaciones numéricas para los estudiantes” (Gravemeijer et al., 2003, p. 59).

En la conversación colectiva, el maestro utiliza las aportaciones de los alumnos para ir marcando la segmentación en la recta numérica, lo que servirá de herramienta para comparar fracciones en las que se iteraron dos o más unidades; sin embargo en esta parte de la clase el docente ve la necesidad de recordar qué significa cada una de las marcaciones hechas y pide a Esteban que de una justificación.

[184] M: Entonces, a ver, explícanos, Esteban, ¿cómo se usaría la recta entonces?

[185] Esteban: (Señalando cada división de la recta). Aquí tendría un Tije, aquí dos, aquí tres y cuatro.



El tipo de actividad que ha guiado el maestro permite que los alumnos reconozcan cada uno de los segmentos como unidades contiguas que componen un todo, el objetivo es ubicar el punto que representa la fracción en la recta numérica. Se trata de buscar una práctica donde las herramientas y discursos sean cada vez más sofisticados para permitir la comprensión del objeto matemático, en este caso Esteban reconoce los segmentos que componen la recta, es decir, reconoce que cada segmento es equivalente a un Tije, a una unidad, lo que significa que contará con otra herramienta que le permitirá avanzar en la comprensión de las fracciones desde un enfoque de comparación de medida.

Lo interesante aquí es ver como el maestro lleva a los alumnos por la construcción de la recta numérica sin salirse de la narrativa de los Acajay, esto les ayuda a verla como un elemento propicio y natural dentro de lo que están matematizando para reinventar las fracciones; además el discurso de los alumnos se ha tornado más fluido y sofisticado y les permite comprender y justificar lo que se hace y por qué se hace. De esa forma, a través de las interacciones entre los alumnos, se dan momentos en la clase en los que la reinvención se vuelve más sencilla pues las nociones construidas permiten que los alumnos puedan responder a cuestiones fáciles pero significativas cuando utilizan la recta. Sobre ese respecto Figueras (2016) menciona que es importante que los alumnos sepan de los aspectos finitos e infinitos de la recta numérica, es decir, que como en nuestro caso, la recta esté representada hasta cuatro unidades, sin embargo ésta puede aumentar o disminuir su longitud a través de las iteraciones de la misma unidad comenzando desde el 0.

Para entender lo anterior, en el siguiente fragmento puede apreciarse que el docente propone a los alumnos reconocer el inicio de la recta numérica a partir de un cuestionamiento simple:

[188] M: Oye, Daniela, pero y, esta rayita ¿se queda así solita?, se ve muy triste.

[189] Aos: Noo... Esa no vale... Yo profe... (algunos alumnos piden participar y quieren el marcador) Yo,yo,yo.

[190] M: (Le lleva el marcador a Daniela). ¿Sí?, tú, ¿qué propones?, porque la veo muy solita a esa rayita, esa rayita la veo muy solita.

[191] Daniela: (Traza un cero en el primer extremo de la recta).

Como se puede observar, la acción de Daniela recupera las nociones trabajadas en la primera práctica cuando medían con unidades arbitrarias, ella reconoce el punto cero como el inicio de la recta a partir del cual pueden ser iteradas unidades y subunidades sin restricciones. Así, los alumnos han reconstruido una herramienta más que les permitirá lograr el objetivo de la cuarta práctica, pues es un elemento visual que les permite identificar una longitud (que va más allá de iterar dos unidades) y por la manera en la que el docente la ha presentado, saben que es una “recta de medición” que les permitirá medir y comparar para determinar si una fracción es menor, mayor o igual a la iteración de las unidades, por ejemplo podrán comprender y justificar por qué $7/3$ es mayor a dos tijes.

8.2. LA RECTA NUMÉRICA, USAR LA HERRAMIENTA PARA COMPARAR FRACCIONES

El uso de la recta numérica como herramienta que apoye a los alumnos en la comparación de fracciones resulta de suma importancia en el desarrollo de la TEDE; al usarla los alumnos la han identificado como un elemento que facilita la solución de las tareas y para el maestro significa una forma clara de poder mostrar el espacio que ocupa una fracción que va más allá de dos iteraciones de la unidad.

Utilizando la recta, el docente puede ayudar a los alumnos a modificar sus esquemas que podrían obstaculizar la comprensión de fracciones impropias como $5/2$ de pizza, situación en la que se dificulta percibir 5 partes de un todo que ha sido dividido en 2, las contradicciones de esta situación da pie a cuestionamientos como ¿cuántas pizzas se requieren? ¿el todo es una pizza o tres? ¿las pizzas van juntas o separadas? Al contrario de las pizzas, la recta ayuda a comprender el todo de forma continua (sin imaginarlo separado) y además tiene la posibilidad de extenderse de forma infinita, todo dependerá de las veces en que se itere la unidad.

En Steffe (2002) se observa que utilizar la recta para identificar la iteración de unidades y subunidades resulta un buen elemento que facilita la enseñanza y la comprensión de longitudes, aunque en su experimento esta autora compara fracciones desde la noción de operador fracturante[2], reconoce que en la recta numérica se pueden observar mejor las relaciones necesarias para la comparación.

Ahora bien, utilizando los elementos que hasta el momento han matematizado (relación recíproca de tamaño relativo y tamaño relativo) junto con la recta numérica, les ha de permitir a los alumnos entrar en un nuevo campo donde el tamaño relativo supera a dos o más unidades, para ello, a través de la recta, el docente busca que los alumnos utilicen conocimientos y discursos que les permitan comparar y representar su longitud a partir de una unidad de referencia (Tije). Para ello plantea la siguiente actividad:

[326] M: (Señalando la tira que tiene como ejemplo en el pizarrón) Así miren, (se ríe) si me preguntan cómo, así. Oigan y ¿para qué serviría esto? (le pide a Ana Corina su tira).

[327] Ao: Para medir las...

[328] M: ¿Podríamos medir cualquier cosa con esto?

[329] Aos: Sí.

[330] M: ¿Podríamos hacer tiras de cualquier tamaño con este?

[331] Aos: Sí.

[332] M: ¿Sí?, ¿Podríamos hacer de cinco pequeños de a dos?

[333] Aos: Sí ... No.

[2] Fracción actúa sobre objetos y se pueden relacionar entre sí; relaciona partes con el todo.

Como se puede observar, el docente parte de un aspecto muy importante en el experimento, recordarles que los elementos usados hasta el momento sirven para medir y que por lo tanto, la recta numérica resulta una herramienta que facilita su trabajo. Un aspecto que el maestro ha mantenido desde el inicio de la agenda es organizar las conversaciones colectivas en las que los alumnos socializan las estrategias empleadas, pero también le permite a él reconocer el razonamiento que utilizan los alumnos al resolver las tareas, además se percata del tipo de discurso que despliegan. En este sentido, al participar en las interacciones de la clase podemos observar diferentes discursos de los alumnos que servirán para que el maestro guíe la matematización del resto de la clase:

[433] M: Enséñame cómo encontraste ... pero ¿cómo lo hiciste? A ver, trae pequeños, enséñame, o te presto los míos, o te presto los del maestro. A ver. Fíjense cómo le hizo Ana y vean si así lo hicieron ustedes o no.

[434] Ana: (Está frente al pizarrón y empieza a explicar).

[435] M: A ver, ¿Ana qué hizo?

[436] Ana: Fui contando.

[437] M: ¿Fuiste contando?, ¿desde dónde?

[438] Ana: (Indica en el pizarrón desde dónde contó).

[439] M: ¿Desde aquí?, ¿hasta dónde contaste?, uno, dos, tres, cuatro y cinco. A ver (comienza a hacer marcas en el pizarrón para dar una mejor explicación) y conforme fue contando, ¿cómo le iría contando?, hasta aquí, ¿cuánto habría sido?

[440] Aos: (No responden nada).

[441] M: Un ¿qué?

[442] Aos: (Algunos responden) Un pequeño de a dos.

[443] M: Ah, y ¿hasta aquí?

[444] Aos: Dos pequeños de a dos ... Tres pequeños de a dos ... ¿Quién lo hizo como Angélica?, ¿quién lo hizo de otra forma?

[445] Jacinto: (Levanta la mano).

[446] M: Ah, Jacinto lo hizo de otra forma. César lo hizo de otra forma. (Dirigiéndose a Ana) pásale a tu lugar. A ver, vamos a ver la forma de Jacinto, ¿cómo era?

[447] Jacinto: (Se dirige al pizarrón y comienza a explicar con voz muy bajita).

[448] M: A ver, a ver, espérame porque Mario no te está escuchando

[449] Jacinto: Que yo me imaginé que el pequeño de a dos, cabía dos veces en el Tije, así que conté hasta el Tije, hasta el Tije número dos y ahí fue donde puse mi pequeño de a dos, para hacer el...

[450] M: (Interrumpe) O sea sólo contaste uno después de las dos varas, ¿así fue?

[451] Jacinto: Sí.

[452] M: A ver, ¿quién le entendió?, ¿quién no le entendió? César, ¿tú lo hiciste así o lo hiciste diferente? César: Lo hice igual.

En la conversación colectiva, los alumnos que participan presentan dos estrategias diferentes, ambas válidas, y que dan cuenta de los elementos abordados hasta este momento de la clase. En un primer momento, a pesar de que el docente quiere guiarla para que reconozca el número de tijes que necesitaba, Ana echa mano de la iteración de una subunidad (pequeño de dos) para encontrar el tamaño relativo en la recta,

Empero, la noción que el docente pretende desarrollar aparece con Jacinto quien al exponer la técnica que utilizó deja ver que comprende que para ubicar 5/2 necesita más de dos unidades pero menos de tres, en su respuesta ("conté hasta el Tije número dos y ahí fue donde puse mi pequeño de dos") la idea es muy clara, de manera implícita ha comparado con la iteración de la unidad, por lo tanto podría argumentar fácilmente que esa fracción es mayor que dos Tijes. Siguiendo con el análisis de la clase podemos darnos cuenta que esta noción fue comprendida por más alumnos cuando explican que han utilizado técnicas iguales a las de su compañero para determinar el tamaño relativo de la fracción solicitada:

[471] M: Ok, Donatello. Explícame.

[472] Donatello: (Se dirige al pizarrón para explicar)

[473] M: A ver Jacinto, esta es tu tarea, a ver si así es como lo hiciste. Vamos a escuchar a todos, ¿sale?

[474] Donatello: Porque el pequeño de a dos, dos veces es un Tije y yo lo hice igual que Jacinto, en un Tije ya eran dos, aquí también dos y aquí nomas uno.

Al reconocer que la tarea se comprendió y las respuestas se argumentaron, el docente, busca introducir una variable para llevar más lejos su razonamiento, les pide determinar el lugar que ocupa una fracción en la recta. Este tipo de acciones le permiten al docente ver hasta qué punto el objetivo de la cuarta práctica ha sido alcanzado y qué es necesario emplear en posteriores sesiones para reestructurar este esquema.

> [486] M: A ver, ahí les va un reto Acajay, a ver, éste va a ser el Acajay profesional chicos. A ver chicos, ¿quién será capaz de encontrar en sus tiras esta medida? A ver si no está dificilísima. Vamos a razonar primero (escribe en el pizarrón 15/4, ¿cabrá o no cabrá en nuestra tira?
>
> [487] Aos: No ... Sí ... Sí, si cabe.
>
> [488] M: ¿Quién cree que si cabe?
>
> [489] Aos: (Algunos levantan la mano).
>
> [490] M: Ok, si cabe. Muy bien, a ver piensen en una forma fácil de encontrar donde la cortarían. Márquenla en sus tiras. Quince veces el pequeño de a cuatro. ¿Será más de una vara o no?, ¿por donde estará en la tira?

En el siguiente fragmento puede verse que la actividad que se propone, busca reconocer si la reflexión y el uso de estrategias para determinar el tamaño relativo de una fracción en relación a un todo de 4 unidades, está interiorizada y afianzada para poder emplearla en diversas situaciones, es por ello que a partir del discurso que han empleado, se espera que puedan resolver y argumentar sus acciones en esta nueva problemática.

> [505] M: ¿No?, ¿y luego? Te voy a pasar al frente otra vez, Román ... A ver chicos, ¿ya?, ¿ya Victoria? A ver, Victoria, ¿tú cómo lo hiciste?, pásale, te presto mi pequeño de a cuatro.
>
> [506] Victoria: (Pasa al pizarrón).
>
> [507] M: A ver, chicos, todos. Cómo le hizo Victoria, fíjense.
>
> [508] Victoria: (Le explica al maestro realizando la iteración con pequeño de 4).
>
> [509] M: ¿Eh?, ¿cuántos tenía que contar?
>
> [510] Victoria: Quince de a cuatro.
>
> [511] M: Quince de a cuatro, a ver, ¿cómo le fuiste haciendo?, ¿de uno por uno?, ¿le fuiste contando, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince?

[512] Victoria: (Asiente con la cabeza).

[513] M: ¿Así lo hiciste?

[514] Victoria: (Asiente con la cabeza).

En esta estrategia, Victoria opta por la iteración de la subunidad para determinar el tamaño relativo de la fracción y aunque hay poco margen para interpretar si la medida a identificar es menor o mayor a cierta unidad, la acción nos remite a una acción válida que puede apoyar para mejorar las estrategias y discursos en la clase. En este sentido el maestro, en función de guía, retoma la actividad buscando que otro alumno pueda apoyarla para lograr el objetivo de la práctica cuatro.

Tzur (2002) reconoce que el papel del docente tiene tiene gran impacto cuando basa la clase en la reflexión sobre las experiencias que los alumnos hacen de las actividades, porque pueden concluir con la aparición de un nuevo y mejor discurso que permite apreciar la transformación de los esquemas de los alumnos, los que a su vez les posibilitan comprender, en este caso, las fracciones impropias.

M: (Dirigiéndose a Lupita) Enséñanos cómo le hiciste. A ver, ¿cómo le fuiste haciendo?, aquí está el pequeño de a cuatro, te lo presto.

[519] Lupita: (Pasa al pizarrón).

[520] M: A ver, vamos a oír a Lupita, voz bien fuerte

[521] Lupita: (Señalando división por división) Aquí son cuatro, aquí tenemos otros cuatro, son ocho...

[522] M: Ajá.

[523] Lupita: Si le sumas estos cuatro, son doce.

[524] M: Ajá.

[525] Lupita: (Se queda sin saber qué decir) No sé

[526] M: ¿Eh?
Lupita: No sé cómo.

[527] M: A ver, a ver, este está bien bonito, quédate aquí, Lupita. (Señalando la primera división de la tira) Lupita dice que hasta aquí lleva cuatro, cuatro, ¿qué?

[528] Aos: Cuatro ...

[529] M: Cuatro, ¿qué?

[530] Aos: Cuatro pequeños de a cuatro.

[531] M: Cuatro veces el pequeño de a cuatro, ah, entonces hasta aquí serían cuatro veces el pequeño de a cuatro, ¿verdad? Y luego, ¿qué dijiste Lupita?

[532] Lupita: (Participa en voz baja).

[533] M: Ah, entonces, ahí, ¿cuántos llevarías?

[534] Lupita: (Pone ocho veces el pequeño de a cuatro en la recta).

En esta parte de la clase, Lupita ha encontrado una estrategia que hace referencia a la proporcionalidad, si un tije representa cuatro pequeños, entonces dos Tijes representa el doble de los pequeños, es decir 8; esto le permite comprender la relación recíproca del tamaño relativo en cada unidad y que le da la pauta para encontrar la posición de la fracción 15/4 en la recta numérica. Su discurso se ve apoyado por la guía del docente para que el resto de la clase pueda visualizar lo que Lupita quiere expresar y para que a través de esta validación, pueda ser concretada como una estrategia.

Es importante resaltar que una vez que la alumna ha comenzado la exposición de sus ideas llega un momento en que no puede justificar su acción, por ello el docente le ayuda en su exposición para que el discurso pueda tener que ajustarse al marco conceptual, es decir, que pueda demostrar cómo y para qué ha utilizado la herramienta (Cobb et al., 2003).

[535] M: A ver, fíjense cómo le hizo Lupita. Ocho veces el pequeño de a cuatro, ¿entendemos?, ¿sí Azucena? ¿o no? fíjense allá. Antonio, no estamos escuchando a Lupita. ¿Y luego?

[536] Lupita: Y luego le sumó cuatro y son doce.

[537] Ao: No se escucha.

[538] M: Si le sumamos otros cuatro, ¿qué?

[539] Lupita: Son doce.

[540] M: Ok ... A ver, ¿están de acuerdo?, ¿o no?

[541] Aos: Sí ... No

[542] M: ¿Tres varas, serían lo mismo que doce pequeños de a cuatro?

[543] Aos: Sí.

[544] M: Ah, tres varas es lo mismo que doce pequeños de a cuatro, ¿y luego?

[545] Lupita: (Participa en voz baja)

[546] M: ¿Y de ahí qué hacemos? Ahí llevamos doce, ¿podemos contar tres más? (comienza a medir con un tije, sobre la recta), ¿podemos medir tres más? (prosigue marcando las divisiones en la recta) Uno, dos, tres... Ok, ¿quién más lo hizo como Lupita?

[547] Aos: (Algunos levantan la mano).

En este fragmento de la clase observamos que Lupita es capaz de reconocer la proporcionalidad al usar la recta, también puede argumentar que en un Tije hay cuatro pequeños de cuatro, ocho en dos y doce en tres, aunque en el caso de cuatro Tijes no es así. En este momento se esperaría ver cómo los alumnos construyen sus respuestas y son capaces de justificarlas, sin embargo al percibir que la alumna no encuentra la forma de explicar cómo encontrar 15/4 en la recta, es el docente quien culmina la explicación y determina la posición que ha de ocupar.

En este este episodio de la clase podemos observar que efectivamente, la alumna reconoció la proporcionalidad pequeños/Tijes, aunque tuvo dificultades para elaborar un discurso que explique que 15/4 es mayor a tres unidades pero menor a cuatro; lo que es evidencia de las dificultades en torno a esta situación y de la necesidad de plantear al grupo más situaciones que refieran a la misma problemática, esto ayudará a los alumnos a encontrar una manera de matematizar congruente con el objetivo de esta práctica (comparar fracciones con una medida de la unidad iterada).

También les permitirá crear estrategias para identificar cuando la proporción de un Tije no alcanza o se pasa de la medida dada como en el caso de Lupita quien recupera lleva el sentido de la relación “si aumenta el número de tijes, el número de pequeños lo hará de igual manera”, aunque le falte reconocer lo que pasa cuándo se requieren 15 pequeños necesarios para obtener la medida.

El docente echa mano de las conversaciones colectivas e invita a otro alumno para que explique cómo encontró 15/4 en la recta, cuando explica que “en cuatro Tijes son 16 pequeños, pero como nada más necesita 15 le quita uno”, les ayuda a sus compañeros a comprender y dar sentido a la proporcionalidad En esta parte específica de la clase podemos apreciar que los discursos dan cuenta que efectivamente se está comprendiendo cuando una medida es mayor o menor que un número específico de unidades por medio de la proporcionalidad y además, les da oportunidad de crear estrategias para dar cuenta de la medida.

Hasta este momento los alumnos tuvieron que haber desarrollado habilidades para emplear un discurso coherente y argumentos sólidos para justificar los quehaceres matemáticos que hicieron para comprender las fracciones como comparadores de medidas de longitud, pero no se trataba sólo de reconocer unidades unitarias sino la relación recíproca entre las subunidades y la unidad, lo que les hubiera permitido comparar las fracciones unitarias con la unidad de referencia para determinar si es mayor, menor e igual que ella. Con ello se hubieran conceptualizado las fracciones propias e impropias.

Como se ha visto, la tarea del docente ha sido fundamental para lograr los objetivos en ésta y todas las prácticas anteriores, los medios didácticos que ha utilizado y los principios de la EMR que ha desarrollado en cada sesión han permitido que el alumnos encuentren respuestas viables para las situaciones en las que se involucran las fracciones como medida y además, posibilitaron también que estructuraran discursos para justificar y mejorar sus acciones.

Hasta aquí, los alumnos se han apropiado de algunas nociones sobre las fracciones, pero el recorrido está lejos de terminar, para seguir adentrándose en este vasto campo se requerirán otras Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, otros experimentos de enseñanza, otras TEDES. De manera que lo que en este trabajo analizamos, es apenas la primera inmersión de los alumnos al complejo mundo de las fracciones.

CONCLUSIONES

Como se ha mencionado, las fracciones son un contenido matemático que reviste múltiples complejidades, de ahí las dificultades de su enseñanza, si bien se plantean como objetos a enseñar desde el tercer grado de la escuela primaria, las implicaciones de una construcción defectuosa se pueden ver incluso en los grados universitarios. Puede decirse que aún con los numerosos estudios que se han realizado, al día de hoy se puede ver que sigue siendo uno de los temas que más ocupan la atención en la educación matemática; por su complejidad como objeto matemático y por las dificultades para su enseñanza.

En la presente investigación se analizaron los efectos de una propuesta de trabajo a partir de los Experimentos de Diseño y desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista, la propuesta de enseñanza parte de un enfoque comparativo basado en la medida de longitudes.

El primer diseño de esta propuestas se realizó en los años de 2006-2008 con Cortina, Visnovska y Zuñiga, posteriormente, a partir del 2012, se ha puesto a prueba en varias ocasiones modificándolo luego de cada experimentación. La puesta a prueba del experimento de diseño que se realizó en 2019 es la que en esta investigación se analiza, específicamente se trata de la fase de análisis retrospectivo en la que, particularmente, nos enfocamos en aquello que el docente, en función de guía y con apoyo de los medios didácticos, realiza en la instrucción, en otros términos, nuestro análisis versa sobre las normas sociomatemáticas que el profesor instaura como medios para conseguir los objetivos de aprendizaje planteados en el experimento. Del análisis realizado podemos concluir lo siguiente:

La instauración de normas generales en la clase (en cualquier asignatura), se ha visto, apoya al desarrollo de la clase. En el caso del diseño de experimento que aquí analizamos, las normas generales fueron de suma importancia, sobre todo para organizar las conversaciones colectivas donde la norma estipulaba escuchar y ser escuchado. En las conversaciones colectivas lo esencial fueron los discursos de los alumnos, su matematización y el quehacer matemático que compartían. Al igual que otras normas, las que sirvieron para las conversaciones colectivas, están estrechamente relacionadas con el principio de interacción en el que se subraya la importancia de que los alumnos compartan sus resoluciones, que convenzan y se dejen convencer de las construcciones del objeto matemático.

En nuestra investigación se pudo observar que, organizar las conversaciones colectivas es un proceso, no funcionan de manera inmediata, por ejemplo al inicio la participación de los alumnos pareció un poco forzada y alejada de las problemáticas que se les pedía resolver, pero cuando paulatinamente se fue institucionalizando resultaron productivas puesto que coadyuvaron a la instauración de las normas matemáticas.

La instauración de normas matemáticas fue esencial para que los objetivos de la TEDE pudieran cumplirse y para que la acción del docente tomara rumbo durante las sesiones. Al tener bien definida la norma matemática que se requería instaurar, la guía del docente fue determinante para consolidarlas, aunque se pudo observar que no todas tuvieron el mismo alcance y significado para los alumnos.

Para que los alumnos lograran matematizar y apropiarse de las normas matemáticas tenían que estar inmersos en una contexto realista, en una narrativa que incorpore el principio de realidad, sin embargo se observó que introducir este principio no fue sencillo, las dificultades de hacerlo se observan sobre todo en la primera práctica donde, los alumnos tuvieron dificultades para situarse como parte de la comunidad Acajay. En un primer momento se resisten a dejar de utilizar las herramientas convencionales de medición que ya conocían (metro o regla), lo que evidenciaba su dificultad para situarse como Acajays y emplear los instrumentos de medición de la historia (partes del cuerpo y vara). Lo que esto significó es que para los alumnos no fue fácil abandonar los conocimientos sobre la medición que habían construido, y tardaron en iniciar el proceso de reconstrucción de la medición, tal como lo planteaba en la primera norma matemática. En este sentido Cobb et al. (2003) menciona que las historias y herramientas en la que los alumnos se ven inmersos en un experimento de enseñanza deben ser significativos para ellos y generar un reto, esa inmersión costó trabajo, pero en las siguientes prácticas matemáticas se logró trabajar en una realidad matematizable, es decir la inmersión en la narrativa de los Acajay.

Las normas matemáticas desarrolladas en el trabajo con la TEDE fueron un parteaguas para alcanzar los objetivos, a saber: la reconstrucción de objeto medida; la reinvención de las fracciones unitarias a través de las nociones de relación recíproca de tamaño relativo; la comparación de fracciones en torno a su tamaño relativo; la reinvención de las fracciones impropias a través de la iteración de una subunidad y; la comparación de fracciones mayores a una unidad de referencia.

Las normas matemáticas relacionadas con la reinvención de las fracciones unitarias, propias e impropias, fueron más y mejor interiorizadas por los alumnos, esto quiere decir que encontraron más interesante la realidad matematizable en las últimas tres prácticas matemáticas, al parecer porque en ese momento dicha realidad parecía más lógica y planteaba algo que debía resolverse (las problemáticas que planteó el profesor).

En lo que se refiere a los alcances de la TEDE, reconocer la fracción como una medida que permite a los alumnos reinventar y comprender la relación recíproca de tamaño relativo, puede decirse que los alumnos lograron alcanzar este objetivo y cuando reconocieron esta propiedad, vieron la fracción como algo independiente de la unidad, es decir como algo que no está contenida en ella y además, pueden reconocer que que si A es 3 veces B entonces B es 1/3 de A. En el experimento de enseñanza esto resulta de suma importancia porque se le está otorgando un valor a la fracción que, posteriormente, les permite compararla con fracciones unitarias, de esta manera superan los conflictos identificados como obstáculos epistemológicos, tales como argumentar que ¼ es mayor a 1/3 porque el 4 es un número "más grande". A partir de este aprendizaje, no sólo se le da un nuevo significado a la fracción unitaria, sino que al concebirla como algo externo a la unidad de referencia, en la actividad de medir, el alumno reconoce que puede iterarla tantas veces como sea necesario para encontrar el tamaño relativo, lo que le permite identificar las fracciones propias e impropias, es decir, los alumnos comprendieron lo que significa 5/3 (cinco iteraciones del "pequeño de tres") y pueden argumentar que es una medida mayor a una vara (unidad), pero menor a dos varas.

La instauración de normas matemáticas permitió que los alumnos comprendieran el tamaño relativo de una fracción, la significaran como una medida que puede ser menor, mayor o igual a la unidad de referencia, esta comprensión además, les posibilita estructurar discursos para explicar la relación de la unidad con medidas como 1/3, 2/3 o 5/3. A partir del análisis del discurso de los alumnos se pudo observar que las normas matemáticas, exclusivas de la clase de matemáticas, son necesarias para que el docente oriente sus acciones.

Las normas generales y matemáticas se relacionan con los principios de la EMR y son útiles para orientar la acción del docente, le dan elementos para tener claros los objetivos de la TEDE que se buscan lograr. Por esta razón es necesario que el docente tenga claras las normas que requiere instaurar en el aula, puesto que, cuando reconoce el poder de la reconstrucción y la reinvención de objetos matemáticos; la interacción de los alumnos a través de las conversaciones colectivas; la matematización de la realidad y de la misma matemática; la transición de niveles y las interconexiones de los temas; tiene una visión más completa de lo que debe y puede suceder en el aula, también estos elementos constituyen una guía para su acción.

Un aspecto importante de la experimentación está relacionado con las características del docente que desarrolló la TEDE. En este caso las clases estuvieron a cargo del investigador líder del equipo (Dr. Cortina), precursor y creador de la agenda desarrollada. Un factor positivo para la experimentación es que el responsable del desarrollo de las sesiones conoce profundamente las características de la TEDE y los elementos teóricos que orientan su desarrollo en los salones de clase. Sin embargo, al no ser el profesor titular del grupo, se observan elementos que limitan el desarrollo de la TEDE, uno de esos elementos es el tiempo, es decir, se contaba con un tiempo preciso para desarrollar el experimento, por esta razón en algunos episodios se observó cierta premura en el profesor, ciertos intentos por apresurar la aparición de ciertas ideas en los alumnos. Otra limitante es el conocimiento de las características del grupo, en tanto que al inicio no se conocían las habilidades de cada uno de los alumnos, el principio de interacción se observó obstaculizado, porque la interacción también precisa de conocer qué alumno puede, en un momento preciso, compartir un conocimiento o una idea que va a ayudar a la comprensión de los otros

No obstante los comentarios anteriores, se pudo observar que la limitaciones de tiempo y conocimiento del grupo no fueron impedimento para que se alcanzaran los objetivos planteados en el experimento realizado. La introducción de las fracciones desde una perspectiva diferente a la noción del parte-todo dando prioridad a un enfoque de comparador de medidas de longitud, nos muestra que hay una forma diferente de enseñarlas que genera una mejor mayor comprensión en los alumnos al reconocer la fracción como un número que es capaz de cuantificar, incluso más allá de la unidad.

Como se ha mencionado, el experimento de diseño aplicado y analizado en esta investigación, cuenta con antecedentes que nos han permitido mejorar cada una de las prácticas matemáticas luego de los análisis retrospectivos posteriores a cada experimentación. En la experimentación que aquí analizamos es evidente que es un acierto comenzar con una práctica matemática que introduzca a los alumnos primero en la necesidad de de medir y en la reconstrucción de la unidades de medición que se pueden emplear (Tije y pequeños), esta primera práctica atiende al principio de realidad para que los alumnos consideren relevante resolver los problemas que se les plantean. La tarea del docente entonces, está encaminada a reconstruir el significado de la medición.

En el mismo sentido de la idea anterior, observamos que una de las principales debilidades de la TEDE tiene que ver con con los quehaceres de la medición, es decir, las primeras tareas sobre medición que se plantearon (cortinas, estatura y bandera) tuvieron dificultades para insertarse en el principio de realidad, los alumnos tenían dificultades para verlas como realidades matematizables en las que era importante la solución. En nuestra perspectiva, una experimentación futura de la TEDE tendría que darse después de reflexionar sobre la pertinencia de las primeras prácticas matemáticas, especialmente aquellas relacionadas con la reconstrucción de la medición.

Finalmente, aunque consideramos que las fracciones son un tema complejo de enseñar, todo lo analizado nos permitió identificar y proponer alternativas a las formas en que tradicionalmente se desarrolla su enseñanza (parte-todo) y profundizar sobre la educación matemática realista que propone Freudenthal (1983) para transformar la enseñanza. Del mismo modo, los conceptos propios de esta teoría nos permiten reconocer la importancia del papel docente en relación a las normas generales, las normas matemáticas y los principios de la EMR y la orientación que deben tener las prácticas de enseñanza.

REFERENCIAS

Aguayo Rendón, L.M. (2005). La transposición del "saber didáctico". Un estudio con profesores en formación en el contexto de los números racionales.[Tesis de doctorado, Universidad Pedagógica Nacional]

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿Cuántas esposas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación*, 85-101.

Amore, B. D., Vicentç, F., y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *SciELO*, 1-14.

Berciano Alcaraz, A., Jiménez Gestal, C., y Salgado Somoza, M. (2016). Tratamiento de la Orientación en el Aua de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista. *Número*, 31-44.

Block Sevilla, D. (2000). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico.* (Tesis de doctorado). DIE-CINVESTAV IPN. México

Bressan Ana, Zolkower Betina, Gallego Ma. Fernanda. (2004). La educación matemática realista. Principios en que se sustenta. *Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*.

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S., y Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista. Bases teóricas. GPDM.

Broitman, C. (2012). Adultos que inician la escolaridad: Sus conocimientos aritméticos y la relación que establecen con el saber y con las matemáticas. *[Tesis de doctorado, Universidad Nacional de la Plata*, Buenos Aires, Argentina]

Briceño, O. A. y Buendía Ábalos, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 45, 65-83. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/ view/656/1189

Briceño E., Milagros T. El uso del error en los ambientes de aprendizaje... Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales. ISSN 1316-9505. Enero-Junio. Nº 14 (2009): 9-28.

Berciano Alcaraz, A., Jiménez Gestal, C., y Salgado Somoza, M. (2016). Tratamiento de la Orientación en el Aua de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista . *Número*, 31-44.

Bonacina, M. (s.f.). Las normas sociomatemáticas y la enseñanza de las matemáticas. 1-12.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*.

Castro Rodríguez, E., Rico Romero, L., y Gómez, P. (2015). La enseñanza inicial del concepto de fracción por maestros en formación. *Universidad de los Andes (Colombia)*, 9-23.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigne Grenoble.* Frence: Editions La Pensee Sauvage.

Llinares Ciscar, S. y. (1997). *La relación parte-todo. Vallehermoso.* Editorial Síntesis S.A.

Collado, M., Ana, B., y Gallardo, F. (2003). La matemática realista en el aula “el colectivo y las operaciones de suma y resta". *Novedades Educativas*, 1-18.

Collins, A., Josseph, D., y Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, 15-42.

Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactique*, 55-73.

Cordero Osorio, F. (2001). La distancia entre construcciones del cálculo, una epistemología a través de la actividad humana. *CINVESTAV - IPN*.

Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*, 270-284.

Cortina, J. L. (S/F). *Sobre el problema de categorizar las fracciones con fines de diseño instruccional o la caracterización de fracciones con fines de diseño instruccional.* S/N.

Cortina, J. L., Visnovska, J., y Claudia, Z. (2008). Un punto de partida alternativo para la instrucción de fracciones. *Educación Matemática*, 20(2), 35-61

Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones . *Educación Matemática*, 25(2), 7-29.

Cortina, J. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas. *Educación Matemática, 25 años*, 270-287.

D´Amore, B., Font, V., y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática . *PARADIGMA, XXVIII*, 49-77.

Delgado, I. y Cortina, J.L. (2021). La educación matemática realista. Naturaleza y posibles aportes en México. En Aguayo, L y Calderón, J. (Eds.). *Formación y profesión docente. Entre prescripciones, teorías y prácticas educativas*. (325-342). Taberna Libraria Editores.

Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Cooperativa Editorial Magisterio.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics*, 3-8.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* . Dordrecht: Reidel Publis.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. *Mathematics Education Library. D. Kluwer Academic Publisher.*

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht, The.

Gallardo, J., González, J. L., y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de las fracciones. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa*, 355-382.

Gallegos, M. F., y Pérez, S. G. (2013). Aportes "Realistas" a la Educación Matemática. Una propuesta para repensar la enseñanza de la matemática desde el enfoque de la Educación Matemática Realista. *Desde la Patagonia. Difundiendo saberes Vol. 10. No. 16*, 12-20.

Gavilán Izquierdo, J. M., Sánchez Matamoros, G., y Isabel, E. (2014). Aprender a definir en Matemáticas: estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias*, 529-550.

Godino, J. D., y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 70-92.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias* , 59-76.

González Pinilla, O. J., y Arevalo Venegas, C. (2019). Constitución comprensiva del objeto mental "límite matemático" realizada por estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática* , (págs. 2-8). Medellín, Colombia .

Gravemeijer, K y Teruel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *J.Currículo Studies, 2000, vol. 32*, 777-796.

Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. *Educational Design Research: The Design, Development and Evaluation of Programs, Processes and Products, Nueva York, Routledge*, 45-85.

Gustavo, B. B. (2017). "La matematización: una mirada a las prácticas de enseñanza y evaluación de los docentes del Ciclo Básico de una zona Metropolitana de Montevideo". *Entregado como requisito para la obtención del título de Máster en Educación.* Universidad ORT Uruguay Instituto de Educación .

Henao, S. M., y Venegas, J. A. (2012). *La modelación matemática en la Educación Matemática Realista: Un modelo a través de la producción de modelos cuadráticos.* Santiago de Cali.

Hernández Sampieri, R., Fernández Callado, C., y Baptista Lucio, P. (2004). Metodología de la Investigación. *McGraw-Hill Interamericana*.

Heuvel-Panhuizen, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. *Certidumbres e incertidumbres*, S/N.

Kieren, T. (1980). “The rational number construct–Its elements and mechanisms” . En T. E. Kieren, *Recent research on number learning* (págs. 125-149). Columbus: OH:ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. . En E. F. T. P. Carpenter, *Rational numbers: An integration of research.* (págs. 50-84). Hillsdale.

Krause, M. (1995). La Investigación Cualitativa: un campo de posibilidades y desafíos. *Revista Temas de Educación Nº 7*, 19-39.

Kvale, S. (2008). *La entrevista en la Investigación Cualitativa* . Madrid: Ediciones Morata.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 075-088.

Ñaupas Paitán, H., Mejia Mejía, E., Novoa Ramírez, E., y Villagómez Paucar, A. (2014). *Metodología de la Investigación.* Bogotá: Ediciones de la U.

Planas Raig, N. y. (2001). Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en el aula multicultural. *Enseñanza de las Ciencias* , 135-150.

Planas, N. (2004). Análisis discursivo de interacciones sociales en el aula de matemática multiétnica. *Revista de Educación Núm 344*, 59-74.

Planas, N., y Boukafri, K. (2029). Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático. hal-02024105.

Pública, S. d. (2012). *Programa de Estudios 2011.* México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Textos Gratuitos.

Parera Dzul, P. B., y Valdemoros Álvarez, M. E. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática* , 209-218.

Parera Dzul, P. B., y Valdemoros Álvarez, M. E. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática vol. 2*, 29-61.

Perez, S., Betina, Z., y Ana, B. (S/N). ¿Señor, es cierto esto?

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (págs. 61-94). Barcelona: Horsori/ ICE. ISBN 84-85840-65-8.

Ramírez, M., y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática vol.21*, 63-90.

Real, R., Gómez, B., y Figueras, O. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un libro de texto. *Revista de Educación Matemática*, 21-36.

Rico, L. (1997). Apuntes sobre fenomenología .

Ricoy Lorenzo, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Educação. Revista do Centro de Educação, vol. 31, núm. 1*, 11-22.

Sadovsky, P. (s.f.). *La Teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Obtenido de https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Santamaría, F. I. (2006). La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda (Tesis de Maestría). *Universidad Nacional del Comahue*.

Sanz, M. T., Figueras, O., y Gómez, B. (2018). Las fracciones, habilidades de alumnos de 15 a 16 años. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 257-279.

Sosa Guerrero, L. (2011). Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos. *(Tesis doctoral). Universidad de Huelva*, Huelva, España.

Stauffer, S. (2018). Cálculo estimativo en quinto grado de la escuela primaria. Implementación de una secuencia didáctica. *(Tesis de Maestría) Universidad Autónoma de Querétaro*.

Steffe, L. P. (2002). Una nueva hipótesis sobre los niños en conocimiento fraccional. *Departamento de Educación Matemática* .

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2003). Diario para Investigación en Matemáticas Educación. *Revista de investigación matemática*, 1-123.

Thompson, P. W. (2003). "Fractions and multiplicative reasoning". En W. G. J. Kilpatrick, *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (págs. 95-113). Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. *The Wiskobas Project, Dordrecht: Kluwer.*

Tzur, R. (1999). An Integrate Study of Children´s Construction of Improper Fractions and the Teacher's Role in Promoting the Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 390-416.

Valdemoros Alvarez, M. E. (2003). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 235-256.

Valdemoros Alvarez, M. E. (2010). Dificultades experimentadas por los maestros de primaria en la enseñanza de las fracciones. *RELIME*, 423-440.

Valenzuela García, C., Figueras, O., Arnau Vera, D., y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Objeto mental fracción de alumnos de secundaria con problemas de absentismo escolar. 227-242.

Vain, P. (2012). El enfoque interpretativo en investigación educativa: algunas consideraciones teórico-metodológicas. . *Revista de educación*, 37-45.

Yackel, E., y Paul, C. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em matemática. *Journal for Research in Mathematics Education*, 458-477.

Zaragoza, P. N. (s.f.). *Significado y obstáculos didácticos.* Universidad de Murcia, S/N.

APÉNDICE A

La vara de Kia

En las montañas, altiplanos, valles y costas de México se cuenta una leyenda sobre una ciudad muy antigua llamada Napiniaca.

Cuenta la leyenda que en Napiniaca vivieron mujeres y hombres sabios que se dedicaban a diversos oficios, como la agricultura, jarcería, elaboración de ropajes, bordado, orfebrería, cerámica y construcción. Estos hombres y mujeres sabios eran conocidos como los Acajay. Algo que ocupaba su atención era la medición, ya que para desempeñar bien sus oficios necesitaban medir con precisión.

En un principio, los Acajay medían utilizando partes de su cuerpo. Hoy en día, algunas personas todavía utilizan estas formas de medir; por ejemplo, utilizan sus pasos y cuentan cuántos se requieren para cubrir alguna distancia. A veces utilizan sus manos (cuartas) para medir cosas relativamente pequeñas, y también usan sus dedos.

La leyenda cuenta que en Napiniaca vivió una mujer Acajay que se llamaba Numa. Ella se dedicaba a la elaboración de cestas. A Numa le ayudaba en su trabajo su hija Raxba. Una tarde llegó una clienta a pedir que le hicieran una canasta de un tamaño específico. Como Numa no se encontraba en casa, Raxba tomó la medida utilizando su mano y la apuntó. Cuando regresó Numa, leyó la medida y vio que la clienta quería una canasta que midiera 3 cuartas de alto.

Al día siguiente la clienta fue por su cesta y notó que no era del tamaño que había solicitado. Numa se sorprendió, ya que había tenido cuidado de que la cesta midiera exactamente 3 cuartas de alto. Numa no entendía qué había pasado. Entonces, comparó su mano con la de su hija y notó que la suya era más pequeña; lo que con la mano de su hija medía 3 cuartas, con la suya medía 4.

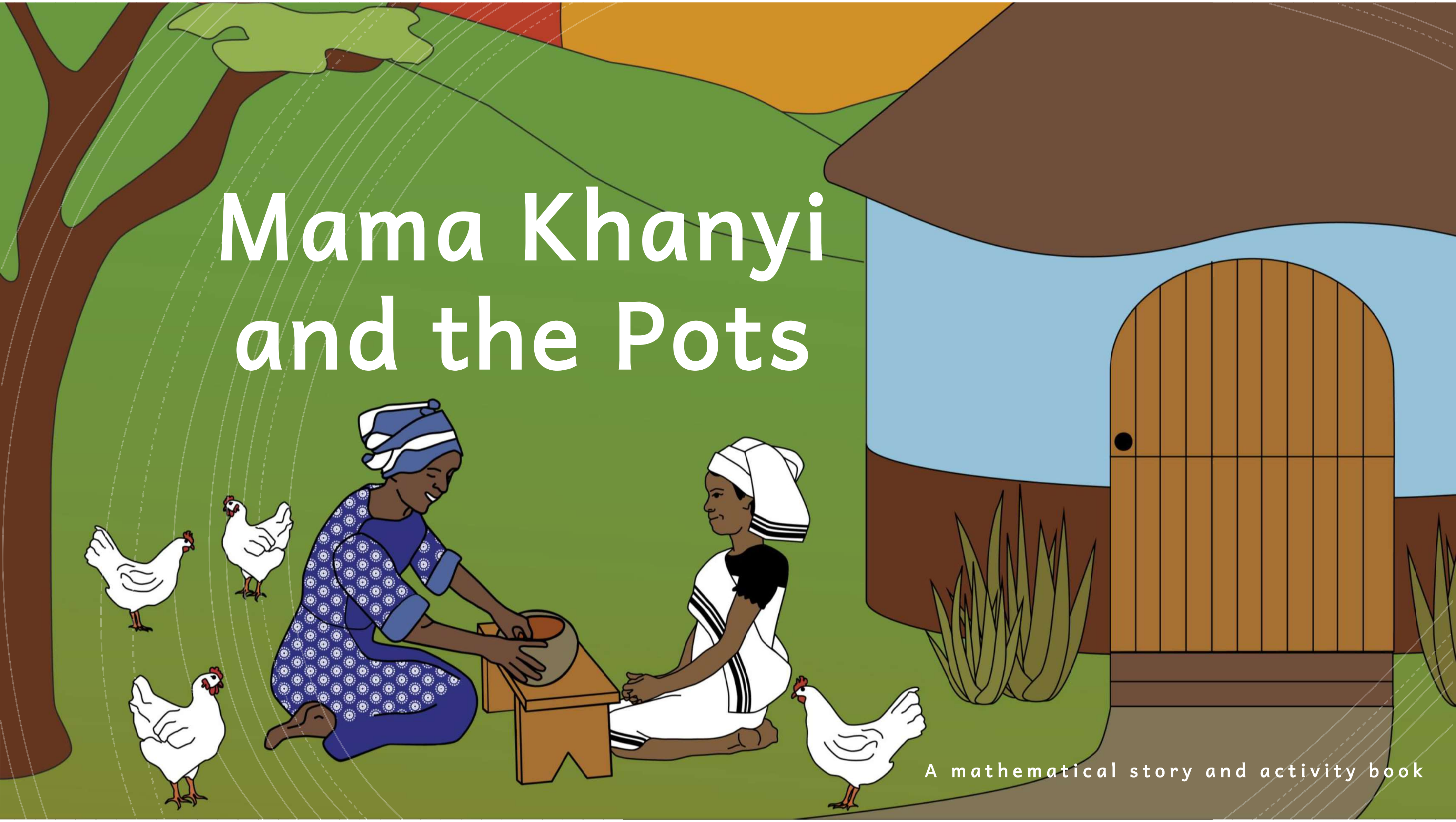
Esa noche Numa se quedó afuera de su jacal mirando a Kia, que es el nombre que en Napiniaca usaban para la Luna. Numa estaba triste por lo que había sucedido ese día y, sin quererlo, se quedó dormida a la luz de la luna. Soñó que hablaba con Kia y le platicaba lo que había sucedido ese día. También soñó que platicaban sobre cosas similares que le sucedían con frecuencia a otros Acajay. Era común que tuvieran problemas con las mediciones que hacían otras personas.

Numa soñó que Kia le hablaba y aconsejaba que utilizaran una misma medida, en lugar de usar las partes de sus cuerpos para medir. Esa madrugada, cuando Numa despertó fuera de su jacal, encontró a su lado una hermosa vara de caoba blanca, decorada con incrustaciones de oro, plata y jade, y que tenía figuras lunares.

En la tarde, Numa convocó al Consejo de los Acajay y les relató su sueño. También les mostró la vara que había encontrado a su lado. Los Acajay conferenciaron por muchas horas, discutiendo si sería conveniente que todos midieran utilizando una medida del mismo tamaño. Al final acordaron que así debía ser y les encargaron a los carpinteros que tomaran la vara de Kia y la copiaran para que todos ellos tuvieran una vara que fuera del mismo tamaño.

Así se dice que sucedieron las cosas en la antigua ciudad de Napiniaca, cuna de hombres y mujeres sabios llamados Acajay.

Mama Khanyi and the Pots



A mathematical story and activity book

Mama Khanyi and the Pots

A mathematical story and activity book

Words: Pamela Vale with Mellony Graven and Jana Višňovská
Artwork: Carmen Ford
Published by the South African Numeracy Chair Project, Rhodes University. Printed in Andika Font v.5.000 (SIL International)

Story adapted from: Cortina, J.L. & Višňovská, J. & Zúñiga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal, 26*(1), 79-99.

This work, and associated resources, are downloadable from:
https://www.ru.ac.za/sanc/teacherdevelopment/miclegr4-7/

Mama Khanyi was a famous potter who lived long, long ago in the village of Matewu. She lived with her daughter, Thembi.

People travelled from near and far to buy her pots.

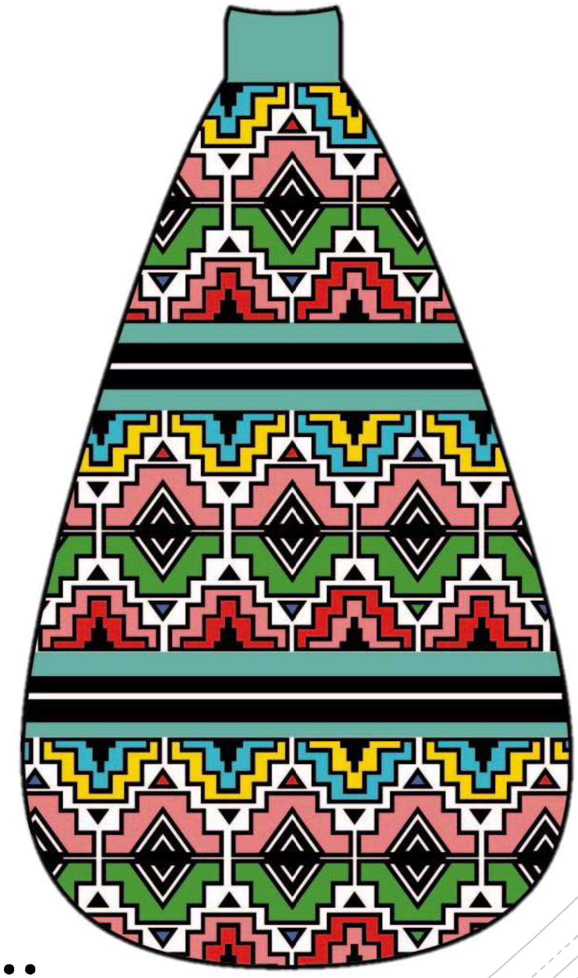
She made beautiful clay pots
in all shapes and sizes.

There were BIG pots...

and there were small pots,

and rOUnd pots...

and taII pots...



all painted in bright patterns.

Mama Khanyi lived in a time before measuring tools like rulers and tape measures.

She used her hands to measure the pots.

What else do you think she could use to measure?

One day Mama Khanyi went to collect some firewood.

Two elders visited from a village far away. They wanted to ask Mama Khanyi to make a very special pot. The pot was a gift for a wedding.

It needed to be exactly the same height as the one they were carrying.

Thembi measured it very carefully with her hands for her mom.

When Mama Khanyi returned from the field, Thembi told her of the elders' visit.

Mama Khanyi was sad that she missed them, but Thembi told her that she had carefully measured the pot.

"Mama," she said, "they want you to make a pot that is THREE hands high. They said they will come to fetch it tomorrow."

Thembi ran off to play and left Mama Khanyi to make the pot.

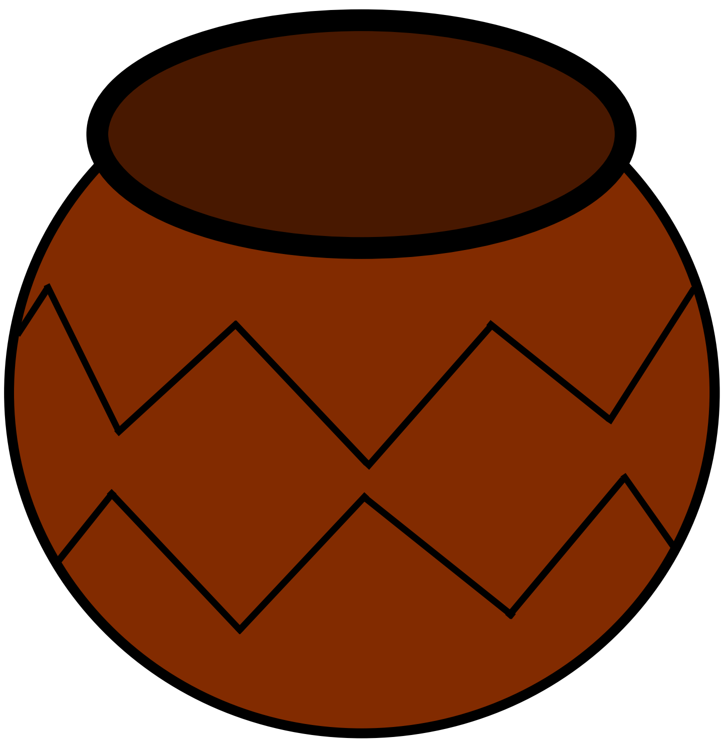
“Three hands high, that is easy to do,” Mama Khanyi said to herself as she started to make the pot.

She worked very carefully to make sure the pot was EXACTLY three hands high.

The elders returned the next day. They brought the old pot and put it down next to the new one. The new pot was the wrong size!

Which pot is the one Mama Khanyi made?

Why do you say so?

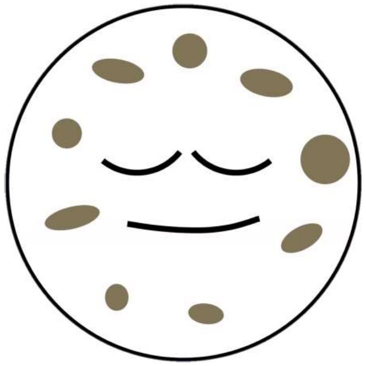


Mama Khanyi asked the elders to let her make them a new pot. They agreed.

This time Mama Khanyi measured the pot herself.

Do you think Mama Khanyi got the same measurement as Thembi?

Why do you say so?



That evening Mama Khanyi sat outside under the full moon. She could not sleep.

She knew that she had taught Thembi how to measure properly. She knew that her and Thembi's hands were different sizes, and was worried the same mistake would happen again.

Was there another way for Thembi to help her mom take measures of pots?

She heard someone sigh...
"I will help," said a voice from above.

Mama Khanyi got a fright!
"Who said that?"

It was Moon.

"Look below the tree at dawn," said Moon. "I will leave something there to help you and Thembi."

Mama Khanyi ran to the tree the next morning to see what Moon had left her.

The only thing lying under the tree was a perfectly straight, white stick!

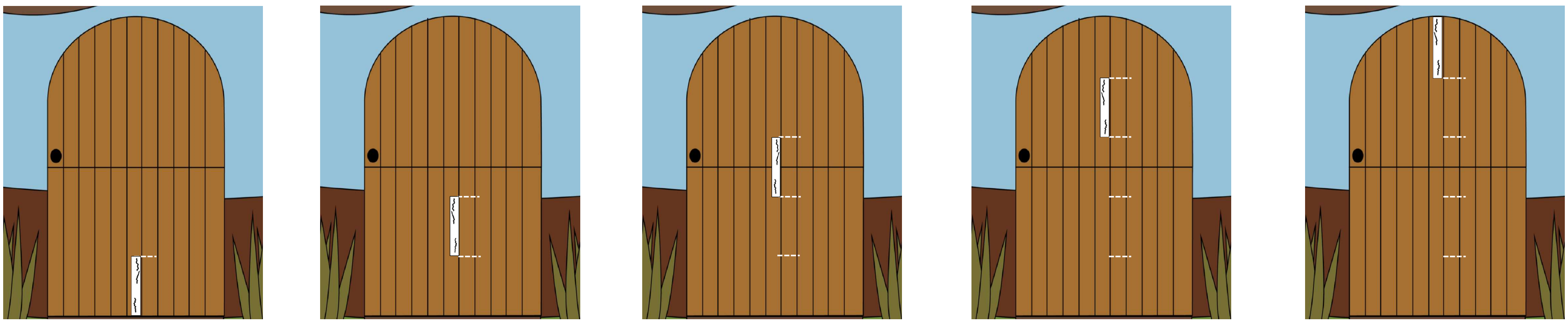
Could this really be something that would help her and Thembi to measure pots?

Mama Khanyi called Thembi to come and look at the stick.

“Moon said that this will help us to measure pots. How can a stick help us?”

“I know!”, said Thembi, “we can use the stick to measure instead of our hands. If we always use the same stick, we will always get the same measurement.”

Mama Khanyi and Thembi practised using the stick by measuring the door of their hut. They were very careful when measuring.



Thembi placed the stick upright on the ground and drew a line where it ended. Then she carefully placed the stick on the line and made another line to see where to place the stick next.

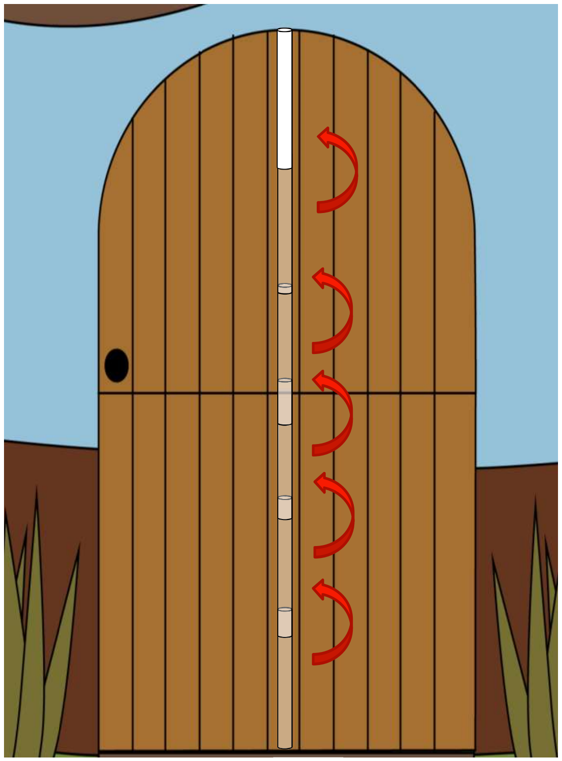
Mama Khanyi and Thembi both measured the door as five sticks high.

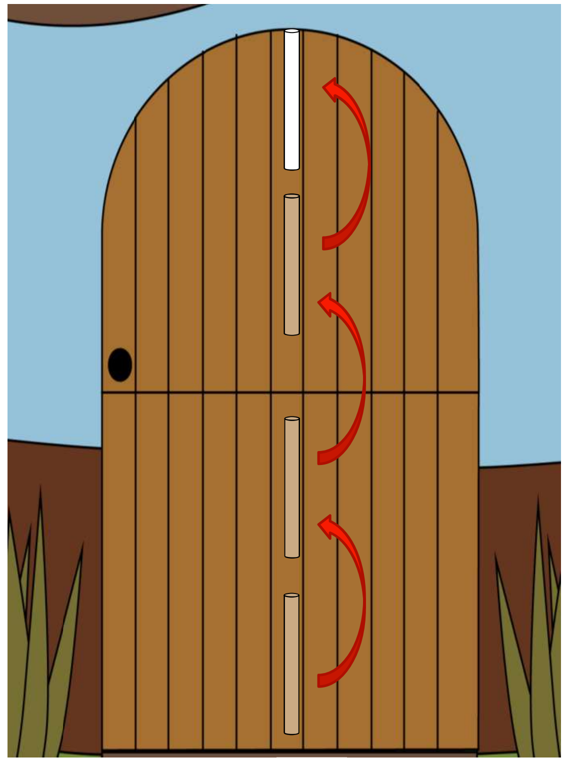
And then they measured a path, a tree, a chair, a bed and each time they both got the same measurement.

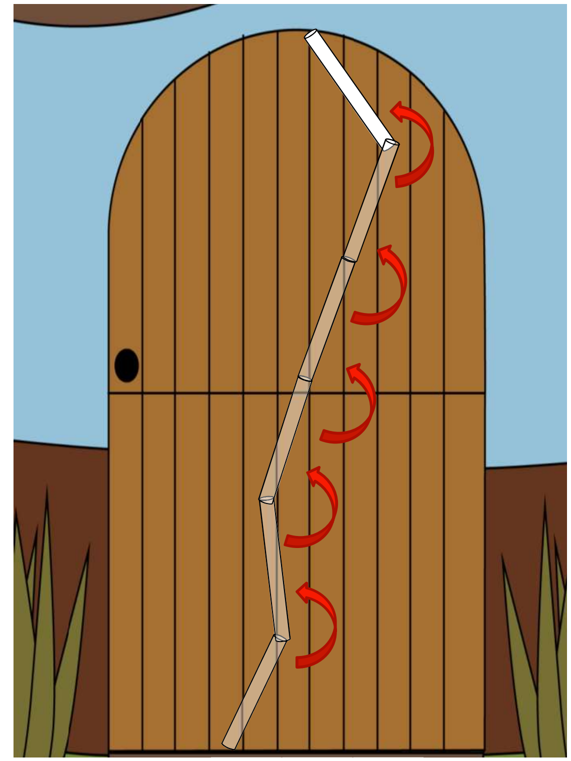
Why do you think they drew a line at the end of the stick each time so carefully?

Why did they measure straight up, vertically, along the line?

What would happen if they placed the stick skew sometimes?



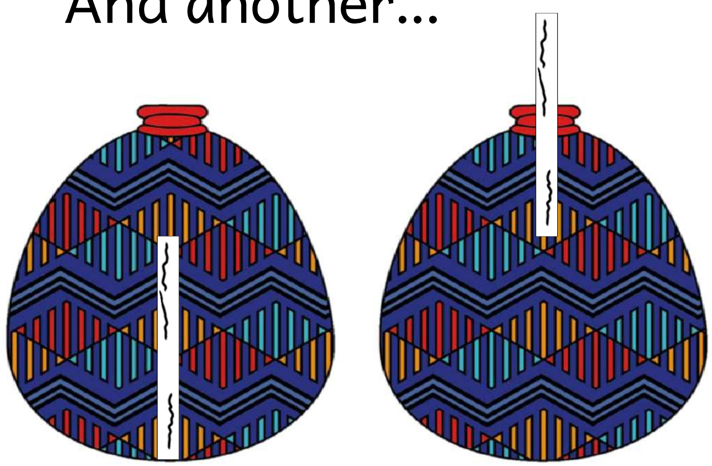




Explain why these are not good ways to measure.

Next they decided to try to measure one of their pots.

And another...

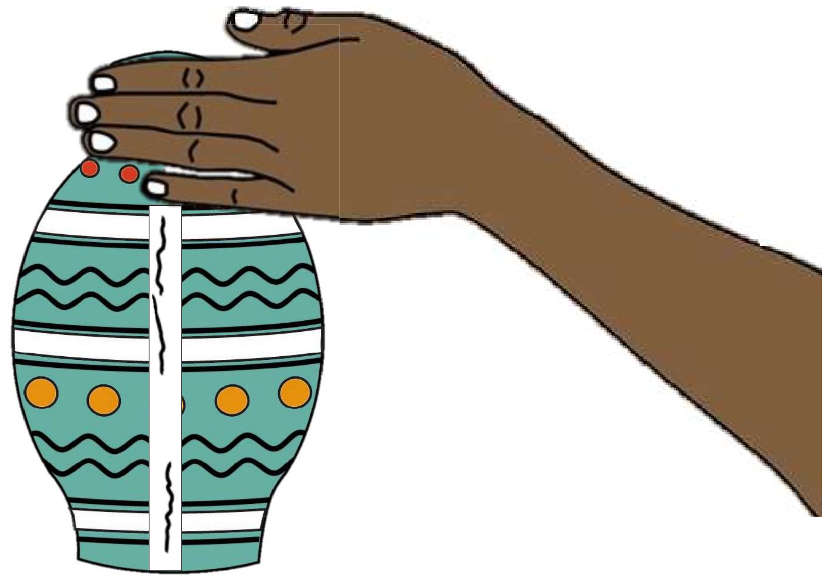


and another...

and another...

"Oh no!" said Thembi. "What do we do when the stick does not fit exactly?"

“We can’t use our fingers because our hands are different sizes.”



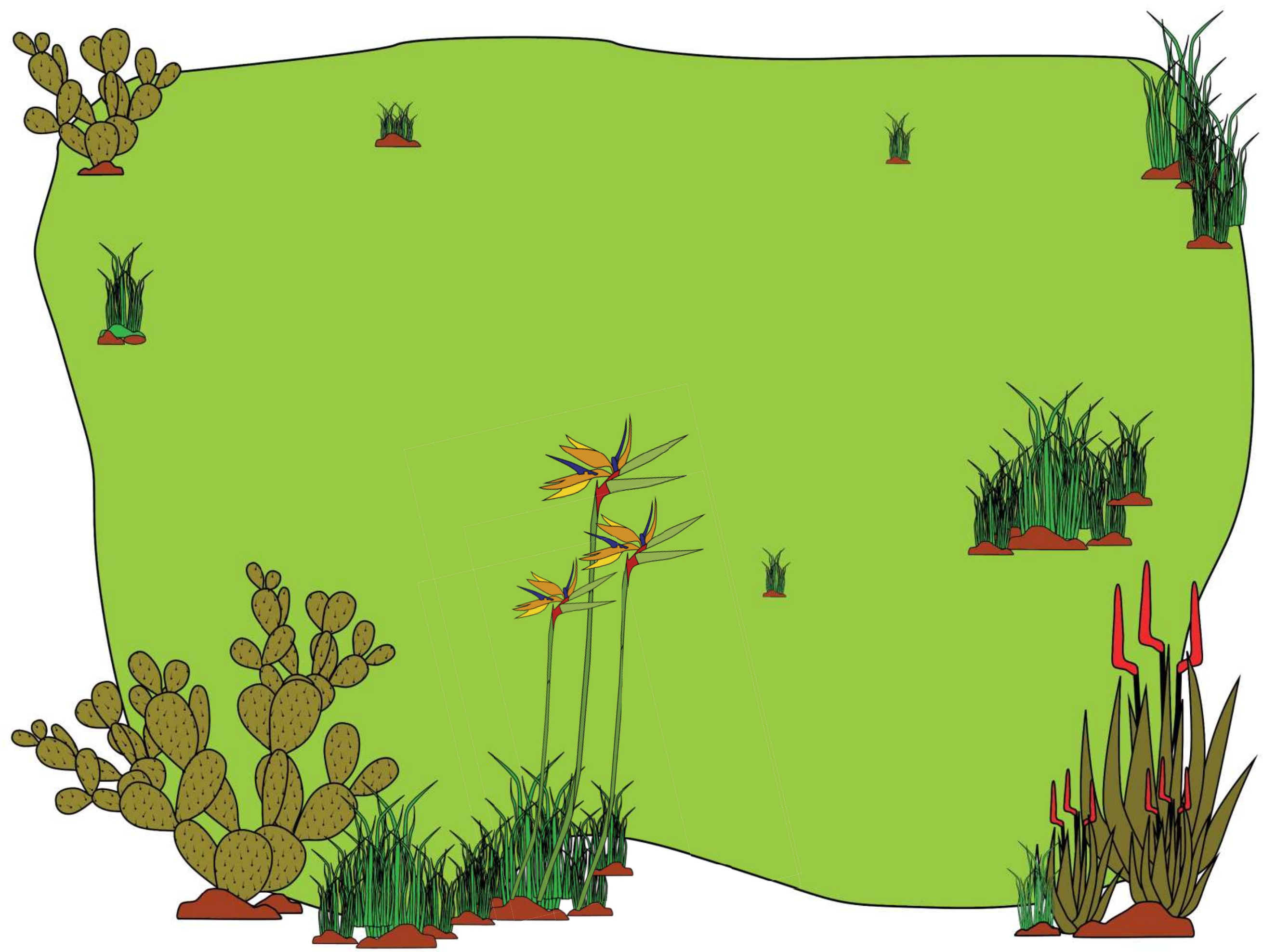
Can you think of something they could do to measure the pieces that are less than one stick?

Mama Khanyi looked out at the field and spotted her favourite plant.

It had a long, straight stem and beautiful flowers.

Can you find it?

Mama Khanyi suddenly thought of a plan!



“We can use this plant to make smaller pieces to use to measure when the white stick is too long.

But, we must make them very carefully.

We can call these smaller pieces ‘smalls’.”

"We should start with a piece so long that when we measure the stick with it, it will fit along the stick exactly TWO times," said Mama Khanyi.

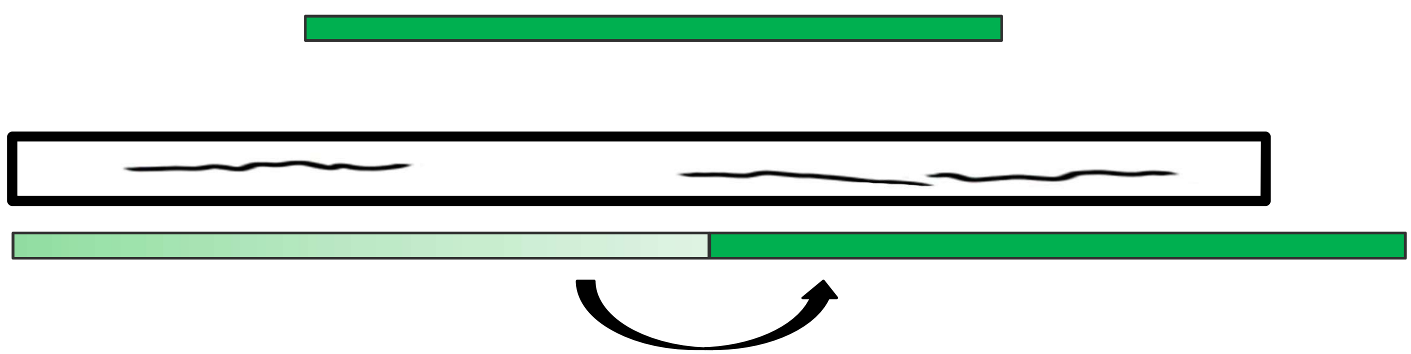
She added, "we will call this new piece an otibele, because 'bele' means small, and 'oti' means TWO."

One otibele will fit along the stick exactly TWO times.

How many otibele will the stick measure?

Mama Khanyi started to make an otibele. She cut the stem to make a piece that would fit along the stick exactly TWO times.

First she cut this piece and placed it along the stick to test if it fit exactly TWO times...

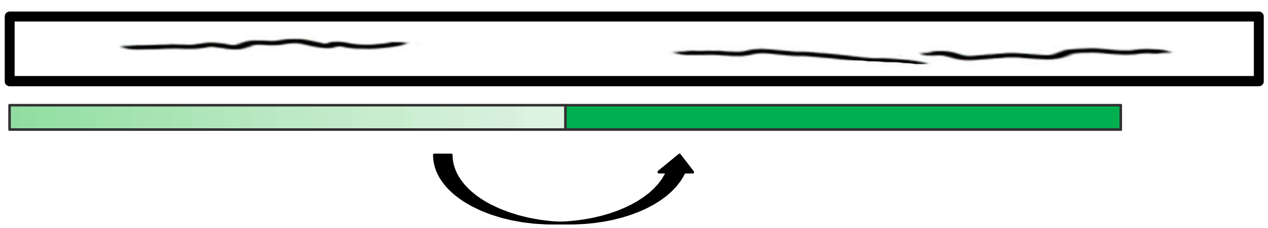


Is this a real otibele?

Would a real otibele be shorter or longer than this?

Mama Khanyi tried again. She took the piece and cut it a little shorter. This is the new length she tried...

She tested it to see if it fit along the stick exactly TWO times.

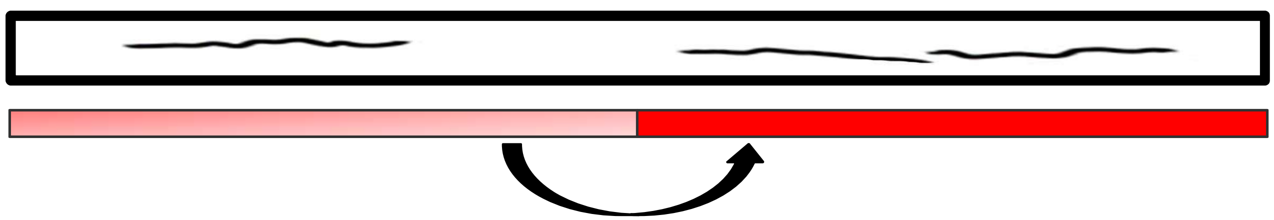


Is this a real otibele? What should Khanyi do now?

Mama Khanyi picked up
a new stem to try again.
After many tries, she
finally got the correct
length for the otibele.

This is the length she tried...

When she tested it, it fit exactly TWO times along the stick!
She painted it red so that she knew this was the small she would use to measure pots.

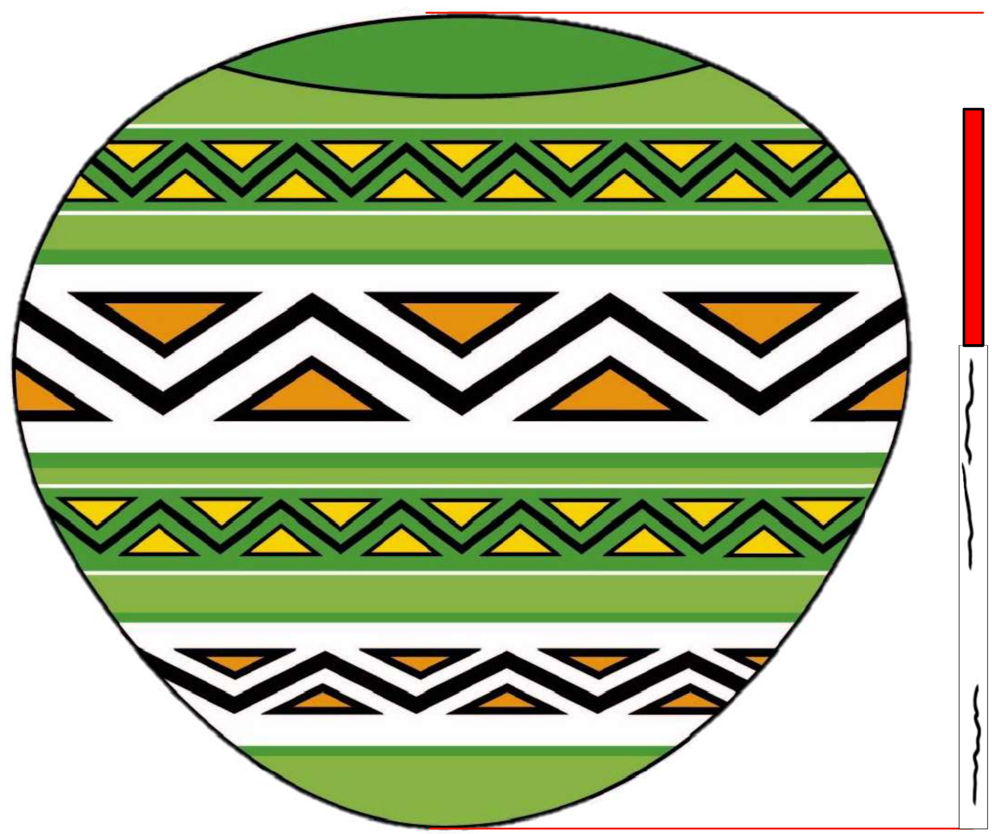


How did Khanyi know it was a real otibele?

“But will that be enough?” asked Thembi. “Will we be able to measure every pot?”

Will Khanyi be able to measure this pot exactly with her stick and the otibele?

Why do you say so?



“We can create more,” said Mama Khanyi.

“Let us make a piece so long that when we measure the stick with it, it will fit along the stick exactly THREE times.”

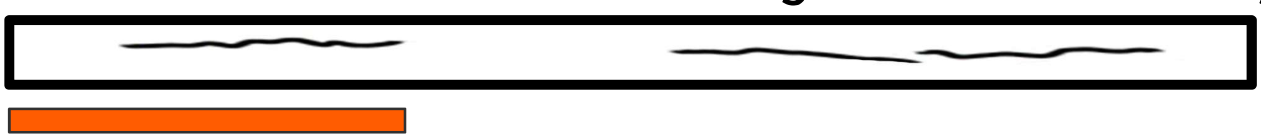
“We can call that an etibele,” shouted Thembi happily, “because ‘eti’ means THREE!”

Do you think that an etibele will be shorter or longer than an otibele? Why do you say so?

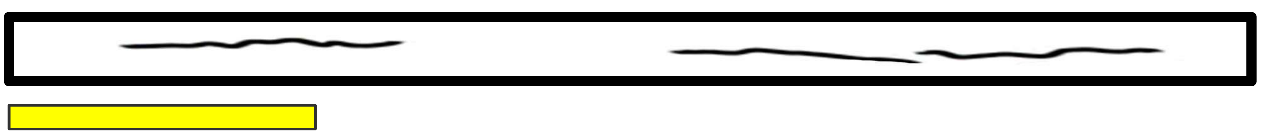
And so Mama Khanyi and Thembi created a whole set of smalls so that they could measure ALL pots. They painted each small a different colour. Try to make these smalls:

One otibele fits along the stick exactly TWO times.

One etibele fits along the stick exactly THREE times.

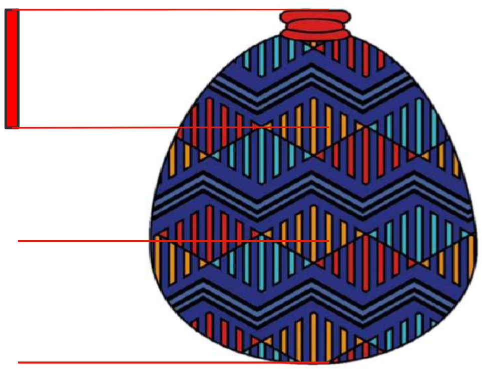


One utibele fits along the stick exactly FOUR times.

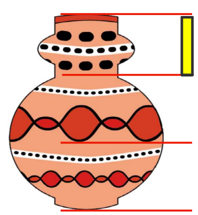


Now make the rest of the smalls that Mama Khanyi and Thembi made.

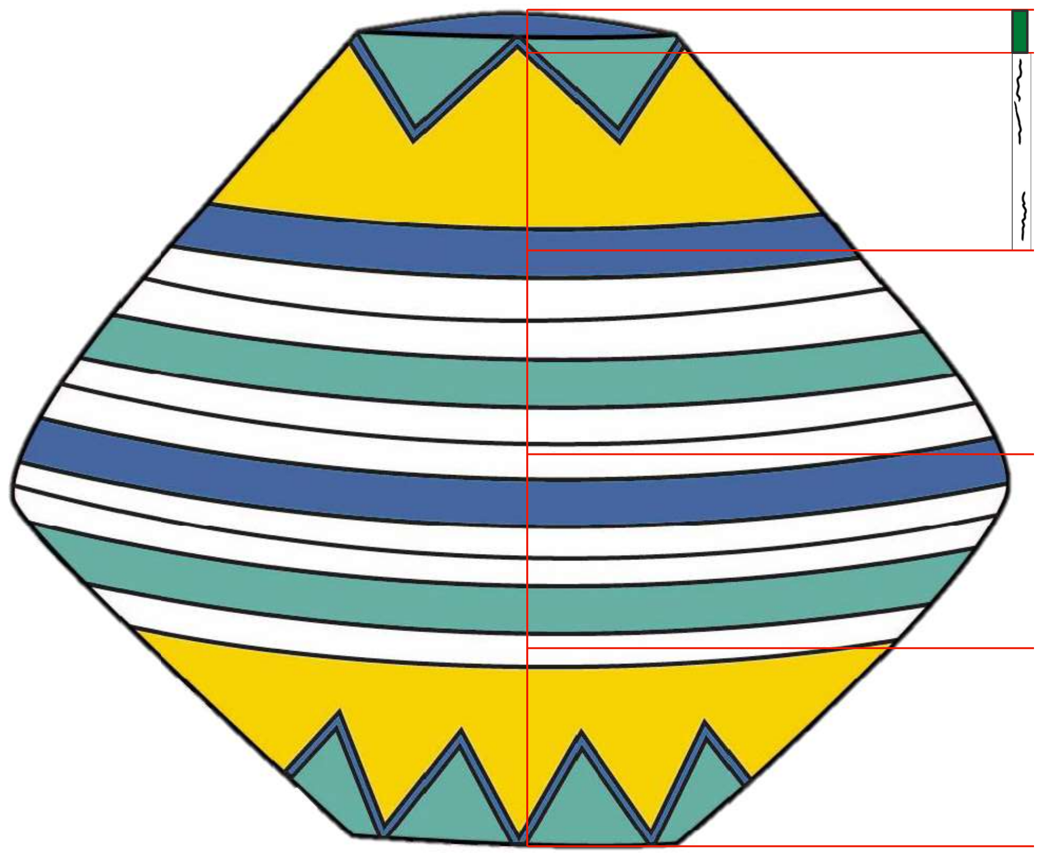
Small of two	Otibele	
Small of three	Etibele	
Small of four	Utibele	
Small of five	Atibele	
Small of six	Ambabele	
Small of seven	Enditibele	
Small of eight	Ahuitibele	
Small of nine	Itetibele	
Small of ten	Nedibele	



three otibele

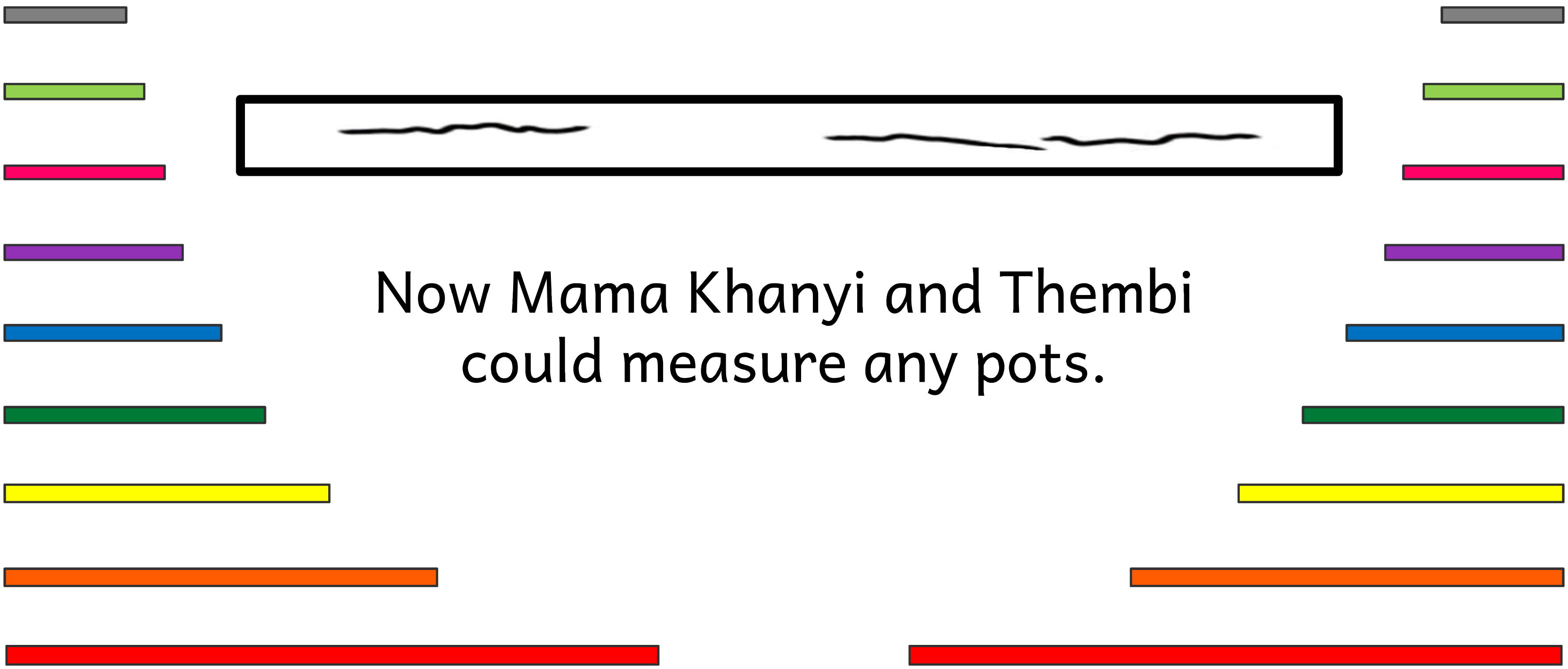


three utibele



four sticks and one atibele

Mama Khanyi and Thembi practised measuring some of their pots.
They discovered that the measuring tools worked for their needs!



Now Mama Khanyi and Thembi
could measure any pots.

Other pot-makers soon heard and came to Mama Khanyi to make their own stick and smalls. This way they would all be able to make the same size pots when needed.

From that time on, whenever anyone asked for a pot, it did not matter who took the measurements, as long as they measured carefully and accurately.

APÉNDICE C