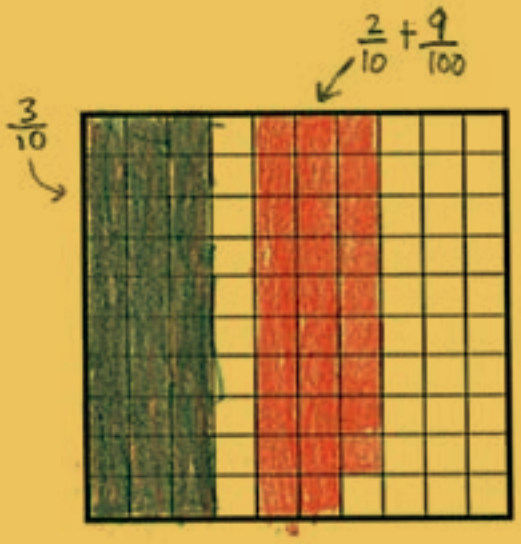
David Block Sevilla

Más de uno, pero menos de dos

La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica

I

Prólogo: Luis Manuel Aguayo



MMXXII
taberna libraria editores

Más de uno, pero menos de dos.
La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica

Más de uno, pero menos de dos.

La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica

David Block Sevilla

Cinvestav
Departamento de Investigaciones Educativas
Universidad Pedagógica Nacional
Unidad Zacatecas

Block Sevilla, David (2022) Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica.

Primera edición
160 páginas, con ilustraciones y referencias
México, Autores, 2022
ISBN: 978-607-8731-73-2

Más de uno, pero menos de dos.
La enseñanza de las fracciones y
los decimales en la educación básica

DR © David Block Sevilla
DR © UPN, Zacatecas
DR © 2022 Cinvestav
DR © Taberna Libraria Editores
Fernando Villalpando 206
Centro, 98000 Zacatecas, Zacatecas
tabernalibrariaeditores@gmail.com

Revisora de contenido: Irma Saiz
Diseño y formación: donDani

Corrección de estilo:
Verónica Arellano Rosales
Margarita Ramírez Badillo
Laura G. Reséndiz Zamudio

Primera edición: octubre, 2022

ISBN: 978-607-8731-73-2

Reservados todos los derechos. No se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros) sin autorización previa y por escrito de los titulares de *copyright*. La infracción de dicho derecho puede constituir un delito contra la propiedad intelectual.

Impreso en México / Printed in Mexico

ÍNDICE

Agradecimientos **9**

Prólogo **11**

Introducción **19**

Capítulo 1. Las fracciones y la medida **33**

Tema 1. Medición 35

Tema 2. El conjunto de fracciones con denominador potencia de 2 (2, 4, 8,16…) 41

Tema 3. Fracciones de otras magnitudes 45

Tema 4. Representación de las fracciones en la recta numérica 54

Tema 5. Cálculo mental 66

Tema 6. La equivalencia, la suma y la resta de fracciones 72

Expresiones equivalentes 75

Tema 7. Problemas para profundizar 76

La medición en la génesis de las fracciones 79

Capítulo 2. Los decimales y la medida 81

Tema 1. Las fracciones decimales: más fáciles de manipular 84

1. Comparar, sumar, restar medidas expresadas con fracciones decimales 84

2. Dos magnitudes muy adecuadas para representar a las fracciones: la longitud y la superficie 86

3. Relacionar fracciones decimales entre sí y con fracciones comunes 91

Tema 2. La introducción de la escritura con punto decimal 100

Tema 3. La recta numérica y la densidad 105

Tema 4. Errores frecuentes, noción de obstáculo 109

Tema 5. Números racionales decimales, números racionales no decimales, y números no racionales 109

1. Fracciones no decimales 113

2. Notación decimal de las fracciones no decimales 115

3. Números que no son racionales: los irracionales 119

Solucionario 123

Capítulo 1. Las fracciones y la medida 123

Capítulo 2. Los decimales y la medida 137

Notas 151

Bibliografía 153

AGRADECIMIENTOS

Para la elaboración de esta obra he contado con la valiosísima colaboración de varios colegas. Irma Saiz, revisó los contenidos matemáticos y didácticos. Además de sus numerosas observaciones, aportó generosamente lecciones de sus libros de texto junto con algunas reflexiones para facilitar su análisis por parte de los docentes.

Al Dr. Luis Manuel Aguayo, mi agradecimiento por la original y sugestiva presentación de la obra.

Asimismo, agradezco a Verónica Arellano, Evelyn Caballero, Margarita Ramírez y Laura Reséndiz por la minuciosa revisión del manuscrito y por las sugerencias para facilitar la comprensión del texto.

A todos, les agradezco infinitamente su ayuda desinteresada.

PRÓLOGO

Este libro, cuya presentación es al mismo tiempo un placer y un honor hacer, versa sobre las fracciones, uno de los contenidos matemáticos que sin duda genera un gran número de dificultades en su enseñanza y que por ello ha sido objeto de múltiples investigaciones. Su lectura, inevitablemente remite a diversas imágenes que permiten apreciarlo de diferentes maneras; en lo que sigue me permitiré utilizar algunas de esas imágenes para dar cuenta de las virtudes de este texto.

La trilogía: tres libros, tres saberes, una misma intención

Entre 1993 y 1994, el cineasta polaco Kieślowski filma su famosa trilogía *Azul, Blanco y Rojo* y toma los colores de la bandera de Francia para expresarse sobre la tradición francesa acerca de la libertad, la igualdad y la fraternidad. Tres películas, una historia por cada color y un solo objeto con múltiples significados, la bandera.

El libro que nos ocupa hoy puede pensarse como parte de una trilogía también inscrita en una tradición francesa, la de la escuela de Didáctica de las Matemáticas, específicamente en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau. La

trilogía comienza en 2010 con la aparición de *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*[1], luego en el 2013 se publica *Repartir y comparar. La enseñanza de la división entera en la escuela primaria*[2] y en 2022 se completa con *Más de uno, pero menos de dos.* Cuatro libros, tres saberes distintos todos ligados con la fracción; tres lugares desde dónde pensar la enseñanza (el saber, el alumno y el profesor), y una sola intención, colocar lo didáctico en la dialéctica herramienta /objeto, lo que significa estudiar lo didáctico para convertirlo en una herramienta que permita orientar el proyecto de enseñanza.

Siguiendo esta intención, en *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica* se incluyen elementos para comprender la proporcionalidad directa y su enseñanza, en este caso la noción de razón es el puente entre proporcionalidad y fracción. La misma lógica se observa en *Repartir y comparar. La enseñanza de la división entera en la escuela primaria,* en donde una vez más, el estudio didáctico de la división, se relaciona con las fracciones a través de una división «que no se puede hacer». La división se convierte en una fuente de problemas de medición, aquellos en los que una determinada cantidad se divide en cierto número de partes, por ejemplo 5 galletas entre 10 personas, y para cuantificar el cociente hacen falta las fracciones: toca $\frac{1}{2}$ galleta por persona. Pero la división también permite definir las fracciones como cocientes de dos enteros, es decir $\frac{a}{b}$ es el número que multiplicado por b da a, es el cociente de a entre b.

A diferencia de los dos primeros libros, *Más de uno, pero menos de dos,* sitúa a la fracción o número racional como su objeto de estudio central y, fiel a la tradición en la que se inscribe, a lo largo de los dos volúmenes que lo componen se van tejiendo los análisis de los procedimientos de los niños,

los fragmentos de clase en los que estos justifican sus procedimientos bajo la guía del profesor, las acotaciones del autor sobre estos hechos, la explicitación de las nociones didácticas puestas en juego, la correspondencia entre noción matemática y situación de aprendizaje. Todas piezas de ese puzzle didáctico cuya intención no es otra que situar lo didáctico en el corazón de la enseñanza. En ese sentido una noción que permite comprender la estructura del libro es la de triángulo didáctico; sus tres elementos, profesor, alumno y saber, se alternan para dar cuenta de las prácticas posibles de alumnos y profesores.

Empero, no debe olvidarse que en la tradición francesa de la Didáctica de las Matemáticas el saber ocupa un lugar central, es su naturaleza la que dota de sentido a los problemas, a las estrategias que los alumnos utilizan para resolverlos y a sus respuestas. El saber matemático, en torno del cual se articula esta obra, está organizado de la siguiente manera: 1) las fracciones y la medida, 2) los decimales y la medida; 3) las fracciones y la división, 4) las fracciones en el papel de razones y 5) fracciones y decimales como operadores multiplicativos. A lo largo de los dos volúmenes de la obra el lector encontrará actividades que puede llevar al aula, también situaciones para analizar y reflexionar sobre la enseñanza de las fracciones durante el trayecto que va desde el tercer grado de la escuela primaria hasta el segundo grado de secundaria.

Sin duda, *Más de uno, pero menos de dos* es la obra mejor lograda de la trilogía, de ello da cuenta su carácter más amplio, no deja problemática alguna ligada a las fracciones sin tocar, y se expresa en un lenguaje claro que no por ello se desprende de la rigurosidad.

La investigación, los profesores y los formadores

En su libro *Contra la historia oficial* José Antonio Crespo narra una broma que circula entre historiadores, según la cual estos se sumergen en las profundidades de los archivos para desenterrar a la historia misma, pero luego la plasman en gruesos volúmenes tan enojosos e impenetrables por su extensión, especialización y lenguaje erudito, que terminan por ser enterrados en los oscuros estantes de las bibliotecas sin que el público se entere de lo que se descubrió, se comprendió o se revaloró. De esta manera la investigación permanece encerrada en los centros académicos y se separa de la memoria colectiva y social.

Al parecer este fenómeno no es ajeno a la Educación Matemática, la investigación crece exponencialmente y la enseñanza cambia a paso lento, por ello no son pocos los educadores matemáticos que se preguntan si el nivel de especialización de la investigación ha separado sus resultados de la actividad de los profesores, lo que resultaría una paradoja porque el objetivo último de la investigación en Didáctica de las Matemáticas es ayudar a mejorar la enseñanza.

Una virtud de *Más de uno, pero menos de dos,* es que se mueve en el sentido contrario de esta separación puesto que su objetivo es «contribuir a una mejor comprensión de los números racionales, y de la problemática de su enseñanza…», pero no de cualquier manera sino acercando a profesores, formadores y diseñadores de currículo a los conocimientos que sobre el tema se han producido en la esfera de la investigación en didáctica. Esta virtud no es menor, baste recordar que por lo menos desde hace 20 años Brousseau ya postulaba la necesidad de una «didáctica para principiante»[3] para los profesores, que integrara ciertos elementos teóricos y los preparara para la utilización más refinada de los saberes

de la didáctica, garantizando con ello un mejor desempeño profesional.

En este sentido *Más de uno, pero menos de dos,* es un intento bien logrado para cerrar la brecha entre investigación, profesores y formadores. Al organizar los resultados surgidos de la investigación en didáctica sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales, se constituye como una herramienta valiosa para diversos agentes educativos porque junto con las situaciones y actividades, también se incluyen conceptos como multiplicidad de problemáticas y significados, obstáculos epistemológicos y didácticos, situación didáctica y adidáctica, institucionalización, contratos, variables didácticas, y formas de validación…, que constituyen la formación teórica que permite al lector dar mayor sentido a las actividades y situaciones, y a sus implicaciones.

Un libro que se desdobla en múltiples libros

Con la publicación de *Rayuela* en 1963 Julio Cortázar rompe con la estructura convencional de la narrativa y propone —al menos— dos lecturas posibles, una siguiendo la secuencia lineal de los capítulos que finaliza en el capítulo 56, otra iniciaría en el capítulo 73 y dando saltos de capítulo en capítulo según un tablero que propone el autor, el lector se encontraría con una historia diferente. Empero, cuando el lector descubre la ausencia del capítulo 55 en el tablero se da cuenta que no solo hay dos lecturas posibles, sino que el libro se desdobla de múltiples maneras para convertirse en muchos libros, y que cada uno puede leerse del mismo modo que se juega la rayuela, dando saltos.

Más de uno, pero menos de dos, es un libro que se ciñe a esa misma arquitectura; también da la posibilidad de leerlo

—al menos— de dos maneras distintas. Siguiendo el orden convencional de los capítulos se comprende la lógica del saber matemático, la relación de las medidas con las fracciones y los decimales, sus propiedades y representaciones como subconjunto de los números racionales, la relación entre la división con números naturales y las fracciones, —ya sea en problemas de medición o en los que se requiera definir a la fracción como cociente—, y la multiplicación de fracciones, a la que le da funcionalidad el operador multiplicativo y decimal, son algunas estaciones de dicha ruta y es posible abordarlas desde diferentes flancos.

En la segunda lectura, que no seguiría el orden convencional de los capítulos, se puede ver la secuencia en la que se estudian los racionales en la educación básica y, dependiendo del grado escolar que se quiera analizar, podrán leerse los apartados en los que se incluyen los contenidos propios de un grado, por ejemplo, los profesores de tercero y cuarto grado podrían leer el apartado uno, luego saltar al tres.

Sin embargo, estas no son las únicas lecturas posibles, el texto se multiplica en correspondencia con la mirada que se pose sobre él, la del profesor que busca una mejor comprensión de lo que en términos prácticos significa la funcionalidad del enfoque de la resolución de problemas; la de un colectivo de profesores que pretende mejorar la enseñanza de las matemáticas; la de un profesor que busca situaciones didácticas para llevar a su aula con o sin modificaciones; la de un profesor que busca comprender en términos prácticos las nociones teóricas propias de la didáctica; la de los formadores de docentes que intentan convertir los resultados de la investigación didáctica en una herramienta para la formación; la del estudiante de posgrado que busca situaciones didácticas o situaciones de formación para experimentar; la de los diseñadores de currículo que buscan una mejor forma de

articular los contenidos para plasmarlos en los programas de estudio, entre otras.

En síntesis, *Más de uno, pero menos de dos* es una obra que propone un libre juego entre lector, texto y saber didáctico sobre las fracciones y en ese juego invita a leerse de varias maneras y desde distintas posiciones, es por eso un libro que se desdobla para convertirse en múltiples libros que interpelan e invitan a una cierta mirada, a un cierto lector. En ese sentido el libro no tiene desperdicio y por ello convocamos a los lectores de esta obra, a la elección de la mirada y la adopción del sentido con el que ha de ser leída.

Luis Manuel Aguayo Rendón[4]
Ciudad de México, marzo de 2021

INTRODUCCIÓN.

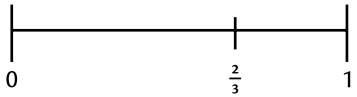
Diversidad de problemas, roles, definiciones, representaciones y tipos de fracciones

Esta obra busca contribuir a una mejor comprensión de los números racionales, y de la problemática de su enseñanza. Está dirigida a docentes de educación básica, a formadores de docentes, a diseñadores de currículo y a investigadores.

A continuación, se da un panorama de los aspectos del universo de las fracciones y los decimales que se abordan en los dos volúmenes que componen la obra.

Las fracciones, como otros conocimientos de matemáticas, se aprenden de manera más significativa si se elaboran como herramientas para resolver determinados problemas. Cuando se analizan los problemas que las fracciones resuelven, se observa, en primer lugar, que hay diferentes tipos de problemas, y que las fracciones juegan **diferentes papeles** en cada **tipo de problema**: pueden expresar medidas, relaciones, operadores multiplicativos, o pueden presentarse como números abstractos. En el cuadro siguiente se dan algunos ejemplos.

En...	La fracción expresa:
«El espesor de una hoja es de $\frac{1}{10}$ de mm»	Una medida de longitud
«$\frac{3}{4}$ de la población vive en el campo» «$\frac{2}{3}$ de la mezcla debe ser de agua»	Una relación entre una parte y un todo (una razón)
El factor de escala del plano es de 0.0025	Un operador multiplicativo.

En...	La fracción expresa:
El número que multiplicado por 4 da 3, es $\frac{3}{4}$	Un cociente
	Un punto en la recta. Un número abstracto.

En cada uno de esos papeles, o roles, las fracciones pueden compararse y sumarse, restarse, multiplicarse, dividirse… aunque, como veremos, algunas operaciones se usan más y se comprenden mejor cuando las fracciones juegan uno de esos roles que cuando juegan otro. Estos distintos roles dan lugar a **distintos significados** de las fracciones (o «constructos», como los llama T. Kieren, 1988).

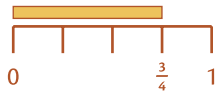
Por otra parte, las fracciones, al igual que muchos otros conocimientos de matemáticas, se pueden definir de distintas maneras. Una manera de generar las fracciones consiste en «quebrar» una unidad en ***n*** partes iguales e introducir fracciones unitarias «$\frac{1}{n}$ de». Luego, introducir fracciones no unitarias como suma de varias unitarias, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de manzana es $\frac{1}{4}$ de manzana + $\frac{1}{4}$ de manzana + $\frac{1}{4}$ de manzana. La definición que resulta de esta construcción clásica es: «$\frac{3}{4}$ de manzana es lo que resulta de partir la manzana en 4 partes iguales y tomar tres». Una definición distinta, más frecuente en los textos de matemáticas para niveles superiores, consiste en definir a la fracción como un cociente: en este caso $\frac{3}{4}$ no significa de entrada tres pedazos de $\frac{1}{4}$, sino lo que resulta de dividir 3 unidades entre 4, o, dicho de otro modo, es el número que multiplicado por 4 da 3.[5]

Así, hay cierta relación entre los distintos significados que pueden asumir las fracciones y las distintas maneras en que se pueden definir.

¿Qué significa $\frac{3}{4}$?

Como «partes de unidad» (quebrado)

Lo que resulta de partir una unidad entre 4 y tomar 3 partes



Como «cociente»

Lo que resulta de dividir 3 unidades entre 4

Fracciones decimales, no decimales y números que no son fracciones

Existe un subconjunto de fracciones, importante por la gran facilidad que presentan para realizar las operaciones. Se trata de las **fracciones decimales**, esto es, las que tienen denominador 10, 100, 1000 o cualquier potencia de 10, por ejemplo, $\frac{125}{1000}$. Estas fracciones, además de la facilidad para calcular, presentan otras ventajas: una es que se pueden representar usando la misma notación con la que se escriben los números enteros, la notación decimal (por ejemplo, la fracción $\frac{125}{1000}$ se puede escribir 0.125). A estos números se les llama «**números decimales**». Hay fracciones que no tienen denominador potencia de 10, pero son equivalentes a una que sí lo tiene, por ejemplo, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$, o bien, $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75$. A estas fracciones se les puede considerar también como fracciones decimales, o bien, si queremos ser más precisos (a costa de un lenguaje más pesado) se les considerará como «fracciones que son equivalentes a una fracción decimal». Es oportuno recordar aquí que los números naturales (1, 2, 3, …) son equivalentes a

fracciones, y en particular a fracciones decimales, por ejemplo $\frac{3}{1} = \frac{30}{10} = \frac{300}{100}$.

Por otra parte, no todas las fracciones tienen una equivalente decimal, por ejemplo $\frac{1}{3}$ no la tiene, no hay ninguna fracción con denominador potencia de 10, que sea equivalente a $\frac{1}{3}$. No obstante, es posible encontrar números decimales tan próximos como se quiera a una fracción no decimal, por ejemplo, 0.33, o 0.333 se aproximan a $\frac{1}{3}$. Así, para efectos prácticos, cualquier fracción no decimal puede ser sustituida por una decimal, tan próxima a ella como se necesite. Esta es otra gran ventaja de los números decimales.

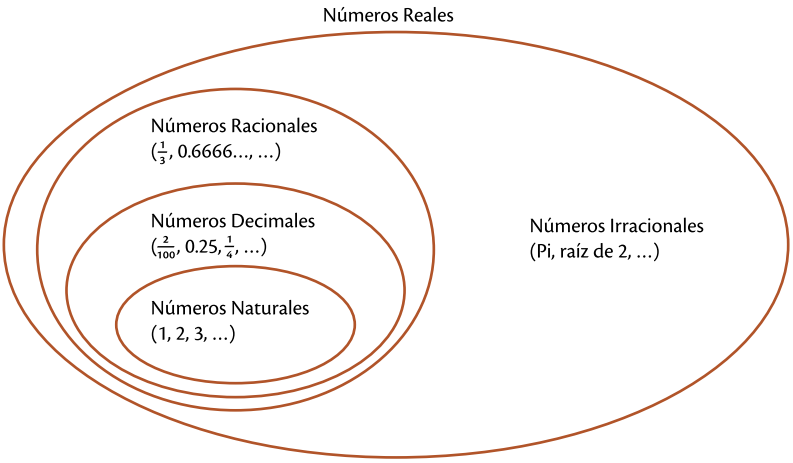
El conjunto de las fracciones formado por las que son decimales, las que no son decimales, positivas y negativas, constituye el conjunto de los **números racionales**.

Cabe señalar, por último, y solo para tenerlo presente, que hay números que no se pueden expresar de manera exacta con una fracción (ni por lo tanto con un decimal), por ejemplo, el número de veces que la medida del diámetro de un círculo es igual a su circunferencia (Pi), o la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1. No obstante, esos números se pueden aproximar, tanto como se quiera, con decimales. Son **números irracionales**. Estos números, salvo algunas excepciones como Pi, no se estudian en la escolaridad básica.

Al conjunto que contiene a los números racionales y a los irracionales, se le llama conjunto de los números reales.

Una precisión: ¿debemos hablar de fracciones o de números racionales? El concepto de número racional es más abstracto que el de fracción: puede decirse que un número racional es un conjunto de fracciones equivalentes. El término fracción hace referencia a un objeto singular. Así, podríamos decir que $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son dos fracciones (equivalentes), pero ambos son el mismo número racional. En este texto se optará por hablar casi siempre de fracciones[6] excepto cuando sea nece-

sario hacer referencia al conjunto de los números racionales. Esta elección se debe a que en el trabajo que se realizará se pondrán en juego, de entrada, fracciones concretas, ligadas a magnitudes, y no el concepto amplio, formal, de número racional. Este último constituye más bien un punto de llegada, una meta a mediano plazo. No sobra decir que el estudio de las fracciones y los decimales constituye una buena parte del camino para la comprensión del concepto de número racional.



La enseñanza, el aprendizaje: un recorrido con muchas opciones

Durante la educación básica, se pretende que los alumnos desarrollen un conocimiento cada vez más amplio y profundo de la noción de fracción y de número decimal, que enfrenten nuevos tipos de problemas, que conozcan nuevas definiciones, que se apropien de más significados. A lo largo del recorrido, estudian el orden entre las fracciones, desarrollan formas de resolver las cuatro operaciones, y afirman los algoritmos.

Conocen también al subconjunto de decimales. Finalmente, adquieren un conocimiento de número racional, más abstracto, que abarca a los distintos significados, que fueron desarrollando.

Se trata de un extenso camino con numerosas opciones acerca de por dónde comenzar, con qué seguir, qué conectar con qué, cuánto tiempo destinar a cada fase. Los maestros, los investigadores, los diseñadores de programas y de libros de texto, han explorado distintas alternativas. Ninguna puede considerarse perfecta, y además «la mejor» depende siempre de las condiciones y necesidades de cada profesor y de sus alumnos, pero, sin duda, hay ya numerosos conocimientos que contribuyen a enriquecer y fundamentar una propuesta didáctica.

Objetivos

- Profundizar en el conocimiento matemático y didáctico de las fracciones y los decimales, destacando algunos de los significados que asumen al funcionar en situaciones específicas, en particular aquellos que son relevantes en la educación básica.
- Identificar vínculos del tema de las fracciones con otros temas de los programas de matemáticas, que juegan un papel en los procesos de construcción de las nociones, principalmente entre fracciones y decimales, medición y proporcionalidad.
- Analizar algunas secuencias de situaciones didácticas diseñadas para favorecer aprendizajes de las fracciones y decimales en sus distintos significados. Analizar lecciones de libros de texto.

- Conocer resoluciones, dificultades y errores de alumnos de primaria y de secundaria frente a los problemas que se están estudiando.

En paralelo con los objetivos anteriores, y de manera integrada con ellos, se persiguen los siguientes objetivos relativos a conocimientos teóricos en didáctica de las matemáticas.

- Abordar la noción de funcionalidad de un concepto y, con relación a esta, la de multiplicidad de problemáticas y de significados.
- Introducir o repasar algunas nociones de la Teoría de las Situaciones Didácticas para el estudio de las situaciones didácticas.

Es importante precisar que la obra no pretende ser un compendio de actividades para llevar a cabo en el aula. Si bien el profesor encontrará aquí numerosas ideas y sugerencias sobre actividades que puede hacer con sus alumnos, el propósito es más bien, como se dijo antes, darle elementos que le ayuden a analizarlas y a diseñarlas.

Estructura y contenidos

Los capítulos de ambos volúmenes son los siguientes.

Volumen I	Capítulo 1. Las fracciones y la medida
	Capítulo 2. Los decimales y la medida
Volumen II	Capítulo 1. Las fracciones y la división
	Capítulo 2. Las fracciones en el papel de razones
	Capítulo 3. El operador multiplicativo fraccionario o decimal

Volumen I, Capítulo 1. Las fracciones y la medida

Revisaremos el significado clásico de las fracciones como partes de unidad; se construyen a partir de iterar la fracción unitaria ($\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ldots$ *m veces* $=\frac{m}{n}$). El contexto que da sentido a las fracciones es la medición.

Bajo este significado, y en este contexto, se estudian las nociones de:

- equivalencia;
- fracciones como puntos en la recta;
- orden y operaciones aditivas.

Volumen I, Capítulo 2. Los decimales y la medida

Los decimales constituyen un subconjunto de los racionales, aquellos de la forma $\frac{n}{10^m}$. Estos números, aunque comparten los mismos significados que las fracciones en general (expresiones de medidas, en la recta numérica, expresiones de operadores, etc.), presentan una serie de particularidades que ameritan un espacio aparte. En este apartado, se estudiarán los siguientes aspectos:

- las fracciones decimales como subconjunto de los racionales; la notación decimal;
- representaciones de los decimales (en la recta, mediante la longitud, mediante superficie);
- orden, propiedad de la densidad, ubicación en la recta numérica, operaciones aditivas;
- aproximación decimal a fracciones no decimales.

Volumen II, Capítulo 1. Las fracciones y la división

La división de números naturales está relacionada estrechamente con las fracciones. Por una parte, es una fuente importante de problemas en los que una determinada cantidad (3 metros, 5 galletas, 2 kg, etc.) se divide en cierto número de partes e interesa cuantificar el cociente (3 metros de listón divididos en 5 partes iguales para hacer moños, da a $\frac{3}{5}$ de metro por moño). En este caso, las fracciones expresan medidas, y siguen siendo «partes de unidad». La división juega como problemática generadora.

Por otra parte, la división puede dar lugar a una definición de las fracciones como cocientes de dos enteros. La fracción $\frac{a}{b}$ es el número que multiplicado por b, da a. Es decir, es el cociente de a entre b. En este caso la división constituye un significado de las fracciones, como cocientes de enteros.

Se estudiará, además, la problemática del tránsito del significado de las fracciones como partes de unidad a su significado como cociente. Se mencionará un problema curricular actual en el que ambos significados existen, uno en primaria, y el otro en secundaria, ignorándose uno al otro.

Volumen II, Capítulo 2. Las fracciones en el papel de razones

Una expresión como «$\frac{3}{4}$ de la mezcla es de pintura roja», no da información acerca de la cantidad de pintura roja que se debe poner, sino de la relación que debe haber entre la cantidad de pintura y el total de mezcla. Este tipo de relaciones se llaman razones. Expresar razones constituye uno de los roles fundamentales de las fracciones. Las razones están en la base de numerosos conceptos más, como el de cantidad relativa, tasa, índice, porcentaje…

Además de lo anterior, la fracción, en su papel de razón, es una pieza angular en la construcción de la noción de multiplicación de fracciones.

En este capítulo se incluyen los siguientes dos apartados:

- las razones «a por cada b», precursoras de las fracciones;
- la emergencia de las fracciones «$\frac{a}{b}$ de», como expresiones de razones «a por cada b».

Volumen II, Capítulo 3. El operador multiplicativo fraccionario o decimal

La multiplicación por fracciones y decimales constituye uno de los aspectos de la aritmética básica más difíciles de comprender para los estudiantes, pues la multiplicación pierde propiedades que tenía en los naturales y que fueron implícita o explícitamente estudiadas a lo largo de varios años, sobre todo el hecho de ser una transformación que «agranda», y que se puede interpretar como una suma repetida. Por ello, se propone un conjunto amplio de actividades en el que la noción de multiplicación por fracciones y decimales se «estudia» desde distintos flancos, durante varios años de la educación básica.

En este capítulo se incluyen los siguientes aspectos:

- la multiplicación de fracciones en el contexto de la proporcionalidad;
- la multiplicación de fracciones y decimales en el cálculo del área del rectángulo;
- la división de fracciones y decimales.

El orden de los contenidos en la presente obra no es el orden de enseñanza

El orden en que se presentan los distintos aspectos de las fracciones en los dos volúmenes de esta obra, no es el orden en que se estudian en la escuela.

En cada capítulo hay aspectos que se pueden ver en distintos grados de la primaria y de la secundaria. En la siguiente tabla se presenta una relación de los temas que se abordan en cada capítulo con su posible estudio en los distintos ciclos escolares.

Una ruta posible para estudiar los números racionales durante la educación básica

Volumen I	**3º – 4º (primaria)**	**5º – 6º (primaria)**	**7º – 9º (secundaria)**
Capítulo 1 Las fracciones y la medida	Fracciones $\frac{m}{2^n}$ para medir (longitud, superficie, peso). Relación parte todo. Recta numérica. Equivalencia, orden, suma.	Lo mismo que en 3º – 4º, pero con fracciones de cualquier denominador.	Recta numérica. Densidad. Cambios de unidad y Cambios de notación.
Capítulo 2 Los decimales y la medida		Fracciones decimales para medir. Expresión decimal aplicada en medidas de longitud, área, peso.	Además de lo que se ve en 5º-6º (casillero de la izquierda): recta numérica, densidad, cambios de unidad, cambios de notación.

Volumen II	3º – 4º (primaria)	5º – 6º (primaria)	7º – 9º (secundaria)
Capítulo 1 Las fracciones y la división	Repartos entre 2n. Repartos entre 3. Resultados distintos pero equivalentes de un mismo reparto. (Tema 1)	Algoritmo «a unidades entre $b = \frac{a}{b}$ de unidad». Divisiones de otras magnitudes. (Tema 2)	Dos definiciones explícitas: como partes de unidad y como cocientes. (Temas 2 y 3)
Capítulo 2 Las fracciones en el papel de razones		Se comparan razones, sin fracciones. Problemas de cuarta proporcional sin fracciones. (Tema 1)	Se expresan razones con fracciones, en situaciones de comparación y de cuarta proporcional. (Temas 1 y 2)
Capítulo 3 El operador multiplicativo (fraccionario y decimal)		Se *aplican* operadores fraccionarios sencillos en situaciones de proporcionalidad.	La fracción «$\frac{a}{b}$ de», como multiplicación $\times \frac{a}{b}$. La relación $1 \rightarrow \frac{a}{b}$ como multiplicación $\times \frac{a}{b}$ El área de rectángulo de dimensiones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ como multiplicación. La división, como inversa de la multiplicación.

Además, en los capítulos se indica para qué grados pueden ser adecuadas las actividades que se proponen, o las recomendaciones que se hacen. En el volumen II hay actividades que son exclusivamente para el nivel de secundaria. Para facilitar la detección del nivel recomendado, en ese volumen se utilizan los indicadores «Primaria», «Secundaria» o «Primaria y Secundaria».

Los tipos de actividad, la estructura del libro, las distintas secciones

Para facilitar el estudio de temas de matemáticas y de su didáctica, en los dos volúmenes de esta serie se optó por un formato que alterna numerosas actividades diseñadas para profesores, con información práctica y teórica sobre los aspectos que son motivo de estudio. Las actividades son de muy diversa índole: se plantean problemas de matemáticas, se analizan lecciones para alumnos de primaria y de secundaria, se revisan programas escolares, se analizan producciones de alumnos y fragmentos de clases. Cabe señalar que una gran parte del material que se presenta es producto de investigaciones en el tema.

Casi todas las actividades (ejercicios, problemas, u otras) se presentan con las respuestas o soluciones, ya sea después de la actividad, o bien en el solucionario que se incluye al final de cada volumen. En la versión digital se puede consultar la respuesta haciendo click en la etiqueta SOLUCIONARIO. Así mismo, para regresar del solucionario al texto, basta con dar un click al título de la actividad que se consultó en el solucionario.

Casi todas las actividades pueden ser adaptadas para implementarse en el aula, con los alumnos, además se sugiere llevar a cabo algunas, y si es posible, compartir la experiencia con otros docentes, como parte del proceso de estudio. Estas actividades vienen señaladas con la leyenda AULA.

Hay algunas secciones en algunos capítulos en los que se ofrece una profundización, casi siempre sobre algún aspecto de matemáticas. Se señala con la etiqueta PROFUNDIZACIÓN. Los lectores pueden abordar estas secciones en el momento en que las encuentren, o dejarlas para una ocasión posterior.

¿Cómo estudiar el contenido de esta obra?

Esta obra se elaboró en forma de un taller, con numerosas actividades. Es, por lo tanto, un libro en el que se alternan los momentos de leer y resolver, y a veces también momentos de implementar en clase, observar y tomar notas.

Aunque se puede estudiar de manera individual, se recomienda hacerlo en grupo, al menos con un colega. De esta manera la experiencia se puede enriquecer significativamente al permitir entablar discusiones, hacer comparaciones de procedimientos y resultados, realizar actividades en colectivo (los juegos, por ejemplo).

Puede haber partes de la obra que le parezcan difíciles, se le recomienda que las deje pendientes, continúe con la actividad siguiente, o incluso el tema siguiente, y más adelante regrese a esas actividades, o regrese a ellas cuando pueda hacerlas con algún colega. Con los conocimientos que usted tiene, podrá abordar los distintos capítulos en cualquier orden.

Confiamos en que su viaje a través de los cinco capítulos, le resultará útil para llevar a cabo sus clases sobre fracciones y decimales; para analizar las conexiones entre estos y otros temas del currículo; para evaluar y adaptar las propuestas que se hacen en los diferentes materiales, oficiales o de editoriales privadas; para diseñar usted mismo actividades; y para analizar las producciones de los alumnos, sus errores, dificultades y logros. Esperamos también que disfrute la experiencia de estudiarlo, al descubrir otras facetas poco conocidas del tema, y maneras gratificantes «de hacer matemáticas».

Capítulo 1.
Las fracciones y la medida

La fracción $\frac{4}{3}$ tiene algo que es imposible, y eso es que, de 3 partes, se sombrean 4.[7]

¿Cómo medir una longitud si la unidad de medida no cabe un número entero de veces en ella? Las fracciones ofrecen una solución a este problema mediante el recurso de subdividir la unidad de medida en partes iguales. Permiten decir, por ejemplo, «la tabla mide $1\frac{3}{4}$ de metro», «la pieza de carne pesa $\frac{1}{4}$ de kilogramo», «la cantidad de perfume es de $\frac{25}{1000}$ de litro».

En este capítulo estudiaremos el significado clásico de las fracciones como partes de unidad, que subyace a las expresiones anteriores. La pieza clave de este significado son las fracciones unitarias, es decir, fracciones con numerador igual a 1 como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}\ldots$

La fracción unitaria $\frac{1}{n}$ se define como la parte que, repetida n veces es igual al entero, o bien, como la parte que resulta de partir un entero en n partes iguales. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ es la parte que repetida 4 veces es igual al entero (ver figura 1).

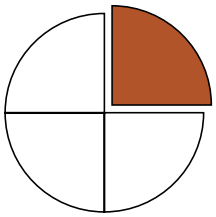


Figura 1. Representación de $\frac{1}{4}$

Las fracciones no unitarias se definen como sumas de fracciones unitarias. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de unidad es 3 porciones de $\frac{1}{4}$ cada una (ver figura 2).

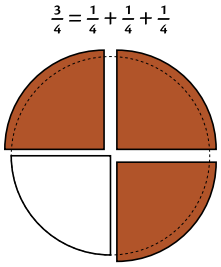


Figura 2. Representación de $\frac{3}{4}$

Esta definición, a la que llamaremos «definición de la fracción como partes de unidad», es la que prevalece en la enseñanza en la educación básica, y en los usos de las fracciones en la vida cotidiana para medir. Más adelante[8] veremos que las fracciones se pueden definir también de otras maneras.

Con esta definición (partes de unidad), y en el contexto de la medición, estudiaremos los siguientes aspectos de las fracciones:

- la equivalencia, el orden y la densidad;
- la representación en la recta numérica;
- la adición y la sustracción, incluyendo cálculo mental.

Actividad introductoria

Para entrar en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, se propone la siguiente actividad, que consiste en analizar, a través de ejemplos reales, algunos errores típicos de los alumnos.

A un grupo de alumnos que cursaban su último año de primaria en una escuela francesa, se les pidió que expresaran dudas o ideas que tuvieran sobre las fracciones y que les parecieran interesantes de compartir con sus compañeros (Sensevy, 1996). A continuación, se presentan algunas de sus respuestas.

Lea las respuestas y coméntenlas con sus compañeros. ¿Sus alumnos han tenido dudas semejantes? ¿Recuerdan otras?

Comentarios de los alumnos:

- alumno 1: *La fracción $\frac{4}{3}$ tiene algo que es imposible, y eso es que de 3 partes, se sombrean 4.*
- alumno 2: *Entendí más o menos las fracciones, pero aún no logro comprender por qué escogieron $\frac{3}{4}$ en lugar de $\frac{4}{3}$.*
- alumno 3: *Cuando se invierte el numerador y el denominador de una fracción, ¿se obtiene el mismo número?, ¿por qué?*

Dudas y errores como los anteriores ponen de manifiesto lagunas de los alumnos en la comprensión de las fracciones. Es inevitable que surjan durante el aprendizaje, pero son más frecuentes y duraderas cuando la enseñanza se centra en las reglas y técnicas convencionales, con poco apoyo en contextos y problemáticas que aporten significación.

Tema 1. Medición

En este tema se estudia uno de los problemas que están en el origen de las fracciones: determinar una medida cuando la unidad que se usa no cabe un número entero de veces en lo que se quiere medir.

AULA Primaria

Actividad 1.1
Comunicar una medida: los listones

La siguiente actividad consiste en escribir un mensaje para otra persona, de manera que con esa información ella pueda construir un listón de determinado tamaño. La actividad fue diseñada para alumnos de quinto y sexto grados de primaria. Se le sugiere que, para conocerla mejor, la aplique a dos personas, alumnos, o colegas.

Primera parte: a jugar

Organización

Se trabaja en equipos de cuatro personas. Cada equipo se subdivide en 2 parejas «asociadas», la A y la B.

Nota: Si solamente hay dos jugadores, uno será jugador A y el otro B. Las instrucciones que siguen se dan considerando equipos de 4.

Material

Para cada pareja A y para cada pareja B:

- un cuarto de hoja blanca, lápiz y tijeras;
- una «tira unidad» (U) y uno de los «listones» (tiras de cartoncillo) a, b, c, d, e, que aparecen en la figura 3 (previamente, los listones deben recortarse de manera que midan la fracción de unidad que se indica; dicha fracción no debe comunicarse a los participantes; el listón que se entregue a una pareja debe ser diferente al de su pareja asociada);
- una tira de cartoncillo de aproximadamente medio metro por 2 o 3 centímetros de ancho, para recortar (de preferencia de un color distinto a las anteriores, puede ser blanco);
- atención, la regla graduada está prohibida.

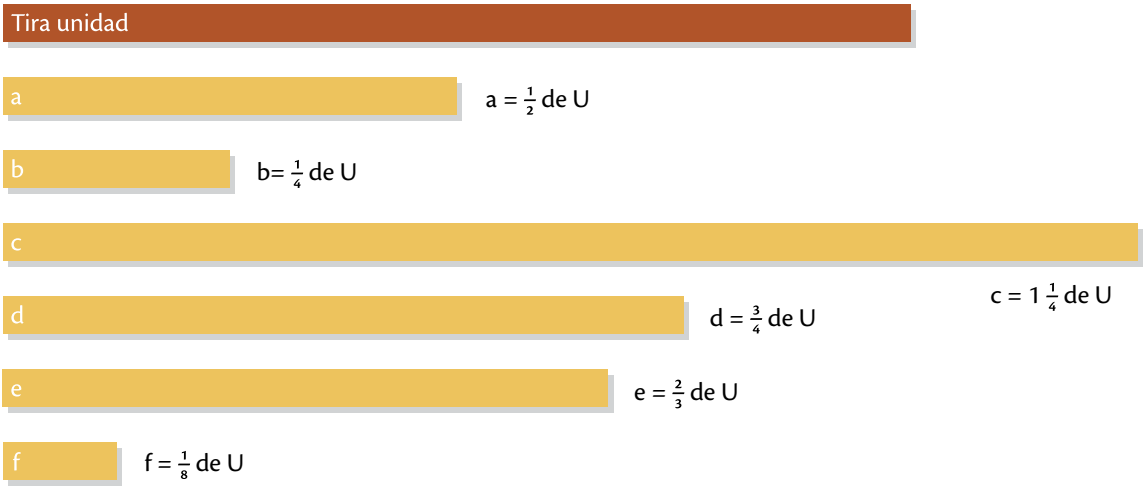


Figura 3. Tiras para calcar y recortar

Desarrollo

Primer momento. Organización

- Se forman las parejas A y B y se ubican en el salón, las parejas A deben sentarse lo más lejos posible de sus parejas asociadas B para que unas no alcancen a ver el listón de las otras.

- Se entrega a cada una la tira unidad, una de las tiras (a, b, c, d, e) a las que llamaremos «listones», una tira larga para recortar, y la hoja para escribir el mensaje. No deben decirse las fracciones que miden los listones.

Segundo momento. Se explica en qué consiste la actividad

- «Cada pareja debe escribir un mensaje que se pueda decir por teléfono, es decir, un mensaje claro, breve y sin dibujos en su pedazo de hoja blanca, con la información necesaria para que su pareja asociada pueda recortar un listón del mismo tamaño que el de ustedes.»
- «No se puede usar regla graduada.»
- «Si lo desean, pueden utilizar la tira unidad (se muestra cuál es y se enfatiza que todas son del mismo tamaño)».
- «Al final, van a sobreponer el listón que construyeron con el de su pareja asociada. Las dos parejas ganan si logran que los listones sean del mismo tamaño».

Tercer momento. Se elaboran los mensajes

- Cada integrante debe anotar su nombre en el mensaje.

Cuarto momento. Se intercambian los mensajes

- Se intercambian los mensajes entre las parejas A y B.
- Cada pareja construye el listón indicado en el mensaje que recibe y anota su nombre.

Quinto momento. La verificación

- Cada pareja compara el listón que hizo con el de su pareja asociada, superponiéndolos.
- Si el grupo no es muy numeroso, hasta cuatro o cinco equipos, pueden pasar al frente, pareja por pareja, para hacer la comprobación delante de todos. De lo contrario, es mejor que ambas parejas realicen la verificación en sus lugares.

Sexto momento. La puesta en común

- El docente puede decidir de antemano qué mensajes revisar y discutir públicamente. En este momento conviene que los alumnos vean:
  - Mensajes exitosos que echaron mano del recurso que se quería propiciar, es decir, subdividir la tira unidad.
  - Se puede incluir un mensaje que fue exitoso, a pesar de no haber acudido al procedimiento que se quería propiciar, por ejemplo, uso de unidades extra como el ancho de un dedo.
  - Uno o dos mensajes que no funcionaron. Aquí será necesario analizar qué falló, si fue un problema de la pareja emisora del mensaje o de quienes lo interpretaron.

Séptimo momento. La institucionalización

- Al final de la actividad, se destaca el fraccionamiento de la unidad como una buena manera de resolver este problema. El recurso a unidades de medida adicionales (como el pulgar) es bueno también, pero tiene la limitación de que no es seguro que los receptores del mensaje tengan esas unidades del mismo tamaño.

Si aplica la actividad con sus alumnos, se recomienda repetirla al menos una vez más para permitirles que, una vez comprendido de qué se trata, puedan mejorar sus procedimientos.

Segunda parte: analizar

Para analizar la situación didáctica anterior conteste las preguntas que se plantean a continuación. La información que se da después de las preguntas, en el apartado de «Características de la situación didáctica de comunicación de medidas», le ayudará a completar su propio análisis. Además, en el solucionario encontrará la respuesta a una de las preguntas.

a) Esta situación puede abordarse sin tener conocimientos explícitos de fracciones. Explique con qué procedimientos podría abordarse.
b) ¿Cómo se sabe si el mensaje elaborado fue bueno o no? ¿Cómo se sabe si el listón fabricado fue del tamaño correcto? Es decir, ¿cómo se validan las producciones?
c) ¿Qué aspectos de las fracciones se ponen en juego con la situación?
d) ¿Qué se necesita saber para poder jugar? ¿Qué se puede aprender?
e) Compare la dificultad para reproducir los siguientes tres listones: A de $\frac{2}{5}$ de unidad, B de $\frac{1}{3}$ de unidad y C de $\frac{1}{4}$ de unidad. ¿Considera que el grado de dificultad es el mismo para los tres listones o hay diferencias? SOLUCIONARIO

Características de la situación didáctica de comunicación de medidas

- La situación anterior es una situación de comunicación: un equipo tiene cierta información (la longitud del listón) y debe comunicarla a otros para que estos puedan elaborar un listón del mismo tamaño.
- Como se vio, la situación se puede realizar sin tener todavía el conocimiento que se quiere enseñar (es decir, sin conocer las fracciones). Se puede abordar, por ejemplo, doblando la tira unidad en mitades sucesivas, o usando unidades extra para medir, como el ancho de un dedo. Si se repite la situación varias veces, se puede propiciar un acercamiento al conocimiento que interesa, en este caso, el uso de fracciones de unidad.
- Para saber si una tira construida es del tamaño correcto o no, basta con superponerla sobre la original. Esto también permite saber si los mensajes funcionaron o no. Es decir, la situación permite validar los resultados. Sin embargo, hay que precisar que tal validación no siempre tiene la consecuencia deseada, ya que puede ocurrir que

un buen mensaje no se traduzca en un «listón» del tamaño adecuado, o, al revés, que un mensaje basado en un recurso que no interesa promover (como el de usar pequeñas unidades improvisadas), funcione bastante bien. Por ello, es necesario que haya, además de la validación empírica, un momento de análisis colectivo en el que el profesor destaque algunas ventajas del doblado de la unidad como recurso para medir.

- Debido a que el doblado a la mitad, la mitad de la mitad, etc., es el primer recurso que suele ponerse en juego, las réplicas de esta situación podrían llevar al uso de fracciones de denominador 2, 4, 8, etc., es decir, fracciones del tipo $\frac{m}{2^n}$. Estas son las fracciones con las que se sugiere trabajar cuando se inicia el estudio de las fracciones (en México, actualmente esto ocurre en tercer grado de primaria).
- Una vez que los alumnos empiecen a usar los dobleces a la mitad de manera sistemática, se pueden introducir los nombres de algunas fracciones y sus escrituras simbólicas, en particular $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. El docente puede destacar que algunas parejas de alumnos plegaron la tira en 2 partes, y preguntarles si saben cómo se llaman las partes que se obtienen y cómo se escriben con números. Si ellos no lo saben, él lo dice: cada parte se llama «la mitad de la unidad» y se escribe «$\frac{1}{2}$»; enseguida, les hace ver que si vuelven a plegar esa mitad en 2 partes, entonces la tira queda plegada en 4 pedazos y cada uno se escribe «$\frac{1}{4}$» y se llama «un cuarto de la unidad».
- Si en la actividad aparecen mensajes en los que una fracción unitaria, como $\frac{1}{4}$, se itera, por ejemplo, «dobla la tira en dos y luego cada pedazo en dos; mi listón es del tamaño de tres pedazos de esos», este puede ser un buen momento para introducir la escritura de una fracción no unitaria ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ se puede escribir $\frac{3}{4}$).

Situaciones para la construcción de nuevos conocimientos

En resumen, la situación de comunicación de longitudes que hemos visto aquí, reúne características didácticas que favorecen la construcción de un conocimiento al resolver un problema, principalmente dos, que son:

- plantea un problema que implica al conocimiento que interesa (fraccionar la unidad para medir) y que puede abordarse cuando aún no se tiene dicho conocimiento;
- permite verificar por uno mismo si las soluciones que se obtienen son correctas o no, es decir, si la longitud de la tira construida fue adecuada o no.

En la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), a las situaciones con estas características se les llama «situaciones adidácticas». El prefijo «a» indica que la guía del docente se puede desvanecer gracias a que el alumno puede relacionarse con mayor autonomía con el problema, e ir tomando decisiones.

Cabe destacar que una situación de este tipo requiere de un problema adecuado, es decir, principalmente con las dos características mencionadas arriba.

Tema 2. El conjunto de fracciones con denominador potencia de 2 (2, 4, 8,16...)

El conjunto de fracciones del tipo $\frac{m}{2^n}$ (por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{16}$) es al que acuden los alumnos espontáneamente en diversas circunstancias, en particular, al medir y al repartir. A continuación, se analiza una situación de medición en la que intervienen dichas fracciones. En el capítulo 1 del volumen II se analizan otras más, en la problemática del reparto.

Actividad 1.2
Medir con fracciones del tipo $\frac{m}{2^n}$, comparar, sumar y restar

Se sugiere que lleve a cabo en su grupo de alumnos (de tercer grado a sexto de primaria) una situación que implique el uso de fracciones del tipo $\frac{m}{2^n}$ ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}$...) para expresar medidas y que impliquen hacer una anticipación y una verificación con material.

A continuación, se dan algunas opciones. Las actividades a y b son introductorias, así que se recomienda llevarlas acabo y, además, otra de las siguientes.

a) Pedir a los alumnos que midan longitudes de objetos que se encuentran en el salón, usando un conjunto de tiras para medir, formado por una tira, $\frac{1}{2}$ tira, $\frac{1}{4}$ de tira y $\frac{1}{8}$ de tira, (pueden ser las de la actividad anterior) y que hagan un registro de las medidas obtenidas. Posteriormente comparar entre ellos las medidas. Por último, de manera grupal, analizar las escrituras e identificar algunas equivalencias, por ejemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{2}$.
b) Construir una «Regla graduada con fracciones para medir», en la que una tira de cartoncillo que será la unidad (de aproximadamente un metro) esté dividida en medios, cuartos y octavos. Luego, usarla en una actividad como la anterior, para medir longitudes de objetos.
c) Anotar en el pizarrón las medidas de dos segmentos, por ejemplo, $1\frac{1}{2}$ de unidad y $\frac{5}{4}$ de unidad. Se trata de que los alumnos **anticipen** cuál de los dos segmentos es más largo (sin dibujarlos aún); pedirles que argumenten sus respuestas. Después, para verificar, pedirles que tracen en el piso los segmentos usando un sistema de tiras para medir como el de la actividad **a**, o una regla como la de la actividad **b**.

   Los alumnos podrían hacer un razonamiento como el siguiente.

   «Con 4 de los 5 cuartos, se puede armar una tira y queda aún un cuarto. Y la otra medida es 1 tira y media, y media tira es más larga

que $\frac{1}{4}$ de tira, ya que de estos (los cuartos) necesito 4 para armar la tira y con medios, con 2 ya pude armar la tira».

d) En una actividad similar a la anterior, se anotan las medidas de dos tiras, por ejemplo, A = $\frac{1}{2}$ de unidad y B = $\frac{3}{4}$ de unidad, pero ahora se debe anticipar cuánto mide la tira que se forma al unir esas dos tiras…

Para anticipar, los alumnos podrían hacer un razonamiento como el siguiente:

«Con 2 cuartos de la tira B, se tiene la mitad de una unidad; esa mitad, junto con la mitad (A), forman una primera unidad completa, y sobra todavía un cuarto de B».

Al final, se pueden analizar maneras de escribir con números las relaciones que se establecieron, por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{ y } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \text{ Y el resultado } 1 + \frac{1}{4}$$

e) Dada una fracción de unidad, se trata de obtener otras que correspondan a la misma medida, como $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$

Anticipar, verificar empíricamente, y también semánticamente

Las actividades anteriores consisten en anticipar relaciones entre fracciones (en su papel de medidas de longitud) y luego verificarlas empíricamente, usando, por ejemplo, «la regla con fracciones» (como la que se indica en la actividad **b**). Al verificarlas de esa manera, se tienen dos ganancias: 1) Los alumnos tienen que interpretar la fracción para hacer la longitud; por ejemplo, se espera que sepan, y si no lo saben, que aprendan, que para hacer una longitud de $1\frac{3}{4}$, pueden marcar una unidad

completa, y después tres veces una de $\frac{1}{4}$ de unidad (o usar la graduación de su regla de fracciones, si tiene señalado el $\frac{3}{4}$); 2) Al hacer la verificación, sabrán por sí mismos si su anticipación fue correcta o no.

Es importante que, antes de validar empíricamente su resultado, los alumnos justifiquen en voz alta su anticipación, es decir, empiecen a hacer lo que se llama una «validación semántica», con argumentos. Se les puede preguntar, por ejemplo: «¿por qué piensas que esa tira va a ser más grande?». Para justificar, los alumnos tienen que hacer el ejercicio de explicitar lo que pensaron, y de esta manera, lo clarifican y además comparten con los demás.

Por ejemplo, en la suma $\frac{1}{2}$ de unidad + $\frac{3}{4}$ de unidad, si se propone 2 unidades como resultado, los alumnos podrían cuestionarlo al señalar que si ninguna de las dos tiras mide 1, no es posible que juntas midan 2; si se propone 1 unidad, podrían cuestionar que, siendo $\frac{3}{4}$ más grande que $\frac{1}{2}$, al pegarse a $\frac{1}{2}$ debe rebasar la unidad. Finalmente, podrían decir que «dado que $\frac{3}{4}$ es $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, al juntar los dos medios se obtiene un entero, por lo tanto, la nueva tira debe medir 1 $\frac{1}{4}$ de unidad». Por supuesto, si para todos ya es obvio cuál es el resultado y por qué, la validación empírica ya no es necesaria.

Fracciones menores y mayores que la unidad

Una ventaja del contexto de medición es que da sentido a fracciones más grandes que la unidad, como las usadas en el juego de los listones de la Actividad 1.1. Procure utilizar esas fracciones con frecuencia en sus actividades.

Tema 3. Fracciones de otras magnitudes

El trabajo con las medidas fraccionarias de longitud debe complementarse con el de otras magnitudes tales como la superficie, la capacidad, el peso y el tiempo. Nos detendremos sobre todo en la superficie, pues esta magnitud, al hacer posible representar una misma fracción de diferentes formas, permite problematizar de nuevas maneras los aspectos que estamos estudiando.

Actividad 1.3
Análisis de lecciones de un libro de texto de tercer grado

A continuación, va a analizar tres lecciones de un libro de texto de tercer grado de primaria sobre las fracciones en el papel de medidas (ver las figuras 4, 5, 6 y 7).

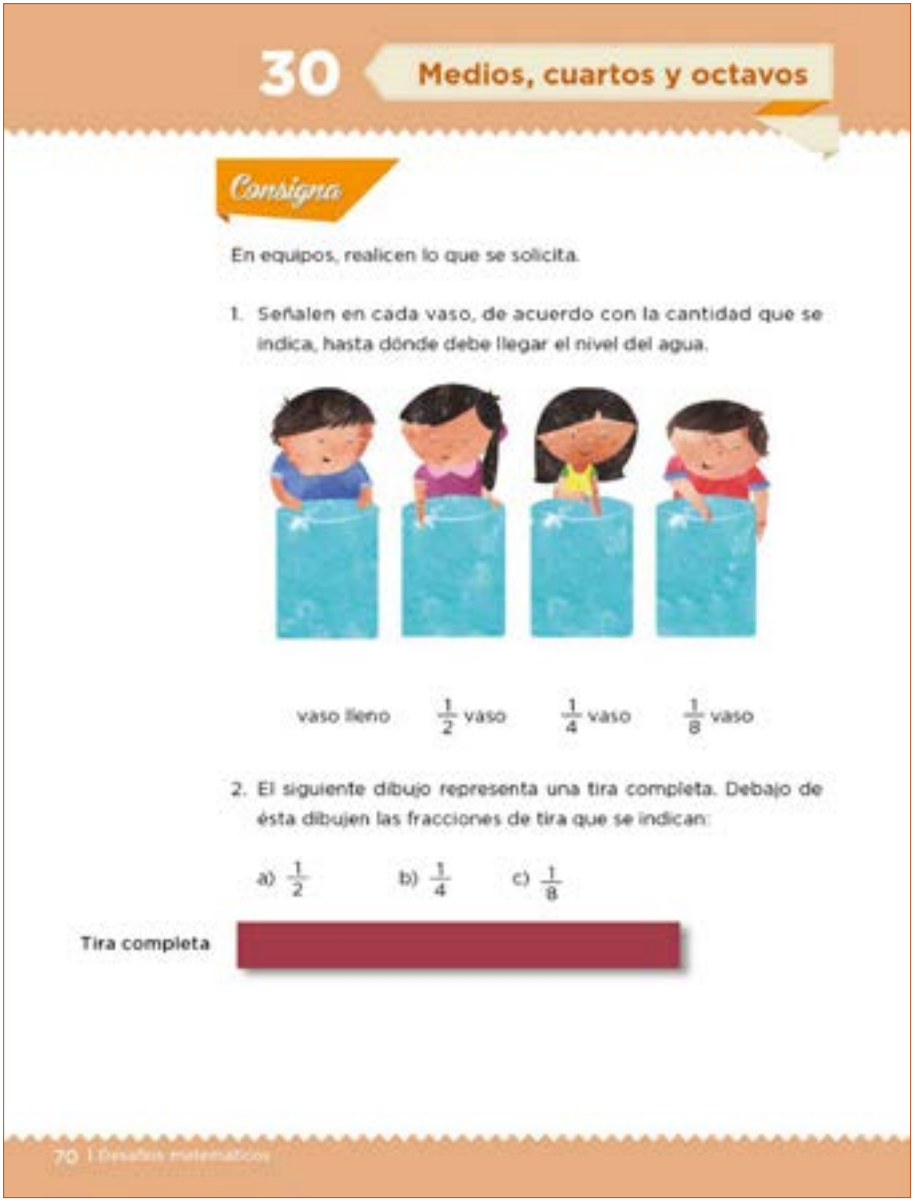
a) Identifique en las lecciones: 1) las magnitudes que entran en juego en las diferentes actividades, y 2) los tipos de tarea. SOLUCIONARIO

Por ejemplo, en la lección 30:

- las magnitudes en juego son capacidad y longitud;
- en las actividades 1 y 2 hay dos tipos de tarea, representar gráficamente distintas fracciones (1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$) de un vaso, en la actividad 1, y fracciones de una tira en la actividad 2;
- en las actividades, 3, 4 y 5 hay otro tipo de tarea: averiguar cuántas veces cabe una cierta medida ($\frac{1}{4}$ ℓ, $\frac{1}{2}$ ℓ, $\frac{1}{8}$ m) en otra mayor (3 ℓ, 10 ℓ o 4 m); esta tarea también puede describirse como medir una cierta cantidad (3 ℓ, 10 ℓ o 4 m) de líquido o longitud con una cierta unidad de medida dada ($\frac{1}{4}$ ℓ, $\frac{1}{2}$ ℓ, $\frac{1}{8}$ m). Puede ver más ejemplos en el solucionario.

b) Identifique algunas variables didácticas[9] de las actividades de la lección 32 que consisten en sombrear fracciones de figuras, y

viceversa, en determinar la fracción que corresponde a la parte sombreada. SOLUCIONARIO



30 Medios, cuartos y octavos

Consigna

En equipos, realicen lo que se solicita.

1. Señalen en cada vaso, de acuerdo con la cantidad que se indica, hasta dónde debe llegar el nivel del agua.

vaso lleno $\frac{1}{2}$ vaso $\frac{1}{4}$ vaso $\frac{1}{8}$ vaso

2. El siguiente dibujo representa una tira completa. Debajo de ésta dibujen las fracciones de tira que se indican:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$

Tira completa

70 | Desafíos matemáticos

Figura 4. Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado. Lección 30 (Parte I), SEP, 2017, p. 70.

3. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ de litro se pueden llenar con 3 litros de leche?

4. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{2}$ de litro se pueden llenar con la siguiente cantidad de agua de naranja?

5. ¿Cuántos pedazos de $\frac{1}{8}$ de metro se pueden cortar de 4 metros de cable?

Figura 5. Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado. Lección 30 (Parte II), SEP, 2017, p. 71

31 Con el metro

Consigna 1

En parejas, realicen lo que se solicita.

1. Elaboren tiras de papel de 1 metro, $\frac{1}{2}$ de metro, $\frac{1}{4}$ de metro y $\frac{1}{8}$ de metro. Utilicen los materiales que se les proporcionaron.
2. En grupo, expliquen cómo construyeron cada una de las tiras con las medidas indicadas.

Consigna 2

En equipos, utilicen las tiras para hacer lo siguiente.

a) ¿Cuánto creen que mida la orilla del piso del salón?

_____

b) Usen las tiras para medirla y anoten el resultado.

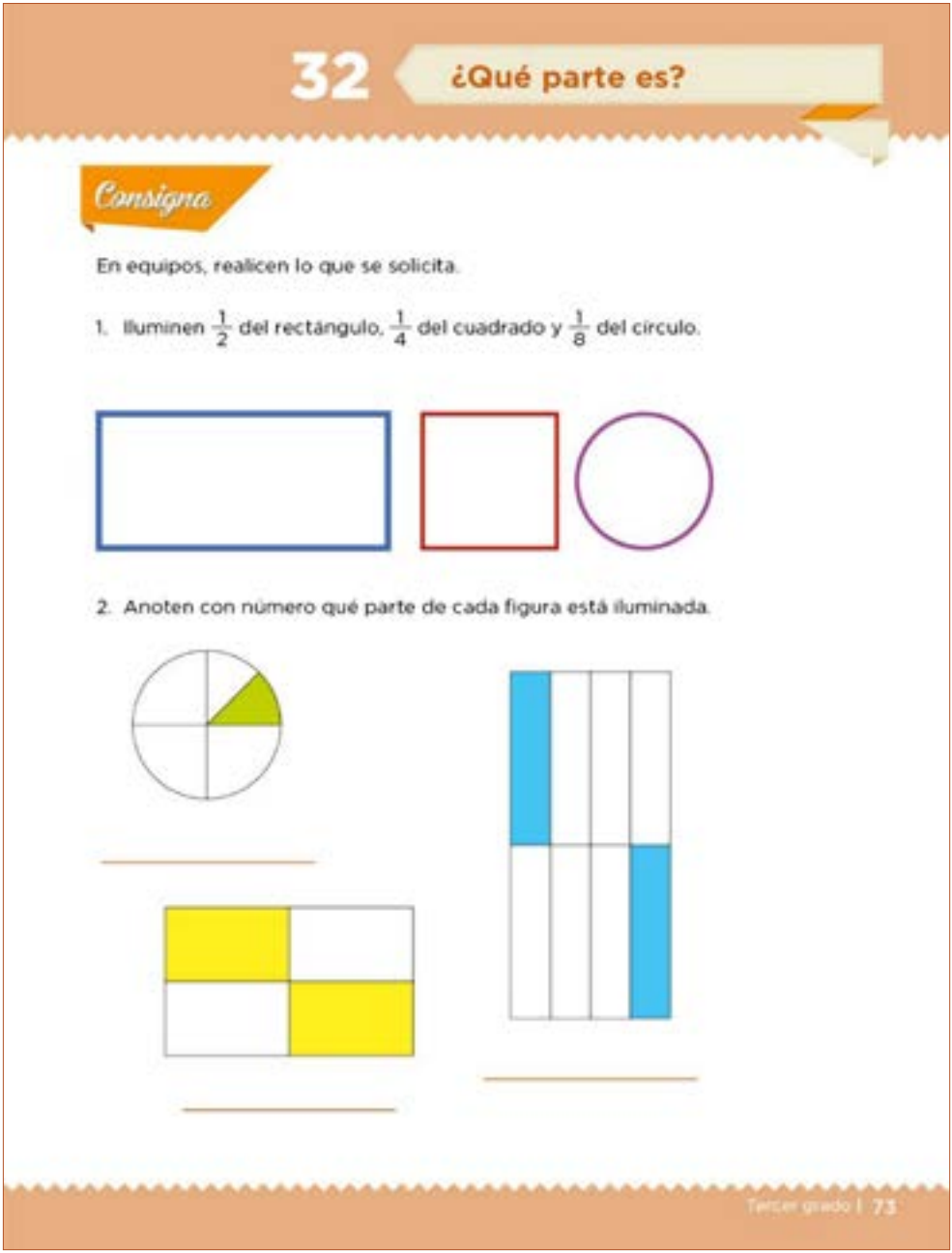
_____

c) Busquen dentro o fuera del salón algo que mida más de 4 metros, pero menos de 5. Anoten qué midieron y su medida.

_____

72 | Desafíos matemáticos

Figura 6. Desafios matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado. Lección 30, SEP, 2017, p. 72



32 ¿Qué parte es?

Consigna

En equipos, realicen lo que se solicita.

1. Iluminen $\frac{1}{2}$ del rectángulo, $\frac{1}{4}$ del cuadrado y $\frac{1}{8}$ del círculo.

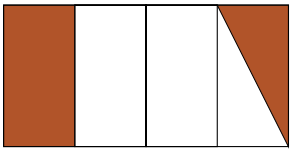
2. Anoten con número qué parte de cada figura está iluminada.

Tercer grado | 73

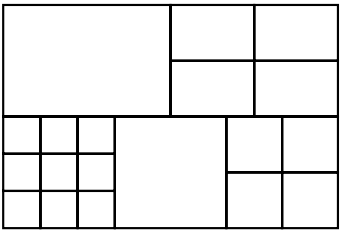
Figura 7. Desafios matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado. Lección 30, SEP, 2017, p. 73

Actividad 1.4
Algunas variantes del tipo de tarea «sombrear la figura»

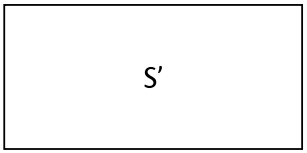
Resuelva las siguientes actividades. Son variantes de la tarea de «sombrear la figura». Después, destaque para cada una la característica didáctica que le parezca relevante. SOLUCIONARIO



a) ¿Qué fracción está sombreada?



b) Coloree distintas partes del rectángulo (puede unir partes) y anote las fracciones correspondientes.[10]



c) La superficie siguiente, S', es $\frac{2}{3}$ de otra superficie S. Dibuje la superficie S.

¿Hay solamente una respuesta correcta? Si su respuesta es «sí», justifique su respuesta, y si es «no», proporcione ejemplos de otras respuestas correctas.

Llamaremos a esta actividad «Reconstruir el entero». En el solucionario se destaca su interés didáctico.

d) Vuelva a dibujar la superficie S, considerando ahora que S' es $\frac{4}{3}$ de S.

Actividad 1.5
¿Cuáles son mitades?

Cuesta trabajo creer que decidir si una parte de algo es o no la mitad pueda dar lugar a dudas y debate. A continuación, se presenta un episodio de una experiencia en la que se entregaron a alumnos de un grupo de tercer grado de primaria, pedazos de hojas de papel para que ellos decidieran cuáles eran mitades de una hoja completa[11] (ver la figura 8). Lea los fragmentos y conteste las preguntas. La consigna fue la siguiente.

«Vamos a entregar a cada equipo un pastel entero y varios pedazos. Se trata de que ustedes nos ayuden a escoger todos los que son mitades.»

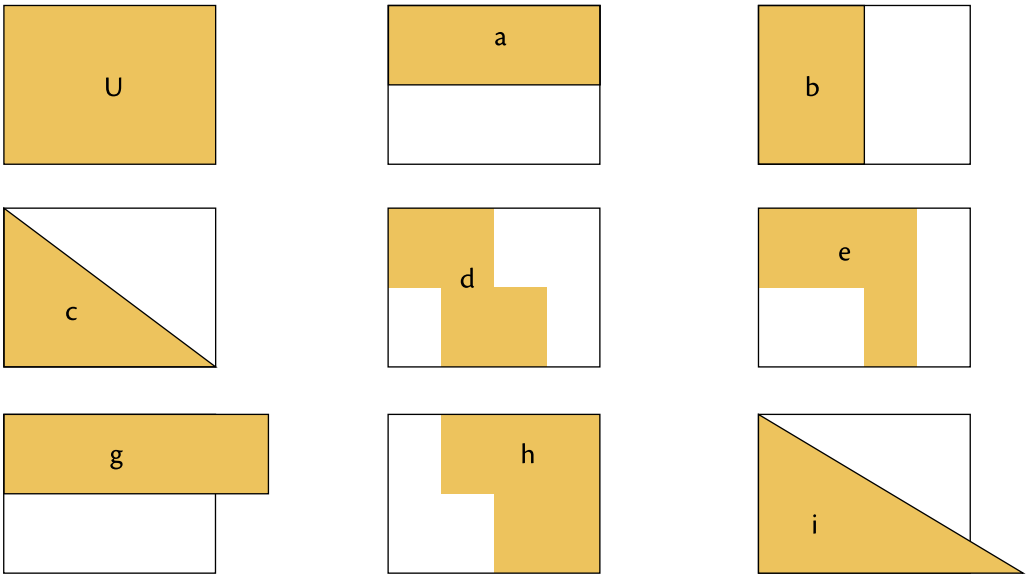


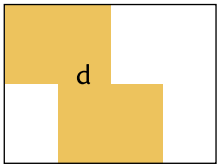
Figura 8. Situación didáctica: ¿Cuáles son mitades?, Block, 2007, pp. 66 y 67.

Se entregó a cada equipo (de cuatro niños) un juego con la hoja entera y los pedazos (ver figura 8).

a) ¿Qué procedimientos distintos prevé que podrían desarrollar los alumnos en cada caso? ¿Qué respuesta darían? ¿Qué casos serían los más difíciles y polémicos?

El pedazo que resultó más problemática y dio lugar a un debate interesante entre los alumnos fue el **d**. A continuación, se reproducen fragmentos de la discusión en la puesta en común.

Pedazo (d)



Equipos	1	2	3	4	5	6	7	8
Respuestas (es mitad)	sí	sí	no	no	no	no	no	x

Pasa un alumno del equipo 2 con dos pedazos en la mano (**d** partido en dos), los superpone sobre U y muestra así que (**d**) es mitad.

Los alumnos se sorprenden mucho (5 equipos contra 3 pensaron que el pedazo d no era la mitad de la hoja). Algunos están perplejos, otros protestan, un niño exclama: «*Pero no es la misma figura*». El maestro les pregunta si se ve de dónde salieron los dos pedazos, los alumnos ya no atienden. Están excitados, se arremolinan alrededor del niño que hizo la prueba.

Un niño se acerca al observador y le dice que ese pedazo no puede ser mitad porque «*se forman tres mitades*» (nuevamente se refiere a las secciones en que queda dividida la hoja entera cuando se superpone el pedazo **d**).

Una niña insiste varias veces que, recortando el pedazo, «*no es lo mismo*». Después agrega que «*recortando, todo sería mitad*».

Otra niña dice: «*Está mal recortado, pero bien recortado sí sería mitad*». El maestro toma un pedazo (**d**) y lo parte a la mitad frente a todo el grupo para mostrar la procedencia de las dos partes que se usaron en la prueba.

No se ve muy claro si los niños ya están convencidos. El maestro decide pasar al pedazo siguiente (dice que algunas de sus dudas se aclararán con los demás pedazos).

b) Comente los siguientes argumentos de los alumnos sobre el pedazo **d**.
   - La afirmación de que la parte «*no es mitad porque se forman tres pedazos*». ¿Qué deja ver de la idea de mitad que tiene el alumno?
   - La idea de que «*recortando, todo sería mitad*». ¿Por qué dice eso la niña? SOLUCIONARIO

c) Diga cómo ayudaría a los alumnos a cuestionar que:
   - si las partes no tienen la misma forma, no pueden ser mitades;
   - si la hoja queda dividida en tres partes, ninguna de las partes puede ser la mitad. SOLUCIONARIO

d) Dibuje otra mitad de hoja que tenga las siguientes características:
   - que no tenga la misma forma que la otra mitad;
   - que al superponerla en la hoja, resulten tres partes o más y no dos.

«Las fracciones para expresar cantidades de superficie»

Como pudimos ver, trabajar con fracciones de superficie ayuda a profundizar en varios aspectos básicos de la noción de fracción. Cabe destacar el siguiente: lo que hace que una cantidad de superficie sea $\frac{1}{n}$ de otra cantidad, es que quepa n

veces en ella, no importa si tienen o no la misma forma, y no importa si la cantidad está hecha por un solo pedazo o por varios pedazos.

Actividad 1.6
Diseñar actividades I

Escriba tres actividades en las que las fracciones sean medidas de

a) Capacidad: usar envases de 1 litro, $\frac{1}{2}$ litro; $\frac{1}{4}$ de litro.
b) Tiempo: fracciones de hora.
c) Superficie: Tangram, medir usando diferentes piezas.

Prevea una forma de verificar las respuestas. Si es posible, comparta las situaciones diseñadas con sus compañeros. Para cada actividad, indique para qué nivel escolar son.

Tema 4. Representación de las fracciones en la recta numérica

La recta numérica constituye un recurso valioso para comprender y profundizar en el conocimiento de los distintos números, tanto naturales como fraccionarios. La representación en la recta asocia números a puntos, siguiendo sus propias reglas, distintas a las de la representación gráfica. Por ejemplo, si se quiere representar $\frac{1}{4}$ de un cuadrado dividido en 4 partes iguales, se puede iluminar cualquiera de las partes iguales en que se le dividió. En cambio, en la recta numérica, $\frac{1}{4}$ puede ser ubicado en un único lugar, el que indica que desde el 0 hasta ese punto hay un cuarto de la unidad (ver figura 9).

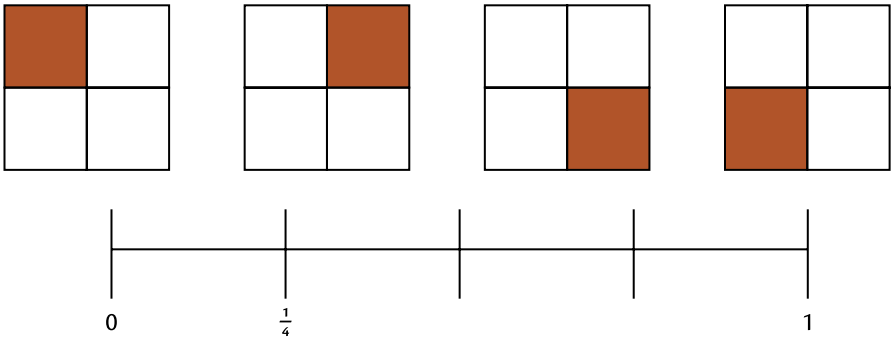


Figura 9: Un cuarto del cuadrado y ¼ en la recta numérica

Representar fracciones —u otros números— en la recta numérica tiene básicamente dos objetivos:

- Profundizar en el significado de las fracciones y, especialmente, en las relaciones entre ellas. Por ejemplo, entre fracciones de distintos denominadores.
- Organizar una imagen mental de la recta con los enteros y fracciones representados y «ordenados». Resulta muy útil para resolver muchos ejercicios y poder estimar, anticipar, etc.

Actividad 1.7
Ubicar fracciones en una recta numérica

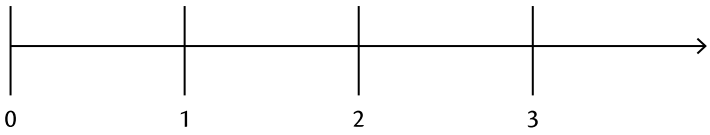
Los problemas que se plantean a continuación tienen el propósito de ayudarlo a: 1) ampliar su conocimiento sobre las fracciones al trabajar con la recta numérica, y 2) analizar el potencial didáctico de la recta para adquirir conocimientos sobre las fracciones. Los problemas son ejemplos de variantes que se pueden plantear, pero no constituyen una propuesta acabada para llevar al aula, pues hay grandes saltos de

dificultad entre ellos. Seguramente, si lo considera pertinente, usted podrá encontrar y diseñar otros ejercicios con distintos niveles de dificultad.[12]

Después de cada uno de los problemas, se incluirá un comentario sobre alguna de sus características o sobre su interés desde el punto de vista didáctico. La redacción de las actividades está dirigida a los alumnos.

a) Indica con una flecha en cuál intervalo se debería ubicar cada fracción. No hace falta señalar el lugar preciso.

$\frac{1}{2}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{10}{9}$ $\frac{11}{5}$ $\frac{10}{4}$ $\frac{20}{10}$



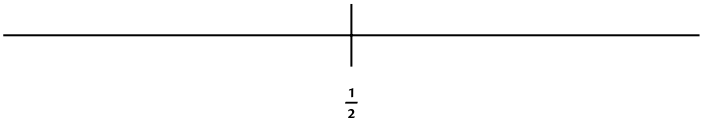
Una recomendación para el uso de la recta numérica

Para ubicar números en la recta, no se requiere una precisión que amerite usar regla graduada. Los números se pueden ubicar de manera aproximada. Lo importante es mantener las relaciones de orden entre ellos y estimar. Ello se logra mediante razonamientos como los siguientes:

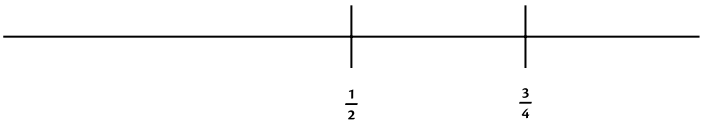
- «$\frac{10}{4}$ es dos y medio, va a la mitad entre 2 y 3, mientras que $\frac{11}{5}$ es 2 y $\frac{1}{5}$, también va entre 2 y 3 pero cerca de 2»;
- «$\frac{3}{4}$ es $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, entonces se traza primero $\frac{1}{2}$ en el punto medio del segmento [0,1] y luego el punto medio del segmento $[\frac{1}{2}, 1]$».
- «Para ubicar $\frac{28}{3}$ no es necesario dividir todos los enteros en tercios hasta llegar a 28. Se puede ver cuántos enteros hay, dividiendo 28 entre 3, son 9 y sobra uno, entonces el resultado es $9\frac{1}{3}$, nada más se subdivide el décimo entero».

De esta manera, asociar números con puntos en la recta se convierte en una actividad que propicia usar propiedades de las fracciones y también ayuda a relacionar fracciones con números naturales.

b) Ubica al cero SOLUCIONARIO



c) Ubica al cero SOLUCIONARIO

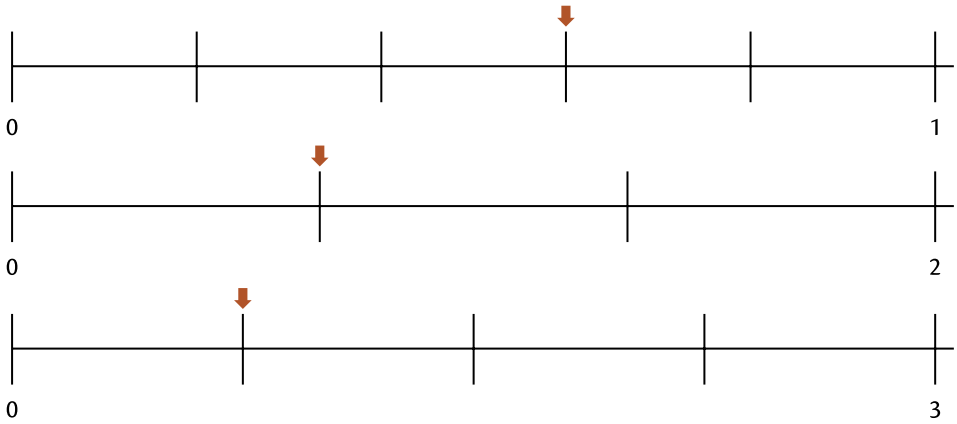


Dos convenciones básicas para representar números en la recta

- Se elige una unidad, a la que corresponde el segmento [0,1]; se gradúa la recta del 1 en adelante, iterando la unidad elegida (es decir, unidades siempre iguales). En algunas actividades, el segmento unidad puede no estar marcado (por ejemplo, en el inciso **c**), pero hay información para determinarlo. Si solamente hay un punto marcado, entonces la unidad no está determinada (como en el inciso **b**). En ese caso, se puede elegir cualquier tamaño de unidad, y luego respetar ese tamaño.
- El número asociado a un punto de la recta corresponde a la cantidad de unidades que entran del cero a ese punto. Por ejemplo, si en un punto está indicado el número 120 significa que desde el 0 hasta ese punto, se pueden contar 120 unidades. Del mismo modo, si en un punto de la recta se encuentra ubicado el número

$2\frac{1}{4}$, significa que desde el 0 hasta ese punto se pueden contar 2 unidades y $\frac{1}{4}$ de la misma. Los números expresan en este contexto medidas de longitud de segmentos.

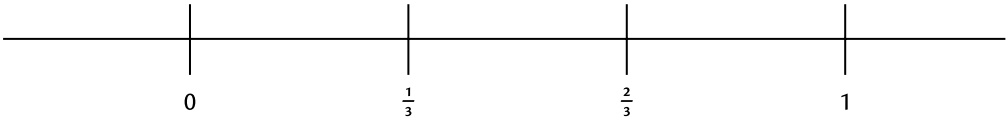
d) ¿Qué número corresponde a la flecha? SOLUCIONARIO



La fracción como cociente

El segundo problema y el tercero de este inciso son difíciles. Ponen en juego a la fracción como un cociente de dos enteros, por ejemplo, en la segunda recta, el problema puede formularse así: ¿Qué fracción resulta de dividir 2 unidades entre 3? Volveremos sobre este problema en el capítulo 1 del volumen II, «Las fracciones y la división».

e) Encuentra una fracción que esté entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, y después una que esté entre la fracción que encontraste y $\frac{1}{3}$. SOLUCIONARIO



Asomo a la propiedad de la densidad

Una primera reacción en este problema puede ser la incredulidad: ¿Acaso hay fracciones entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$? Hay una fracción que no es tan difícil de encontrar: $\frac{1}{2}$. Pero ¿y entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$? En el solucionario se explican algunas maneras de ver que sí hay una fracción entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. La pregunta que surge es entonces: ¿Dadas dos fracciones, siempre hay una entre ellas? Los alumnos hallarán la respuesta en la medida en que se apropien de procedimientos para encontrar esas fracciones. De esta manera, descubrirán una importante propiedad de las fracciones: la densidad.

AULA
5º, 6º

Actividad 1.8
Análisis de lecciones de un libro de texto de quinto grado. Parte I[13]

La siguiente lección sobre la representación de fracciones en la recta numérica, puede plantearse a alumnos de quinto grado de primaria (ver figura 10). El estudio de las fracciones se inició desde tercer grado de primaria, por lo tanto, ya han tenido oportunidad de trabajar con algunas fracciones, compararlas, resolver problemas, etc., pero esta lección puede ser la primera sobre representación de fracciones en la recta.

a) Analice las **distintas tareas** que se le plantean a los alumnos en los puntos 1 y 2 y el tipo de expresiones que se usan. Por ejemplo, en algunas se indica un punto en el segmento que representa una carrera y se pregunta qué fracción de la misma ya se recorrió, y en otras se pregunta a qué punto del segmento (la carrera) corresponde una fracción dada. SOLUCIONARIO
b) Analice las **diferencias** entre las actividades propuestas en los incisos 1 y 2. Puede analizar la cantidad de subdivisiones en una representación o en otra, así como también el tipo de preguntas y el lenguaje utilizado en la consigna de cada tarea.

Representación de fracciones en la recta

34

La gran maratón

En muchos países se organizan maratones que convocan tanto a hombres como a mujeres. Con frecuencia la recaudación se destina a ayuda social. En nuestro país, también se organizan maratones incluso de más de 40 km en la que participan de 5.000 a 6.000 corredores.

1 Esta es la representación del recorrido de una maratón. Los puntos A, B y C están todos a la misma distancia y marcan distintos recorridos desde la largada.

Largada — A — B — C — Llegada

- Cuando un corredor esté en el punto B, ¿qué parte de la carrera habrá recorrido? .....
- Cuando el corredor haya recorrido tres cuartos de la maratón, ¿dónde se encontrará? .....
- Cuando el corredor esté en el punto A, ¿qué fracción del total habrá recorrido? .....

2 En esta representación de la maratón, se marcaron otras distancias desde la largada.

Largada — A — B — C — D — Llegada

- ¿Qué punto de la recta indica que el corredor ha recorrido $\frac{1}{5}$ de la carrera? .....
- Cuando un corredor ha llegado al punto B, ¿ya recorrió más de la mitad de la carrera? ..... ¿Qué fracción del recorrido representa el punto B? .....
- ¿Hay algún punto marcado que represente $\frac{4}{5}$ de la carrera? .....

Cálculos

8 × 9 = ...	8 × 19 = ...	8 × 999 = ...
15 × 11 = ...	23 × 110 = ...	45 × 1.100 = ...

90 Desarrollar procedimientos de representación aproximada de fracciones en la recta numérica.

© Editorial Estrada S. A. - Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Figura 10. Hacer Matemática en 5º. Lección 34 (Parte I), Saiz y Parra, 2014, p.90.

En esta primera parte de la lección, se plantea un contexto extramatemático, que simula una situación de la realidad: un maratón, del cual se desconoce la distancia total a recorrer, pero se conoce el punto de salida, el de llegada, y tres puntos intermedios indicados con letras[14]. Plantear las primeras actividades en un contexto accesible para los alumnos, les facilita pensar en la representación de fracciones en la recta, al resolver actividades a partir de sus conocimientos anteriores sobre fracciones y con expresiones cotidianas como la mitad, un cuarto, etc., sin necesidad de enseñanza específica previa para resolver las tareas.

Además, se explicitan, dentro del contexto, las dos reglas de la representación en la recta que mencionamos: los puntos están ubicados todos a la misma distancia y cada punto marca la distancia recorrida desde la salida o la llegada.

Puede observarse que, para indicar la carrera y las partes de la misma, se recurre a diferentes expresiones como: parte de la carrera, fracción del maratón, total de la carrera y fracción de la carrera. Estos cambios de denominación pretenden ampliar el vocabulario de los alumnos y permitirles formular razonamientos matemáticos en un lenguaje correcto.

Las fracciones asociadas a algunos de los puntos de la recta se mencionan verbalmente como « mitad del maratón », « tres cuartos del maratón », así como con algunas representaciones numéricas como $\frac{1}{5}$. Estos cambios pretenden incorporar las representaciones numéricas, así como sus nombres en el marco de esta situación.

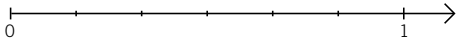
Actividad 1.9
Análisis de lecciones de un libro de texto de quinto grado. Parte II

En la segunda página de la misma lección que se analizó anteriormente (ver figura 11) continúa el trabajo con representación de fracciones en la recta numérica, en este caso en un contexto intramatemático. Se pretende que el trabajo anterior haya permitido a los alumnos acceder a las primeras ideas sobre representación en la recta, tarea que en esta página se plantea más formalmente. SOLUCIONARIO

Nota: los alumnos deben trabajar sin regla, pues lo que está en juego no es la precisión en la medida, sino el uso de razonamientos y argumentos correctos. Si ellos lo requieren, pueden usar la orilla de un pedazo de papel para hacer marcas, comparar segmentos, etc.

a) ¿Cuál puede ser el motivo de que la primera recta aparezca subdividida en partes iguales y en las demás no?
b) Analice qué cuestión diferente plantea cada uno de los ejercicios.
c) ¿Qué aportes se brindan en las cápsulas informativas sobre cómo representar fracciones en la recta?
d) ¿Para qué puede servir hacer relaciones entre fracciones de diferente denominador en un mismo ejercicio?
e) Una fracción como $\frac{1}{4}$ se puede interpretar como «dividir una unidad en 4 partes iguales», o como tomar la parte que entra 4 veces en la unidad. ¿Cuál de las dos formas de ver a la fracción está involucrada en el ejercicio 4?

3 En la siguiente recta ubicá $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.



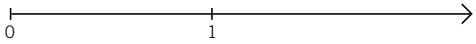
Para ubicar en la recta una fracción como $\frac{1}{3}$ es necesario que el segmento $[0, \frac{1}{3}]$ entre 3 veces en el segmento unidad.

Para representar fracciones en la recta numérica, es necesario tener en cuenta la unidad. La fracción $\frac{1}{2}$ estará a igual distancia del 0 que del 1, es decir se ubicará en el punto medio de este segmento.

- En esta recta representá las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$.

- En esta recta marcá las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$.

- En esta recta representá las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 2, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$.

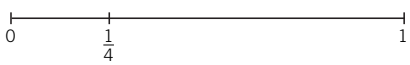


Para representar $\frac{1}{6}$ en la recta es necesario dividir el segmento [0,1] en 6 partes iguales. Para ello, se puede dividir primero el segmento por la mitad y luego cada una de esas partes dividirla en 3 segmentos de igual longitud.

4 Verificá si los puntos marcados en las siguientes rectas corresponden a las fracciones que se indican. En los casos en que una fracción no corresponda, representá la nueva ubicación con un color diferente.

La ubicación será aproximada pero debe realizarse con bastante precisión.

a



b

c

- ¿Cuántas veces debería entrar el segmento $[0, \frac{2}{8}]$ en la unidad? .....

© Editorial Estrada S. A. - Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

E10HM5_P3.indd 23 1/24/11 4:03:39 PM

Figura 11. Hacer Matemática en 5º. Lección 34 (Parte II), Saiz y Parra, 2014, p.91.

Información adicional sobre la lección

Otros aportes que puede hacer el docente durante la resolución de la lección y en las puestas en común, son:

- Destacar el **significado de la fracción** $\frac{1}{3}$ como el segmento $[0, \frac{1}{3}]$ que entra 3 veces en el segmento unidad, o bien que iterado 3 veces cubre al entero. Este significado se pone en juego sobre todo en la segunda parte de la lección.
- Aclarar que la **ubicación** será necesariamente **aproximada**, pero que debe realizarse con suficiente precisión. Si se ubica la fracción $\frac{1}{2}$ debe notarse que está en el punto medio del segmento.
- Introducir **formas de dividir un segmento** en seis partes iguales para poder relacionar medios con tercios: se puede dividir el segmento en 2 partes y luego en 3 cada uno de los medios marcados.
- En los incisos **a** y **b** del punto 4, los alumnos pueden detectar un error al ver que a dos fracciones que no son equivalentes se les asignó el mismo punto en la recta. Esta forma de detectar el error constituye una validación semántica (y no empírica), la cual se basa en una propiedad que por ahora está implícita: a un punto de la recta le corresponde una sola fracción (o varias, pero equivalentes). La discusión del error puede ser la oportunidad para hacer explícita esta propiedad. Para saber cuál es el punto correcto, pueden ver si la unidad se completa con 4 segmentos como $[0, \frac{1}{4}]$ o con 5 segmentos como $[0, \frac{1}{5}]$.
- Una dificultad muy frecuente para los alumnos es saber que para obtener n divisiones de un segmento unidad, deben hacer $n - 1$ marcas de subdivisión. Por ejemplo, si se quiere dividir un segmento unidad en 4 partes, se deben trazan 3 subdivisiones.

Como se ha podido ver, la lección anterior cumple con las condiciones de una situación de aprendizaje de nuevos conocimientos sobre las fracciones, en particular de su representación en la recta; en términos de la TSD diríamos, es una situación «adidáctica», puesto que:

- plantea inicialmente una situación contextualizada (un maratón), en la que los alumnos podrán iniciar el trabajo a partir de sus conocimientos previos y sin necesidad de recibir una enseñanza específica previa;
- en un segundo momento plantea retos diversos y cada vez mayores, al manipular variables como las fracciones unitarias o no unitarias, denominadores iguales o no; subdivisiones en la recta (hay justo las que corresponden al denominador o no), contexto (extramatemático o intramatemático), tipo de tarea;
- da lugar a formas de validar, tanto semánticas, a través de argumentos, como empíricas.

Actividad 1.10
Diseñar actividades II

Seleccionar, adaptar, diseñar actividades constituyen actividades básicas de la docencia. Si estudia este libro en colectivo, aproveche para dar y recibir retroalimentación: recopile dos o tres actividades en las que se utilice la recta numérica que le parezcan interesantes, ya sea que las tome tal cual de algún lado o que las adapte, o que las diseñe usted mismo. Diga para qué nivel escolar son adecuadas. Destaque sus características y compártalas con sus compañeros.

Otras ideas sobre la recta numérica

La experiencia de los alumnos con números naturales en la recta, previa al estudio de las fracciones, les permitirá comprender cuestiones básicas del funcionamiento de este recurso como la necesidad de mantener un solo tamaño de unidad a lo largo de la recta, o el hecho de que el número asignado a un punto indica la cantidad de unidades que hay desde 0 hasta ese punto. Con ese conocimiento previo, los alumnos aprenderán a ubicar los enteros, los medios, los cuartos, etc., así como a establecer algunas relaciones de orden.

Tema 5. Cálculo mental

El interés de las actividades de cálculo mental con fracciones no es tanto el de disponer de una forma de calcular rápida, como con los naturales, pues no es prioritario saber hacer cálculos complejos con estos números (para calcular se usan más los decimales), sino establecer y usar relaciones que mejoran la comprensión de las fracciones mismas.

Actividad 1.11
Resolviendo problemas de fracciones con cálculo mental

A continuación, se presentan varias actividades de cálculo mental con fracciones, diseñadas para alumnos de primaria y de secundaria. Se analizan sus características, desde el punto de vista de lo que le exigen al alumno, y de lo que puede aprender. Se le sugiere que resuelva primero cada actividad, enseguida reflexione sobre lo que exigen, y finalmente lea lo que se dice acerca de cada una.

a) ¿Qué fracciones son mayores que 1?

$$\frac{3}{7} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{11}{9} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{99}{100} \quad \frac{100}{99}$$

La comparación contra la unidad exige una comprensión básica de la idea de fracción. Para quienes ya sabemos, es obvio que una fracción es mayor que la unidad cuando el numerador es mayor que el denominador. Para los alumnos, constituye un descubrimiento de primera importancia, que es fruto de un razonamiento reiterado, del siguiente tipo: si en un entero (o unidad) hay 7 séptimos, una cantidad de séptimos mayor a 7 será mayor que el entero. Con alumnos de tercer grado de primaria, la actividad puede plantearse con fracciones del tipo $\frac{m}{2^n}$. Con alumnos más grandes, se puede usar cualquier tipo de fracciones.

b) ¿Entre qué pares de números naturales están las siguientes fracciones?

$$\frac{13}{4} \quad \frac{21}{5} \quad \frac{75}{10} \quad \frac{15}{12}$$

Se busca que los alumnos establezcan razonamientos como el siguiente: dado que un entero se forma, por ejemplo, con 4 «cuartos», entonces…

Enteros	Cuartos
1	4
2	8
3	12
4	16

Con 13 cuartos se pueden formar 3 enteros, y todavía queda uno más. Por lo tanto, $\frac{13}{4}$ está entre 3 y 4.

En algún momento (también hacia quinto o sexto de primaria) los alumnos podrían descubrir que la división del numerador entre el denominador les sirve. Esto puede ocurrir sobre todo si el numerador es grande con respecto al denominador, lo que llevaría a hacer demasiadas sumas. Por ejemplo, si la fracción es $\frac{125}{3}$, sería cansado sumar de 3 en 3 para ver cuantos enteros se forman. Es

más rápido dividir 125 : 3 y observar que 3 entra 41 veces en 125, y quedan 2 tercios todavía. Se puede concluir que $\frac{125}{3}$ está entre 41 y 42. De una vez se puede expresar como $41\frac{2}{3}$.

Pero cuidado: la actividad perdería mucho de su valor formativo si de entrada se enseña a los alumnos a usar la división, y más aún si se les lleva a dividir con cociente decimal.

c) Sumar oralmente desde 0, de $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$.

Si dicen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$... se les interrumpe y se les dice «cuando se formen enteros, díganlos, por ejemplo, en lugar de $\frac{2}{2}$, ¿qué se puede decir? ¡1! Bien, entonces digan $\frac{1}{2}$, 1... ¿y luego? (se les pregunta a todos)»; si le contestan «$\frac{3}{2}$», se les pregunta «¿de qué otra manera se puede decir?» $1\frac{1}{2}$... O sea que se oirá decir: 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, etc.

d) Misma actividad, sumando ahora $\frac{1}{4}$. Se escuchará decir: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ (o un medio), $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$ (o $1\frac{1}{2}$), etc.

Reflexión sobre la idea de «maneras más simples de expresar una fracción».

Al finalizar los ejercicios anteriores conviene comentar a los alumnos que en el juego se vio que hay maneras de referirnos de una fracción en las que resulta más fácil saber cuánto hay, por ejemplo, en lugar de decir $\frac{3}{2}$ se puede decir $1\frac{1}{2}$. ¿Por qué? Porque con 2 medios de los 3 medios, se arma un entero y queda todavía un medio. Las dos escrituras se refieren al mismo número. De hecho, pueden llamarse «expresiones equivalentes». Cabe observar que estas explicaciones ayudan a analizar qué significa una fracción (oral) y a relacionarla con los números enteros ($\frac{3}{2}$ es lo mismo que $1\frac{1}{2}$). La actividad es adecuada para tercer y cuarto grados de primaria.

e) Después de la actividad de sumar de $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{4}$, se pueden plantear preguntas como: ¿Cuál será el primer número entero que encontrará si suma de $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3}$? ¿Y después? ¿Pasará por el 6? ¿Por cuáles otros números pasará? Se trata de propiciar que los alumnos ha-

gan conjeturas como: « ya sé que si sumo de $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3}$, cada 3 sumas aparecerá un entero porque $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ es 1, luego de otras 3 sumas aparece 2, etc. ». Se les puede preguntar entonces si ese hallazgo servirá también para saber cuándo aparecen los enteros, si sumo de a $\frac{1}{4}$, de a $\frac{1}{5}$, etc.

f) Sumar desde cero, de $\frac{2}{5}$ en $\frac{2}{5}$, hasta 10.

Y después, de $\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{3}$; de $\frac{3}{4}$ en $\frac{3}{4}$, hasta cierto número (por ejemplo, de $\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{3}$ hasta 6) ¿Cuál será el primer número entero que encontrará si suma de $\frac{2}{5}$ en $\frac{2}{5}$?

Se trata de actividades como las anteriores, pero con fracciones más difíciles, que se pueden plantear de quinto grado en adelante. Analice qué hace más difícil esta actividad en comparación con las dos anteriores, y cuál es la variable que provoca la dificultad. SOLUCIONARIO

Términos que pueden ser útiles, y otros que no lo son por ahora

Hay términos que pueden ser útiles porque ayudan a la comunicación entre alumnos y docente, por ejemplo, la expresión « fracción mixta » evita tener que decir cada vez cosas como « separando los enteros de las fracciones ». Pero otros términos son poco útiles, por ejemplo, los de « fracción propia » o « impropia ». En general, se recomienda introducir la menor cantidad de términos nuevos.

g) ¿Qué fracciones son menores que $\frac{1}{2}$?

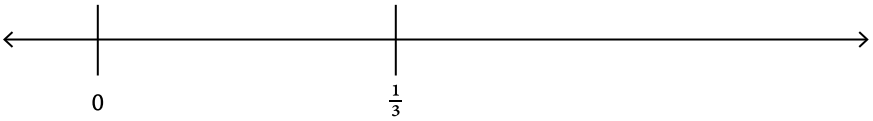
$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{9}$$

Conviene hacer la actividad en tres tiempos: 1) pedir a los alumnos que primero « apuesten » para cada fracción, si le van a « es mayor que $\frac{1}{2}$ », o a « es menor que $\frac{1}{2}$ », o también a « es igual a $\frac{1}{2}$ »; 2) que pasen a dar argumentos en defensa de su apuesta, y 3) que ubiquen las fracciones en la recta numérica para verificar.

Comparaciones con ciertas fracciones que resultan muy útiles para estimar

La comparación con $\frac{1}{2}$, como la comparación con 1, es valiosa desde el punto de vista de la comprensión que exige de la noción, a la vez que, una vez sistematizada una manera de hacerla, constituye una gran ayuda para estimar el tamaño. Con respecto a este último propósito también puede ser útil la comparación contra otras fracciones unitarias, en particular $\frac{1}{4}$. Para alumnos más grandes (quinto o sexto grados, y secundaria), también puede ser provechoso comparar fracciones contra $\frac{1}{3}$, como la siguiente:

«Ubica el número $\frac{17}{24}$ en la siguiente recta, de manera aproximada»[15]



Esta forma de presentar el problema implica, además de hacer la comparación, interpretar la consigna y el gráfico. Un alumno podría pensar: «¿debo ver hasta dónde llega la unidad (repitiendo 3 veces el segmento), y luego dividirla en 24 partes para tomar 17 partecitas?» Dado que se pide una ubicación aproximada, no parece necesario hacer ese largo camino. Basta con saber que $\frac{17}{24}$ es más de la mitad, por lo tanto, mayor que $\frac{1}{3}$, y por lo tanto va a la derecha de $\frac{1}{3}$.

h) ¿Qué sumas son mayores que 1? ¿Cómo lo sabes?

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4};\qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{2};\qquad \frac{3}{4}+\frac{1}{2};\qquad \frac{3}{4}+\frac{3}{4};\qquad \frac{3}{4}+\frac{1}{8}$$

Describa procedimientos que los alumnos podrían desarrollar al hacer esta actividad. SOLUCIONARIO

i) ¿Cuál de estas tres fracciones es la mitad de $\frac{6}{4}$:

$$\frac{3}{2};\qquad \frac{6}{2};\qquad \frac{3}{4}$$

¿Por qué las otras dos fracciones no pueden ser la mitad de $\frac{6}{4}$?[16]

Probablemente los alumnos dirán que la mitad es $\frac{3}{2}$ pensando en la fracción como 2 números independientes, e inventando coherentemente con esa idea, que la mitad se encuentra dividiendo tanto al numerador como al denominador a la mitad. Se les puede decir: «si $\frac{3}{2}$ fuera la mitad de $\frac{6}{4}$ entonces $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ debería dar $\frac{6}{4}$». Sin embargo, si ellos piensan que se suma numerador con numerador y denominador con denominador, esa pregunta no servirá para que caigan en la cuenta del error.

Preguntar a los alumnos por qué los otros dos números no son la mitad, puede llevar a razonamientos muy interesantes. Seguramente dirán, por ejemplo, que faltó dividir un término.

Después de la argumentación puede ser útil, para convencer a los más incrédulos, acudir a una verificación empírica utilizando la recta: identificar el segmento que mide $\frac{6}{4}$ y, a ojo o con una tira de papel, obtener la mitad de ese segmento para ver a qué número llega.

Las actividades anteriores dejan ver con claridad el importante papel que puede jugar el cálculo mental en la puesta en juego de relaciones y propiedades de las fracciones, y por lo tanto, en la comprensión de las mismas.

Actividad 1.12
Diseñar actividades III

Recopile dos o tres actividades de cálculo mental con fracciones, que considere interesantes, ya sea que las consiga de algún lado, las adapte, o usted mismo las diseñe. Diga para qué nivel escolar son adecuadas. Destaque sus características y, si trabaja en grupo, compártalas con sus compañeros.

Tema 6. La equivalencia, la suma y la resta de fracciones

¿Para qué y cómo sumar y restar fracciones en 3º o 4º grados de primaria?

Las actividades de medición que hemos visto hasta ahora han implicado en varios momentos, de manera implícita, a la equivalencia de expresiones con fracciones, así como a la suma y a la resta. Nos limitaremos en este apartado a hacer algunas observaciones sobre esas nociones.

Los problemas que implican sumar o restar fracciones, en el contexto de la medición, son similares a los que llevan a sumar o restar números naturales. Por ejemplo, si una longitud mide L y otra mide L', la unión de las dos mide $L + L'$ (ver figura 12), o si a la más larga (supongamos que es L) se le recorta una parte que mide L', la parte que queda medirá $L - L'$.

El hecho de que los problemas ligados a suma y resta sean similares para las fracciones y para los números naturales, tiene la ventaja de que los alumnos no necesitarán construir nuevos significados para comprender la noción de suma y de resta de fracciones, como ocurre, ya lo veremos, con la multiplicación. Lo que sí necesitarán en cierto momento, pero no desde el principio, son técnicas (algoritmos) para resolver las sumas y restas de fracciones.

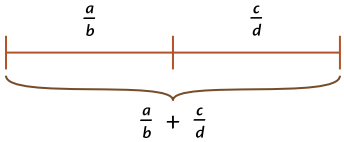


Figura 12. La suma de fracciones y la unión de longitudes

Cabe advertir otra vez, como ya se hizo en el tema anterior de cálculo mental, que no es necesario que los alumnos se vuelvan sumadores expertos de fracciones complicadas, pues cuando se trata de resolver varios cálculos, o cálculos complicados, resulta más práctico usar los decimales. Entonces, ¿cuál puede ser el propósito de estudiar la suma y resta de fracciones? El primero de ellos es comprender la definición de fracción como partes de unidad. Recordemos que, bajo el significado de «partes de unidad», la fracción se define como una suma de fracciones unitarias, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de unidad significa $\frac{1}{4}$ de unidad + $\frac{1}{4}$ de unidad + $\frac{1}{4}$ de unidad. En segundo lugar, el uso de *expresiones aditivas* con fracciones como «1 tira + $\frac{1}{2}$ de tira + $\frac{1}{4}$ de tira» permite extender la cantidad de medidas que se pueden escribir con el repertorio limitado de fracciones que los alumnos tienen al principio de su aprendizaje. En estos dos casos, se trata de expresar cantidades con fracciones, de manera aditiva.

A lo largo del tercer grado de primaria al menos, y parte del cuarto grado, mientras se trabaja con fracciones que tienen denominador una potencia de 2, como 2, 4, 8, 16 y cualquier numerador (es decir, fracciones del tipo $\frac{m}{2^n}$), pueden abordarse casos de sumas con denominadores distintos, múltiplo uno del otro. Para una suma como $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ los alumnos pueden hacer un razonamiento como el siguiente: en un medio hay dos cuartos entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Más adelante (esto puede ser en cuarto o quinto grado de primaria) se pueden introducir sumas más difíciles como $\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$, o como $\frac{3}{2} + \frac{5}{4}$. Para estos casos puede ser útil hacer primero una estimación, por ejemplo, para la suma $\frac{3}{2} + \frac{5}{4}$ sería bueno que anticiparan si les dará más o menos que 1, y luego más o menos que 2.

Hasta ahora, no se ha hablado de usar un algoritmo para sumar o restar. Durante un primer periodo, se puede dejar que los alumnos usen lo que saben, analicen las fracciones,

las escriban de otras maneras, las descompongan, se apoyen en representaciones (en la recta, por ejemplo) para obtener o estimar un resultado. Una sola suma como $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ puede constituir un interesante problema, antes de que ya solamente se trate de aplicar un algoritmo.

A partir de cierto momento —en los programas mexicanos es a partir de cuarto grado de primaria— habrá que sistematizar e institucionalizar poco a poco aspectos básicos como:

- para sumar fracciones con el mismo denominador, se suman únicamente los numeradores;
- cuando los denominadores son diferentes, una manera de sumar las fracciones es sustituir una de ellas o las dos, por otras que representen las mismas cantidades, pero que tengan el mismo denominador. Lo mismo aplica para la resta.

Conviene empezar por los casos en los que un denominador es múltiplo del otro, ya que solamente sería necesario sustituir una fracción.

Actividad 1.13
Sumas y restas de fracciones sin el algoritmo convencional

¿Cómo podrían los alumnos resolver la suma $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ si no disponen aún del algoritmo?

Proporcione otros ejemplos de sumas o restas que pueden ser adecuadas para abordarse sin disponer del algoritmo, y muestre cómo se podrían resolver.

Expresiones equivalentes

El uso de expresiones equivalentes de las fracciones puede ocurrir desde el principio del aprendizaje de las fracciones. Como ya vimos, en las actividades de medición de longitudes, entre otras, pueden surgir formas de expresar una misma medida, por ejemplo $1\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$.

Las expresiones equivalentes pueden no solamente «surgir» involuntariamente, sino ser conscientemente buscadas para resolver un problema, por ejemplo, para averiguar qué medida es más larga, si una que mide $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ u otra que mide $\frac{3}{4}$. Ver que $\frac{1}{2}$ es también $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, o recordar que $\frac{3}{4}$ es $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, destacar estas equivalencias, y a partir de cierto momento escribirlas, ayudará a comprender las fracciones, las relaciones entre ellas y con los enteros.

La estrategia de sustituir una expresión por otra equivalente para compararlas o para sumarlas debe desembocar, más adelante —cuarto grado y siguientes grados—, en la idea más sistemática de sustituir una fracción por otra equivalente, con el mismo denominador que la otra.

Actividad 1.14
El algoritmo de la suma de fracciones

El siguiente procedimiento es el algoritmo usual para sumar fracciones. Explique qué tiene que ver con el que se expuso antes, que consiste en sustituir las fracciones por otras equivalentes con mismo denominador.
SOLUCIONARIO

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Explique por qué no conviene enseñar de entrada este algoritmo.
SOLUCIONARIO

Tema 7. Problemas para profundizar

Los siguientes problemas permiten repasar y profundizar algunos aspectos de lo que vio en este capítulo. Trate de resolverlos y de comentar las resoluciones y las dificultades con compañeros.

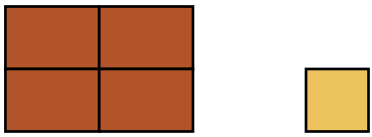
Como ya es costumbre, usted puede plantear a sus alumnos algunos problemas, tal como están, o adaptados. Los de las actividades 1.16 y 1.17 podrían ser adecuados para el nivel de secundaria.

Actividad 1.15
Importancia de la unidad

Cuando los números se refieren a unidades concretas (o a «números concretos», como se les llamaba antes) se pueden presentar situaciones como las siguientes:

- Un número natural pequeño expresa una cantidad más grande que un número grande: 3 kg es más que 1000 gramos.
- Una fracción pequeña, expresa una parte más grande que una fracción grande:

  $\frac{1}{4}$ de la superficie A es más grande que $\frac{1}{2}$ de la superficie B:



A B

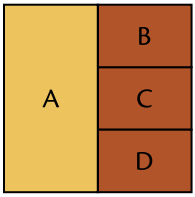
Por ello es importante hacer referencia a la unidad, y dejar de hacerlo solamente cuando sea muy claro que la unidad de referencia es la misma.

Considere la imagen de la derecha para completar las oraciones: SOLUCIONARIO

B es $\frac{1}{3}$ de _____

o bien $\frac{1}{6}$ de _____

o bien $\frac{1}{2}$ de _____



Actividad 1.16
Cambiando el dato desconocido

a) Trace un segmento L (o recorte una tira) de cualquier tamaño. Este segmento mide $\frac{2}{3}$ de L'. Trace L'. SOLUCIONARIO
b) Trace una superficie rectangular S de cualquier tamaño. Esa superficie es $\frac{2}{3}$ de S'. Trace S'. SOLUCIONARIO
c) El problema del inciso **a** tiene una única solución. ¿Cuántas tiene el problema del inciso **b**?

El problema de averiguar cuál es el entero conociendo una fracción de él, exige invertir el orden acostumbrado y comprender que lo que se ve no es, como de costumbre, el entero por fraccionar, sino lo que resultó de fraccionar un entero que se desconoce. Una vez comprendido eso, decidir qué hacer para recuperar al entero, tampoco es sencillo.

Un error muy frecuente consiste en confundir el problema con el caso usual en el que se tiene el entero, y se busca la parte. Esto llevaría, en el problema **a**, a hacer un segmento L' de $\frac{2}{3}$ de L. Una manera de mostrar que hay error y que a la vez puede servir para que se comprenda el planteamiento, consiste en tomar el segmento obtenido ($\frac{2}{3}$ de L), y decir: «se supone que $\frac{2}{3}$ de este segmento, debe ser igual al segmento L». Al verificarlo físicamente, se verá que no es así (saldrán en realidad $\frac{4}{9}$ de L).

El problema **b**, presenta un interés adicional, por el hecho de tener más de una solución correcta (pues hay infinidad de superficies que tienen un área dada).

Actividad 1.17
Fracciones ocultas...

- El Sr. Gómez contrató a Juan para podar su jardín. Juan tardó 4 días en podarlo. La vez siguiente, contrató a Pedro, quien tardó 12 días. La tercera vez, los contrató a los dos. ¿Cuánto tiempo tardaron?[17] SOLUCIONARIO

Un aspecto interesante de este problema es que en el planteamiento no aparecen las fracciones, ni siquiera las palabras que las evocan normalmente. Se puede empezar haciendo estimaciones, que sirven para descartar caminos erróneos, por ejemplo: Pedro y Juan juntos no pueden tardar 16 días (la suma de 4 y 12), pues es ilógico que hagan más tiempo juntos que separados. ¿Y el promedio? Serían 8 días (la mitad de esa suma), lo cual tampoco tiene sentido, pues es más de lo que hace Juan solo. El número de horas que tardan en podar el jardín juntos debería ser menor al tiempo que tarda cada uno por separado...

Actividad 1.18
Intervienen fracciones de longitud y, en el fondo, también razones

- Jessy hace 20 minutos caminando de su casa a la de Tonatiuh y Tonatiuh hace 30 minutos de su casa a la de Jessy. Si salen al mismo tiempo, cada uno de su casa hacia la casa del otro, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse? ¿En qué parte del camino se encontrarán? SOLUCIONARIO

Este problema, como el anterior, tampoco sugiere de manera evidente un uso de fracciones. Un aspecto interesante de este problema es el hecho de que pone en juego *razones*. Las

fracciones pueden intervenir como expresiones de longitud, pero también como expresiones de relaciones o razones (significado que se estudiará en el capítulo 2 del volumen II).

La medición en la génesis de las fracciones

Las fracciones, como los números naturales, permiten expresar medidas de cantidades de magnitud. Es ejerciendo esa función fundamental que las fracciones pueden aprenderse, como números «concretos», así como las nociones de equivalencia, orden, suma y resta.

Por ello, los alumnos requieren de ciertas nociones básicas de medición para aprender fracciones, y a la vez, el estudio de las fracciones como expresiones de medidas, contribuye a la comprensión más profunda de las magnitudes y de la medición.

En los dos capítulos siguientes se seguirá estudiando el papel de las fracciones para expresar cantidades: en el capítulo 2 de este volumen, con números decimales y en el capítulo 1 del volumen II, en el contexto de los repartos. En el capítulo 2 del volumen II, en cambio, se verá a las fracciones expresando relaciones entre medidas, más que a las medidas mismas.

Poco a poco, al estudiar otros contextos y otros significados, los alumnos irán descontextualizando las fracciones, para comprenderlas como un sistema de números abstractos.

Capítulo 2.
Los decimales y la medida

Situación 1
Alumno: *Creo que, si a 3/4 se le quita la raya, se obtiene 34%.*

Situación 2
Alumno$_1$: *Divido 7 entre 3, obtengo 2.3. Entonces (debería ocurrir que 2.3 × 3 = 7). Pero cuando multiplico con la calculadora 3 por 2.3 no obtengo 7. ¿Quién tiene el resultado correcto, la calculadora o yo? (…)*

Alumno$_2$: *Yo creo que la calculadora está bien porque fue programada para eso, y lo sabe todo. Si no, ¿para qué habría calculadora?*[18]

Los números decimales constituyen un subconjunto de los números racionales en el que las operaciones y relaciones se facilitan considerablemente. Esa facilidad se debe a dos características: una, que están implicadas solamente las fracciones decimales, que son las que tienen por denominador una potencia de 10 (es decir, un uno seguido de ceros, como 10, 100,

1000…); la otra característica es que se usa el sistema decimal de numeración, dotado del punto decimal, para expresar los números. Esto hace que con los números decimales se puedan usar las técnicas para ordenar y operar con los números naturales, haciendo algunas adaptaciones. Por otra parte, muchas fracciones que no son decimales, como $\frac{1}{2}$, son equivalentes a fracciones decimales ($\frac{5}{10}$, $\frac{50}{100}$, etc.) y, lo que es más importante, las fracciones que no tienen un equivalente decimal, como $\frac{1}{3}$, se pueden aproximar —tanto como se quiera— con decimales (0.66, 0.666, etc., por ejemplo), y esas aproximaciones son casi siempre suficientes para efectos prácticos. Por estas razones, los decimales son los números que más se utilizan en la vida cotidiana, y en las otras disciplinas, mucho más que las fracciones en general. Su importancia es indiscutible.

Sin embargo, en esa facilidad radica también su punto débil: el parecido con los naturales oculta las diferencias profundas entre los dos conjuntos numéricos, dificulta la comprensión de cómo funcionan los números decimales, la razón de ser de los algoritmos que se usan con ellos, lo cual propicia errores graves, de naturaleza conceptual, como el de pensar que 0.19 es mayor que 0.2, porque 19 es mayor que 2.

Una de las maneras de paliar esta incomprensión, por la que se optó aquí, consiste en estudiar primero las fracciones comunes, después algunas características que son propias solamente de las fracciones decimales, y finalmente la expresión de estas con escritura decimal. Las propiedades de los decimales se pueden comprender y explicar mejor cuando se conocen las fracciones.

El primer tema de este capítulo se dedica a las *fracciones decimales*, se destacan las ventajas que ofrecen para operar en comparación con el resto de las fracciones. Después, en el

tema 2, se introduce la notación de esas fracciones mediante el sistema decimal de numeración, y el punto decimal.

En el tema 3 se estudia una de las propiedades que distinguen a los decimales —y más ampliamente a los racionales— de los naturales: la densidad.

El análisis de los errores comunes al trabajar con decimales está presente en todo el capítulo, pero además se le dedica el tema 4.

Hacia el final de la unidad, en el tema 5, se revisan algunas definiciones de los *números decimales* y se precisa por la que se optó aquí, que es la usual en educación básica.

En los libros de texto de la primera mitad del siglo pasado, era frecuente encontrar una introducción directa a los números decimales, sin ver antes las fracciones comunes. Esta opción ha dejado de ser frecuente, quizá por la expectativa de fundamentar mejor a los decimales mismos. En algunos textos o programas se propone solamente una introducción muy breve, que se apoya en el dinero, y después se pasa a las fracciones decimales para dar lugar a un estudio más profundo de los decimales. Estas y otras posibilidades son viables, cada una presenta ventajas y desventajas. A lo largo de este capítulo se harán comentarios sobre algunas de estas opciones.

Finalmente, el papel de los decimales como operadores multiplicativos se estudiará en el capítulo 2 del volumen II.

Tema 1. Las fracciones decimales: más fáciles de manipular

1. Comparar, sumar, restar medidas expresadas con fracciones decimales

AULA
5º, 6º, secundaria

Actividad 2.1
¿Qué tira es más larga?

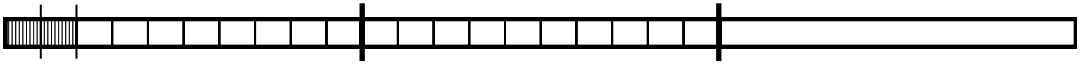
Esta actividad puede ser adecuada desde quinto grado de primaria hasta primer grado de secundaria. Está basada en una dinámica que consta de tres pasos: 1) anticipar cuál de dos fracciones de longitud es mayor, 2) argumentar en qué se basó la respuesta, y 3) verificar la anticipación trazando y comparando segmentos de esas longitudes. Se espera que, de esta manera, los alumnos reciban una retroalimentación que los ayude a cuestionar ideas inexactas acerca de los números decimales.

Analice la actividad. Si le es posible, impleméntela en el salón de clases. A partir de las orientaciones que se dan enseguida, usted haga las adecuaciones que considere pertinentes, pero conservando la dinámica de «anticipar un resultado y después verificar la anticipación».

Material

Una cinta larga (aproximadamente 2.5 metros), subdividida en unidades (de aproximadamente 1 metro), para cada pareja o equipo. La dos primeras unidades, al menos, divididas en décimos. Y los dos primeros décimos, divididos también en 10, esto es, en centésimos de la unidad. Este material se puede usar en muchas otras actividades.

Una hoja de papel tamaño carta, para trazar segmentos. Si los segmentos exceden el tamaño de la hoja carta, se pueden usar pliegos más grandes, de papel de reuso, o bien, se pueden trazar los segmentos en el piso, con gis.



Desarrollo

Primer momento. Contesten la siguiente pregunta

Una recta A mide de largo $\frac{11}{100}$ de unidad y una recta B mide $\frac{2}{10}$ de unidad. ¿Cuál es más larga? Justifiquen su respuesta.

Los alumnos tienden a pensar que $\frac{11}{100}$ es más larga, porque la fracción está formada con números más grandes. Se recomienda no corregir el error en este momento y esperar al momento de la verificación.

Segundo momento. Puesta en común

Una vez que los alumnos, individualmente o por parejas, tienen una respuesta, organice una puesta en común en la que dos o tres alumnos argumenten su respuesta, es decir que digan con base en qué eligieron una fracción. Trate de que se presenten respuestas distintas.

Tercer momento. Verificación

Finalmente, organice a los alumnos en parejas. Pídales que usen la cinta subdividida para trazar sobre una hoja de papel (o sobre el piso), dos rectas con las medidas de A y de B y que verifiquen si es más larga la recta que ellos pensaron.

Es posible que algunos alumnos requieran ayuda para interpretar las medidas y trazar las rectas. Para estos alumnos, más que para otros, la verificación, puede constituir una nueva oportunidad para aprender.

Cuarto momento. Conclusión

Ayude a los alumnos a ver que $\frac{11}{100}$ es $\frac{1}{10}$ con $\frac{1}{100}$.

Destaque el hecho, probablemente inesperado para los alumnos, de que $\frac{2}{10}$ es más grande que $\frac{11}{100}$, a pesar de que se forma con números más pequeños.

Quinto momento. Repita la actividad

Para ayudar a confrontar los errores, se recomienda realizar varias actividades como esta. Otros números interesantes por «engañosos» pueden ser[19]:

- $\frac{3}{10}$ vs $\frac{30}{100}$
- $\frac{35}{10}$ vs $3\frac{5}{10}$
- $\frac{29}{100}$ vs $\frac{3}{10}$
- $\frac{245}{100}$ vs $\frac{24}{10} + \frac{6}{100}$
- $\frac{1}{10}$ vs $\frac{11}{100}$
- $\frac{3}{10}$ vs $\frac{2}{10} + \frac{9}{100}$

También pueden anticipar y verificar el resultado de sumas y restas mediante situaciones como las siguientes.

- Se va a unir una tira de $\frac{1}{10}$ de unidad con una tira de $\frac{4}{10}$ de unidad. ¿De qué tamaño será la tira que resulte? ¿Y si se agrega una tira de $\frac{50}{100}$?
- A una tira de $\frac{5}{10}$ se le va a quitar un pedazo de $\frac{1}{100}$. ¿De qué tamaño será la tira que resulte?

Siga la misma dinámica que ya utilizó en otros momentos: anticipar, argumentar y verificar.

2. Dos magnitudes muy adecuadas para representar a las fracciones: la longitud y la superficie

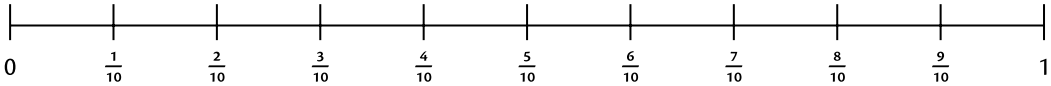
Las fracciones permiten expresar medidas de distintas magnitudes. A su vez, algunas magnitudes, sobre todo la longitud y la superficie, son útiles para *representar* a las fracciones, y hacerlas así más accesibles en los procesos de aprendizaje.

Es oportuno hablar aquí de la noción de **cambio de representación**. Dado que las fracciones, como todos los objetos matemáticos, son ideas, conceptos y, por lo tanto, no pueden verse ni tocarse, trabajar con distintas representaciones puede ser muy útil para comprenderlas. Además, para no confundir al concepto con su representación, resulta muy útil trabajar con más de una representación del mismo objeto (Duval, 1993)[20].

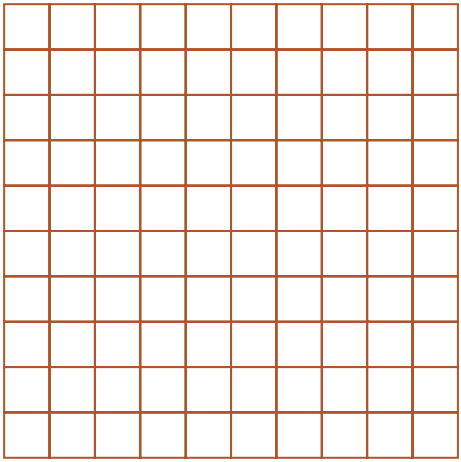
Actividad 2.2
Dos representaciones de las fracciones decimales

En esta actividad se representan fracciones decimales de dos maneras, mediante la recta numérica (longitud) y mediante un cuadrado subdividido en 100 (superficie). SOLUCIONARIO

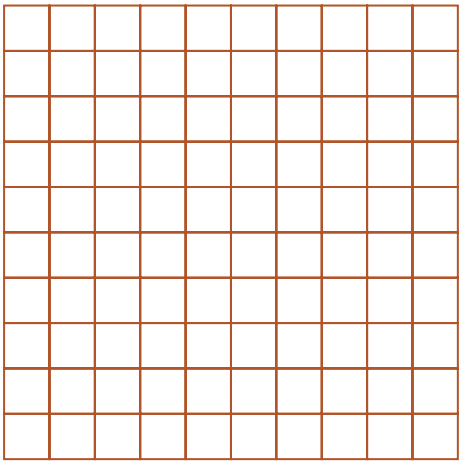
a) Ubique aproximadamente, en la siguiente recta numérica, las fracciones: $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{35}{100}$ y $\frac{5}{1000}$. La unidad (o el entero) al que se refieren las fracciones es el segmento de 0 a 1.



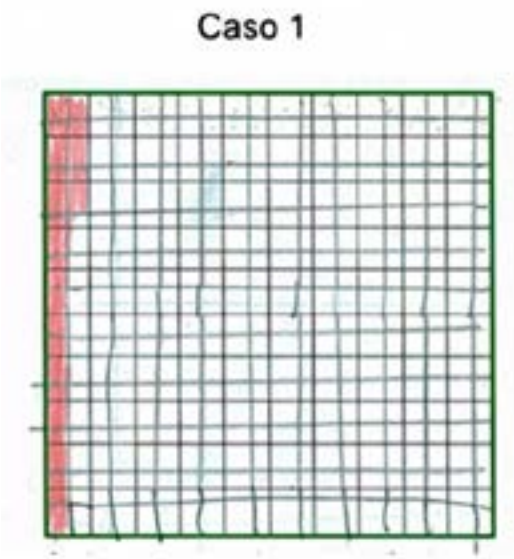
b) Represente en el cuadro de abajo las mismas fracciones señaladas, iluminando la parte de superficie del cuadrado que corresponda a cada una. La unidad es ahora el cuadrado grande, formado por 100 pequeños cuadros.

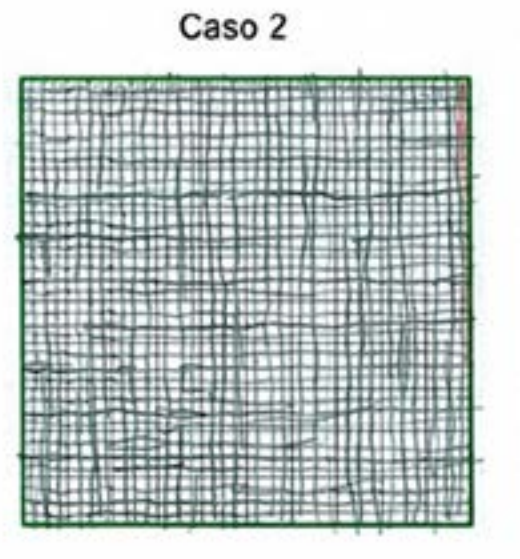


c) Represente en el cuadro la fracción $\frac{25}{1000}$



d) Analice las siguientes representaciones de $\frac{25}{1000}$ hechas por alumnos de sexto grado[21] sobre una cuadrícula de 10 × 10. Explique en cada caso si la resolución es correcta o no, y las dificultades que pueden estar detrás.





¿Cómo obtener milésimos si la subdivisión es en centésimos?

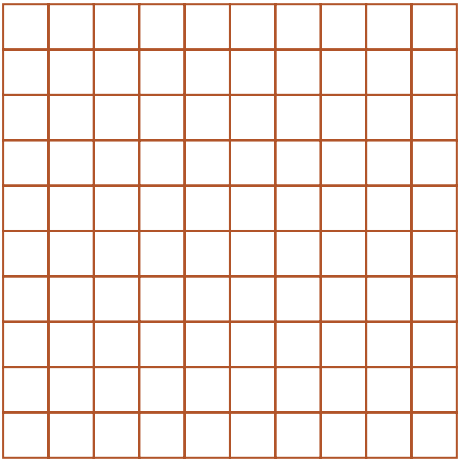
Representar la fracción $\frac{25}{1000}$ en una cuadrícula subdividida en centésimos exige un análisis que puede ser provechoso para profundizar en la relación entre centésimos y milésimos.

En los casos 1, 2 y 3, los alumnos saben que hay que subdividir los centésimos para representar los milésimos, pero no lo logran. En el caso 1, subdividen cada centésimo en 4, en los casos 2 y 3 en dieciseisavos. En los tres casos marcan 25 partes. El caso 4 pone de manifiesto una representación sencilla y correcta, que tiene detrás un conocimiento sobre equivalencia: $\frac{25}{1000}$ es equivalente a 2 centésimos más medio centésimo. Este conocimiento evita la necesidad de dividir el cuadrado en milésimos, lo cual es técnicamente difícil.

Pocos alumnos logran hacer desde el primer momento una representación como esta. Por ello, es necesario plantear varias actividades similares, seguidas de puestas en común, de manera que poco a poco todos lo logren.

Actividad 2.3
¿Cómo representar milésimos...?

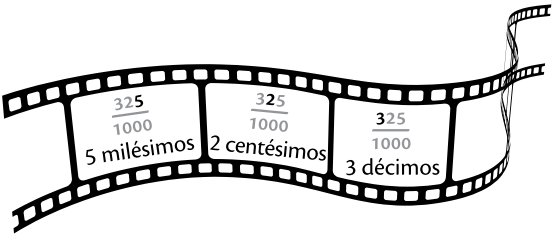
Represente la fracción $\frac{325}{1000}$ en el cuadro. SOLUCIONARIO



La notación desarrollada

A veces hace falta saber descomponer una fracción decimal, por ejemplo, $\frac{325}{1000}$ en décimos, centésimos, milésimos, etc.: $\frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$. Esta descomposición suele llamarse **notación desarrollada**. Actividades como las anteriores pueden favorecer

dicha descomposición. En cierto momento, deberá estudiarse la técnica que permite hacerlo de manera sistemática: la cifra de la derecha (5, en el ejemplo) corresponde al orden indicado por el denominador (milésimos). Las cifras que siguen hacia la izquierda indican, cada una, el orden siguiente: centésimos, décimos, y siguen los enteros…



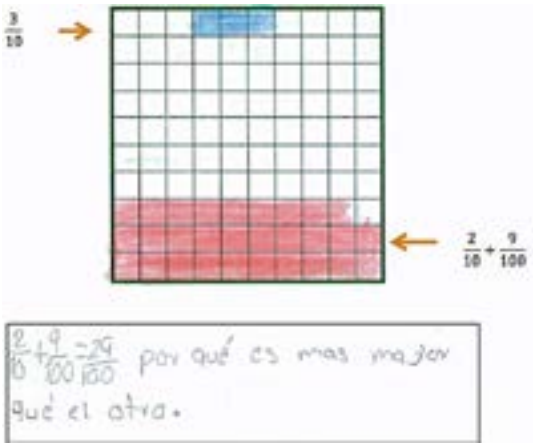
3. Relacionar fracciones decimales entre sí y con fracciones comunes

En las siguientes actividades, mediante el trabajo con el cuadrado de 10 por 10, se insistirá en el interés de relacionar fracciones decimales entre sí (por ejemplo, $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$, y con las fracciones comunes básicas, por ejemplo, $\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$).

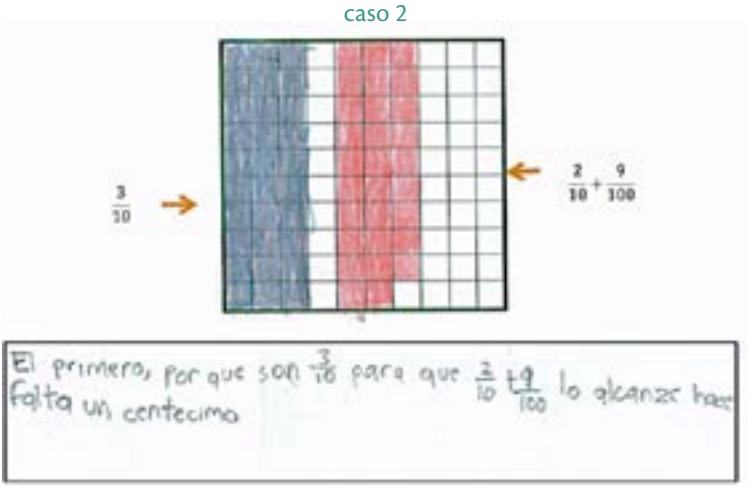
Actividad 2.4
Comparar fracciones decimales

Se pidió a un grupo de alumnos de sexto grado que dijeran qué fracción es mayor, si $\frac{3}{10}$ o bien $\frac{2}{10} + \frac{9}{100}$. Se les pidió también que justificaran su respuesta representando las fracciones en cuadrados cuadriculados. A continuación, se muestran dos respuestas[22]. Explíquelas con sus palabras. Preste atención al apoyo que ofrece la cuadrícula. Prevea errores que pueden ocurrir.

caso 1



caso 2



Actividad 2.5
Analizar una lección

A continuación, se analizará una lección de un libro de texto para sexto grado (ver figuras 13, 14 y 15). Resuelva la lección y después conteste las preguntas, y lea los comentarios que se hacen al respecto.

Fracciones decimales

22

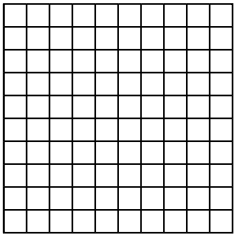
En el cuadrado unidad

Necesitan:
- Hojas de papel cuadriculado.

En una hoja de papel cuadriculado, trazá un cuadrado de 10 × 10 cuadraditos. Ese cuadrado será la unidad en toda la ficha.
Representá las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{20}$.

- ¿Es necesario contar todos los cuadraditos para representar $\frac{1}{2}$ del cuadrado unidad? ..... ¿Y para $\frac{1}{4}$? .....
- ¿Tres columnas de cuadraditos representan $\frac{1}{5}$? Expliquen por qué.
.....
- ¿Cuántos cuadraditos forman $\frac{1}{10}$ del cuadrado unidad? .....

1 En este cuadrado representá $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$ y colorealos.



- ¿Cuántos centésimos hay en $\frac{1}{4}$ de la unidad? .....
- ¿Cuántas veces cabe un centésimo en un décimo? .....
- ¿Cuántos décimos hay en 70 centésimos? .....
- ¿Cómo se escribe la mitad de un décimo como fracción decimal? .....

Si lo necesitás, representá las fracciones en hojas cuadriculas para responder o para controlar si la respuesta dada es correcta.

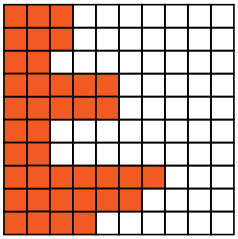
2 Para representar $\frac{1}{1.000}$, se debería dividir el cuadrado unidad en 1.000 partes iguales y marcar una de esas partes. ¿Será posible marcar $\frac{1}{1.000}$ en el cuadrado anterior aprovechando las divisiones que ya tiene?
.....
- Representá $\frac{1}{1.000}$ en el cuadrado unidad.
- ¿Cuántos milésimos hay en 1 unidad? .....
¿Y en $\frac{1}{2}$ unidad? .....

© Editorial Estrada S. A. - Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

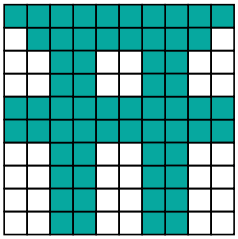
Representar fracciones decimales. Establecer relaciones entre distintas subdivisiones de una unidad.

Figura 13. Hacer Matemática en 6º. Lección 22 (Parte I), Saiz y Parra, 2011, p. 62.

3 ¿Qué fracción de la unidad está representada en cada caso? Escribí cada fracción de dos maneras diferentes.



.....



.....

Para determinar qué fracción está representada, podés contar primero los décimos enteros que están pintados y luego tratar de rearmar décimos con los demás cuadritos pintados.

Completar la unidad

© Editorial Estrada S. A. - Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Cómo jugar:

Se juega en parejas.
Se arma un mazo con las tarjetas de uno de los integrantes y se coloca boca abajo entre los dos jugadores. Por turnos, cada uno saca una tarjeta y representa en su cuadrado unidad - marcando con un punto o una X - la fracción que se indica en ella. Gana el que primero llena su cuadrado unidad.

Si con una tarjeta, el jugador se pasa de completar la unidad, ya no puede representarla y deja el juego. Gana el que la llenó justo y, si no, el jugador al que le haya quedado la menor cantidad de espacio libre.

Necesitan las tarjetas de Recortables y una unidad dibujada en una hoja cuadriculada.

- Anotá cuánto te faltó para llenar la unidad ..... .¿Ganaste? ..... .
- ¿Cuántas unidades se pueden formar con las tarjetas que levantaste? .....
- ¿Se completa la unidad con las tarjetas $\frac{5}{10}$; $\frac{10}{100}$ y $\frac{70}{100}$? Si falta o si sobra, determiná cuál es la fracción correspondiente. .....
- ¿Cuánto falta para completar el entero después de marcar $\frac{4}{10}$ y $\frac{10}{100}$? .....
- Un jugador sacó las tarjetas $\frac{500}{1.000}$; $\frac{50}{100}$; $\frac{90}{100}$ y $\frac{1}{10}$ y dice que luego de $\frac{1}{10}$ tuvo que retirarse. ¿Es correcto? .....

63

Figura 14. Hacer Matemática en 6º. Lección 22 (Parte II), Saiz y Parra, 2011, p.63.

Figura 15. Hacer Matemática en 6º. Tarjetas recortables, Saiz y Parra, 2011, p. 213.

Preguntas y comentarios[23]

a) ¿Cómo podrían resolver alumnos de 5º o 6º grados las siguientes preguntas y qué conocimiento podrían aportarles? SOLUCIONARIO

- ¿Es necesario contar todos los cuadraditos para representar $\frac{1}{2}$ del cuadrado unidad?
- ¿Cómo se escribe la mitad de un décimo como fracción decimal?

b) ¿Cómo podrían resolver el ejercicio 3 y qué podría aportarles? SOLUCIONARIO

c) ¿Qué puede aportarles el juego que se plantea al final de la lección? SOLUCIONARIO

Ventajas de relacionar fracciones decimales con fracciones que no tienen como denominador una potencia de 10

Relacionar a las fracciones decimales con otras fracciones cuyo denominador no es potencia de 10 (es decir, no es un uno

seguido de ceros, como $\frac{1}{2}$) puede ser muy útil por varias razones: permite ver que, a final de cuentas, todas son objetos de la misma naturaleza, fracciones, y que, por lo tanto, obedecen a las mismas reglas. Además permite apreciar mejor el tamaño de las fracciones decimales, por ejemplo, saber que $\frac{50}{100}$ es $\frac{1}{2}$, o que $\frac{75}{100}$ es $\frac{3}{4}$, da una clara idea del tamaño de esas fracciones.

También se pueden plantear problemas interesantes que llevan a analizar con más profundidad la noción de fracción y la relación entre fracciones decimales y fracciones comunes, como las siguientes:

- ¿Será posible marcar $\frac{1}{1000}$ del cuadrado aprovechando las divisiones que ya tiene?
- ¿Tres columnas de cuadritos representan $\frac{1}{5}$?

AULA
6º y
Secundaria

Actividad 2.6
El Juego «Atrapa el número escondido»

A continuación, analizará el juego «Atrapar al número escondido»[24]. El propósito didáctico se comunicará más adelante (en el solucionario), para permitirle abordar la situación como lo harían los alumnos, sin saber de antemano qué conocimiento se pretende propiciar con ella. De esa manera podrá valorar también en qué medida dicho propósito se cumple.

La situación se presenta bajo la forma de un juego y ofrece la posibilidad de ir mejorando una estrategia para ganar. Después de explicar el juego, se propone un análisis del contenido matemático implicado y de sus características didácticas. Finalmente, en un tercer momento, se le recomienda realizar el juego con alumnos del último grado de la primaria (6º) o con alumnos de secundaria. Se recomienda implementarlo varias veces, por ejemplo, dos veces a la semana durante un mes, para que los alumnos tengan oportunidad de ir mejorando sus procedimientos.

Dado que la implementación de esta actividad demanda un trabajo grupal (o con al menos dos personas más), se propone su realización para cuando tenga las condiciones requeridas.

Como en otras ocasiones, el juego se redacta aquí para aplicarse con alumnos.

Primera parte: a jugar...

Organización del juego

La actividad es grupal: dos jugadores escogen juntos un número que los demás tratarán de averiguar, mediante preguntas. Después de una primera fase con dos o tres juegos similares, se propone una segunda fase con una pequeña modificación.

Desarrollo de la primera versión del juego: con cualquier fracción

Primer momento: búsqueda de la fracción escondida

- Dos jugadores (de preferencia, hábiles para operar con fracciones) se ponen de acuerdo y anotan en un papel un número fraccionario entre 1 y 10 (por ejemplo, $2\frac{2}{5}$). Nadie más debe verlo.
- Los demás pueden hacer 10 preguntas en total, entre todos, para averiguar de qué número se trata.
- Las preguntas se deben poder contestar con «*sí*» o «*no*».
- Si participan 10 jugadores (individuales, o en parejas), cada jugador hace una pregunta. Si son más de 10 jugadores, algunos pueden agruparse en parejas para decidir juntos su pregunta. Si son menos de 10, algunos jugadores pueden hacer dos o más preguntas. En todos los casos, se hacen 10 preguntas en total.
- Un secretario apunta en el pizarrón las preguntas y las respuestas.
- Tras concluir la ronda de preguntas, cada jugador o pareja anota en un papel el número fraccionario que cree que es.
- Al final, se dice cuál era el número escondido.
- Gana el jugador o pareja que adivina el número elegido o, si no se logra, gana el que se acerque más.
- Repiten el juego dos o tres veces más, con las mismas reglas.

Puede ocurrir que, en ciertos momentos del juego, los alumnos, para responder las preguntas que les hacen sus compañeros, tengan que hacer cálculos difíciles con las fracciones. Por ejemplo, si el número escondido fuera $1\frac{1}{4}$ y les preguntan: «*¿la fracción escondida es menor a* $1\frac{2}{5}$*?*», ellos podrían no saberlo a simple vista. Una posibilidad es buscar fracciones equivalentes con el mismo denominador:

$$\frac{1\times5}{4\times5} = \frac{5}{20} \qquad \frac{2\times4}{5\times4} = \frac{8}{20}$$

Otra dificultad puede ser la de saber qué preguntar, cuando el juego vaya avanzado, por ejemplo, si ya saben que la fracción pensada está entre $1\frac{3}{5}$ y $1\frac{7}{8}$, y solamente queda por hacer una pregunta, ¿qué podrían preguntar?

Segundo momento: determinación del ganador

Si durante el juego algún alumno (o pareja) pregunta por un número específico y acierta, ese alumno ganó. Pero si ningún jugador logra averiguar el número, lo cual es probable, se procede a ver quién se acercó más, como se explica a continuación.

Después de la ronda de las preguntas, cada jugador (o pareja) escribe en un pedazo de papel cuál cree que es el número fraccionario escondido. A continuación, se apuntan los números de todos en el pizarrón. En ese momento se revela el número escondido, se anota también en el pizarrón. Entre todos ven quién se acercó más. Es posible que puedan descartar algunos números a simple vista, pero para otros tendrán que restar, por ejemplo, si la fracción pensada fue $1\frac{2}{5}$ y un jugador propuso $1\frac{1}{2}$ y otro propuso $1\frac{3}{10}$, deberán calcular: $1\frac{1}{2} - 1\frac{2}{5}$ y $1\frac{2}{5} - 1\frac{3}{10}$ para ver cuál es la diferencia más pequeña. Puede ocurrir que los alumnos no sepan cuál de las dos fracciones es mayor para así poder restar la mayor a la menor. En cuanto obtengan los denominadores comunes se darán cuenta.

$$1\frac{1}{2} - 1\frac{2}{5} = 1\frac{5}{10} - 1\frac{4}{10} = \frac{1}{10}$$

$$1\frac{2}{5} - 1\frac{3}{10} = 1\frac{4}{10} - 1\frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

En este caso… *¡Empataron!*

Tercer momento: Puesta en común

Una vez que ya se sepa quién ganó, se revisan de manera grupal, las preguntas y las respuestas. En esta revisión, se identificarán preguntas que fueron buenas porque ayudaron a eliminar muchos números, y preguntas no tan buenas, por ejemplo, las que refieren a un número en particular solo eliminan un número, siendo muy baja la probabilidad de averiguar el número escondido.

Se recomienda ver si algunos tendieron a usar fracciones decimales en sus preguntas, y si esto les ayudó a facilitar los cálculos. Si es así, hay que destacarlo, pues eso es lo que se propondrá hacer más adelante.

En este juego, como en muchos otros, es conveniente no corregir las jugadas de los alumnos mientras juegan. Se esperaría que en la puesta en común ellos mismos destaquen las preguntas que no resultaron buenas. Al jugar más veces, los alumnos las irán mejorando.

Desarrollo de la segunda versión del juego: con fracciones decimales

Se esperaría que, al jugar dos o tres veces, los alumnos se den cuenta de que les conviene «cercar» al número escondido mediante fracciones decimales, pues con estas es mucho más fácil operar. En esta versión, el juego se repite dos o tres veces más, pero ahora, en las preguntas, se utilizarán únicamente fracciones decimales. La fracción oculta puede ser decimal o no.

Primer momento: búsqueda de la fracción

Son las mismas instrucciones que en la primera fase, excepto que ahora se pide a los alumnos que, en sus preguntas, utilicen solamente fracciones decimales (si es necesario, se les recuerda que son aquellas cuyo denominador es una potencia de 10).

Segundo momento: puesta en común

En la puesta en común con los alumnos, después de analizar las preguntas y respuestas realizadas durante el juego, conviene destacar algunas de las acciones que se facilitan al utilizar fracciones decimales. Por ejemplo, si se sabe que el número oculto está entre $\frac{2}{10}$ y $\frac{3}{10}$, se pueden considerar las fracciones equivalentes $\frac{20}{100}$ y $\frac{30}{100}$ para seguir «acorralando» al número.

Segunda parte: analizar algunas características de la situación

Analice el juego y conteste: ¿qué se necesita saber para poder jugar?, ¿qué se puede aprender? SOLUCIONARIO

Tema 2. La introducción de la escritura con punto decimal

Las fracciones decimales se pueden anotar con escritura decimal, que es similar a la que se usa para los números naturales, pero equipada con un «punto decimal». Esta escritura facilita mucho el orden y la operatoria. Como toda escritura, tiene un componente convencional, y por lo tanto no es un conocimiento que los alumnos puedan construir por sí mismos, es necesario enseñárselos. Sin embargo, los decimales se ven con frecuencia en el entorno, por lo que es probable que los alumnos tengan algunas ideas acerca de lo que representan incluso antes de que sean trabajados en la escuela. Por ello, una introducción que puede resultar interesante para los alumnos consiste en partir justamente de esas ideas. Después, se puede plantear una segunda introducción a la escritura decimal, vinculándola con las fracciones decimales. A continuación, se da un ejemplo de actividad introductoria.

Actividad 2.7
¿Qué opinan los niños del punto?

La escritura decimal en el entorno. ¿Qué les dice a los niños?

Consiga portadores numéricos del entorno en los que aparezcan medidas de precio, de longitud, de pesos, de capacidad, expresadas con

punto decimal. Por ejemplo, empaques de mercancías, propaganda, recibos. Realice una pequeña exploración con unos cinco alumnos de entre segundo y cuarto grados de primaria acerca de lo que piensan que significan algunos de los números. Puede formular preguntas como las siguientes:

- ¿qué piensas que indican esos números?;
- Escoger un número con punto decimal y preguntar ¿qué número es este?, ¿cómo se lee?, ¿para qué sirve este punto?

Comparta con sus colegas maestros las respuestas recabadas. Comenten cómo podrían sacar provecho de esas respuestas para introducir la escritura con punto decimal en sus clases.

Tengan en cuenta lo siguiente: cuando los decimales se refieren a dinero, se interpretan como centavos, es decir, centésimos de peso. Se dice, por ejemplo, «22 pesos con 90 centavos» y no «22 pesos con 9 décimos». Con los niños, conviene respetar esta práctica. Esto significa que una limitación al trabajar en este contexto, al menos al principio, es que los decimales que entrarán en juego serán siempre de dos cifras después del punto.

Actividad 2.8
Pasar de la escritura fraccionaria a la escritura con punto decimal y viceversa

Para introducir la notación decimal haciendo puente con las fracciones decimales, puede ser útil pedir primero que se exprese una fracción

decimal, por ejemplo, $\frac{275}{1000}$ con notación desarrollada, es decir, que se exprese como suma de enteros, décimos, centésimos y milésimos.

$$\frac{275}{1000} = \frac{\square}{10} + \frac{\square}{100} + \frac{\square}{1000}$$

Y, enseguida, pasar esa escritura a un cuadro como el siguiente. Termine de llenarlo.

Unidades	Punto decimal	Décimos	Centésimos	Milésimos	Número obtenido
0	.	2	7	5	0.275
2	.	0	1	0	_____
					1.25
					0.01

Otra posibilidad es usar un cuadro como el de arriba para registrar medidas de longitud, tomadas con la cinta de décimos y centésimos de metro. Una vez anotados los números de unidades, décimos y centésimos, se explica la nueva notación con punto, por ejemplo: «El pizarrón midió 1 metro, 2 décimos y 5 centésimos. Eso se escribe así "1.25 metros"».

Independientemente de cómo se introduzca, hará falta bastante práctica para que los alumnos se apropien de esta escritura. Al principio es común ver errores como los que se muestran en la actividad siguiente.

Actividad 2.9
Errores en el paso de la escritura fraccionaria a la escritura con punto decimal

Interprete los errores de escritura que se muestran en el siguiente cuadro[25]. SOLUCIONARIO

Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{275}{1000}$	0	.	2	7	5	0.275
$\frac{90}{100}$	0	.	9	0	0	0.90
$\frac{45}{10}$	0	.	45	0	0	0.45
$\frac{9}{1000}$	0	.	0	0	9	0.9

1) 2)

Actividades como las que se hicieron a lo largo del tema 1 para fracciones decimales, pueden ser de mucha ayuda para que los alumnos comprendan la escritura decimal y superen algunos errores. A continuación, se presentan algunas de estas actividades.

AULA

Actividad 2.10
Comparar números decimales y representarlos para verificar

En esta actividad se plantean problemas sobre la representación de números decimales mediante las magnitudes longitud y superficie. Utilice algunas de las actividades que se proponen para diseñar una experiencia en aula con alumnos de sexto de primaria o de secundaria que ya tengan algunos antecedentes sobre los números decimales; preste atención a los errores.

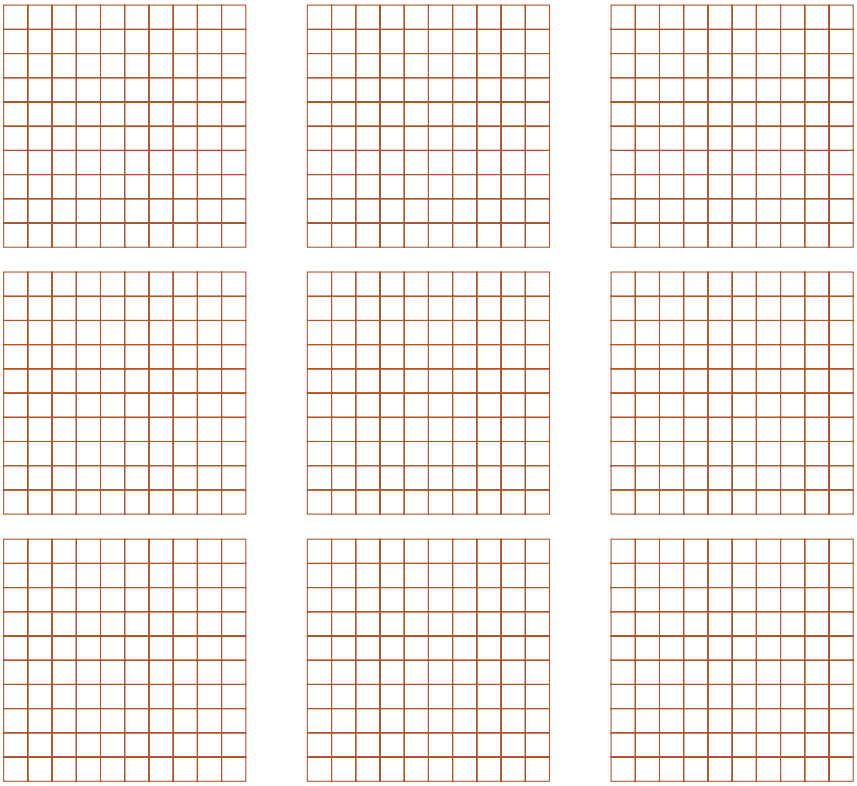
Prevea qué errores podrían cometer los alumnos, y considere si las representaciones que se proponen con superficies y con longitudes podrían ayudar.

Consignas para el alumno.

a) Indica qué número de cada pareja crees que es mayor.

- A = 0.455; B = 0.5
- C = 0.01; D = 0.001
- E = 1.29; F = 1.3
- G = 0.220; H = 0.22
- I = 0.99; J = 0.1

b) Representa cada número del ejercicio anterior en los siguientes cuadros. Puedes poner cada pareja de números en un mismo cuadro, cuando quepan. Anota debajo de cada cuadro las letras que se usaron para nombrar a los números. Considera que un cuadro (de 100 cuadritos) representa una unidad.



c) Usa tu cinta marcada en décimos y centésimos (ver actividad 2.1) para recortar tiras de papel que tengan esas medidas. Ordénalas y verifica tus respuestas del inciso **a**).

d) Puesta en común
Después de revisar los resultados, invite a los alumnos a formular algunas reglas para comparar números decimales. Conforme las formulen, invite a que se evalúen. Una regla que, si los alumnos no proponen, usted debería proponer para destacar que es falsa, es la siguiente:

Entre más cifras hay a la derecha del punto, mayor es el número.

Una regla correcta a la que pueden llegar es:

- el que tiene la parte entera más grande es mayor; si tienen la parte entera igual, entonces hay que ir comparando las cifras de la parte decimal de izquierda a derecha, cada cifra con la que le corresponde en el otro número —décimos con décimos, centésimos con centésimos, etc.—. El primer número que tenga la cifra más grande es el mayor.

Consigna para el docente:

- los números que se propusieron en la actividad fueron elegidos para dar lugar a errores que permitan después, en una puesta en común, reflexionar sobre el orden. Dé un ejemplo de un error posible.

Tema 3. La recta numérica y la densidad

Ubicar números decimales en la recta ayuda mucho a comprenderlos. Los tipos de actividad que se vieron en el capítulo 1 de este libro, tema 4 («Representación de las fracciones en la recta numérica»), son también adecuados para trabajar con números decimales.

En este apartado se verán solamente algunas actividades dirigidas a explorar una propiedad de los números decimales, que heredan de su origen como fracciones, o, más precisamente, como números racionales: la densidad.

Al mismo tiempo que resuelve las actividades, usted analizará su potencial didáctico y, como en otras ocasiones, podrá optar por aplicar algunas con sus estudiantes, principalmente de secundaria.

AULA
5º, 6º y Secundaria

Actividad 2.11
Avanza, pero no rebases (con calculadora)[26]

Primera parte: a jugar

Se puede jugar entre dos personas, o entre dos parejas A y B.

Juegue varias rondas, hasta que considere que ya tiene la estrategia que le impide perder. Después, analice el juego desde el punto de vista didáctico: ¿qué se necesita saber para jugar?, ¿qué se puede aprender?

Desarrollo

El juego trata de que los jugadores se acerquen lo más posible al último número puesto por el contrincante, pero sin rebasarlo. El que rebasa pierde.

Instrucciones

- Se traza en una hoja de papel una recta numérica de 100 a 200 (sin subdivisiones).
- Cada jugador debe disponer de una calculadora.
- El jugador A anota el 100 en su calculadora. Ese es su número de partida.
- El jugador B anota el 200 en su calculadora. Ese es su número de partida.

- El jugador A podrá utilizar solo la tecla (+) seguida de un número, el que él quiera; el jugador B solo utilizará la tecla (–) seguida de un número que elija.
- Los números que se sumen o resten pueden ser naturales o decimales.
- Por turnos, cada jugador realizará la operación que le corresponde, comenzando por el jugador A.
- Cada vez que un jugador sume o reste un número, mostrará el resultado al otro jugador, y enseguida lo anotará en la recta numérica compartida, en un lugar aproximado. Será necesario ir haciendo rectas, una debajo de la otra, para ampliar el espacio entre los números, pues muy pronto estos espacios se vuelven muy pequeños (ver el ejemplo en la actividad 2.12). Si hay una tercera persona que desee participar, puede encargarse de anotar en la recta.
- El primer jugador que alcance el número del otro jugador o lo pase, será el perdedor.

Dos jugadores que dominan el conocimiento implicado en el juego podrían proponer números indefinidamente, sin rebasar al contrincante. En algún momento deben reconocer que empataron.

A continuación, se muestra un ejemplo de una partida.

Jugador A	Jugador B
100 + 50 = 150	200 - 40 = 160
150 + 9 = 159	160 - 1= 159

El jugador B perdió, pues alcanzó al número puesto por el jugador A (159). ¿Qué podría haber puesto el jugador B para no perder?

SOLUCIONARIO

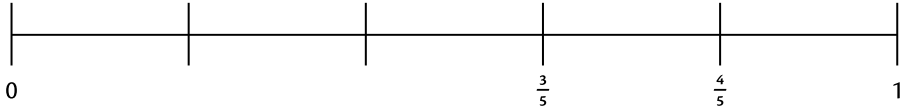
Segunda parte: analizar

¿Qué se necesita saber para jugar a este juego? ¿Y qué se necesita saber para no perder? ¿Qué se puede aprender?

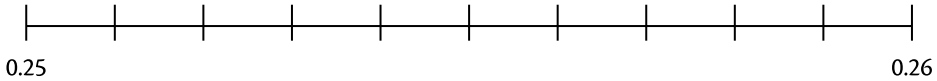
Actividad 2.12
Ubicar números entre otros dos

a) Encuentre un número (fracción o decimal) que esté ubicado entre los que se dan. SOLUCIONARIO

$\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$



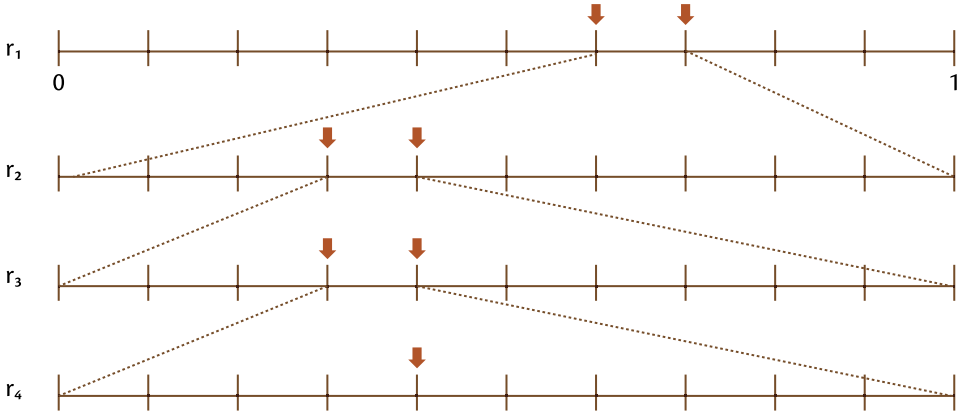
0.25 y 0.26



b) La recta r_2 es una ampliación de un fragmento de la recta r_1. Los puntos unidos por líneas punteadas, son los mismos puntos, y corresponden a los mismos números, solo que unos están en la recta r_1, y los otros en la ampliación, r_2.

La recta r_3 es una ampliación de la recta r_2 y r_4 es una ampliación de r_3.

Indique qué números corresponden a los puntos señalados por las flechas. SOLUCIONARIO



La noción de densidad

Entre dos números decimales, siempre existe otro que es más grande que el menor, y más chico que el mayor, es decir, uno que se encuentra entre los dos. Por ejemplo, entre 0.125 y 0.126, se encuentra 0.1251. Esta propiedad de los números racionales se llama **propiedad de la densidad**.

Tema 4. Errores frecuentes, noción de obstáculo

Ahora se centrará la atención en algunos de los errores que los alumnos cometen con mayor frecuencia al trabajar con decimales. Se distinguirán, mediante algunos ejemplos, errores que se deben a la naturaleza misma del conocimiento, y por lo tanto son inevitables, aunque pueden ser tratados y superados, se les denomina «de origen epistemológico», y errores que ocurren por la manera de enseñar, y por lo tanto, que pueden ser evitados cambiando esta. A estos últimos se les llama «de origen didáctico».

Actividad 2.13
Conocimientos que se esconden detrás de los errores

a) Los errores que se muestran a continuación son muy frecuentes. Escriba para cada uno, qué pudo haber pensado un alumno que lo llevó a cometerlo. Considere que son alumnos de sexto grado de primaria o de primero de secundaria. SOLUCIONARIO

i. Qué número es mayor ¿0.1953, o 0.212?

Respuesta: 0.1953

ii. ¿Qué número es igual a 0.6? ¿El 0.06 o el 0.60?

Respuesta: 0.06

iii. ¿Cuál de los números siguientes es 37 milésimos?

0.037 0.37 37 37 000.

Respuesta: 37 000[27]

iv. ¿Cuánto es 0.9 + 0.1?

Respuesta: 0.10

v. Tacha un resultado que estés seguro que está mal

49 × 0.23 =

11.27 1127 1517 11027

Respuesta: el 11.27

vi. ¿Cuál es el resultado de 0.25 + 1.17?

Respuesta. 1.32

b) Los errores iii) y vi) son de distinta naturaleza que los demás. ¿Qué diferencias observa? SOLUCIONARIO

Obstáculos epistemológicos

Guy Brousseau (1998) retomó el concepto de *obstáculo epistemológico* del trabajo desarrollado por G. Bachelard (1938) en el campo de la física, para referirse a ciertos conocimientos que son verdaderos bajo ciertas condiciones, es decir, tienen un campo de validez, pero bajo otras condiciones se revelan falsos. Una característica fundamental de estos obstáculos es que son parte del proceso de conocer, y en esa medida, no son evitables.

> *(…) es en el acto mismo de conocer íntimamente, que aparecen, por una especie de necesidad funcional, lentitudes, perturbaciones… se conoce contra un conocimiento anterior… (Bachellard, citado por Brousseau, 1998, p. 120)*[28]

Estos obstáculos, se identifican por los errores que producen. Se trata de errores debidos a conocimientos que se tienen y no a falta de ellos; no se superan fácilmente:

> *Un obstáculo se manifiesta entonces por los errores, pero esos errores no se deben al azar, están ligados entre sí por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, coherente si no es que correcta, un conocimiento antiguo que tiene éxito en todo un campo de acciones.*
>
> *Sucede que no desaparecen radicalmente, de golpe, se resisten, persisten y resurgen, se manifiestan mucho tiempo después de que el sujeto ha rechazado el modelo defectuoso de su sistema cognitivo consciente. (Brousseau, 1998, p. 121)*[29]

El reto en un proceso de enseñanza es identificarlos y multiplicar las ocasiones en que el error se haga evidente para los alumnos.

> *Es por ello que hace falta un flujo suficiente de situaciones nuevas, inasimilables por el [obstáculo], que lo van a desestabilizar, a volverlo ineficaz, inútil, falso, que van a volver necesaria la reconsideración o el rechazo (…) (Brousseau, 1998, p. 123)*

En lo que sigue veremos cómo ciertos conocimientos, que son correctos en el conjunto de los números naturales, generan obstáculos en el de los números racionales.

Actividad 2.14
Errores que podrían provenir de obstáculos epistemológicos

a) De los errores de la actividad 2.13 (inciso **a**), escoja uno que le parezca cumplir con las características de «obstáculo epistemológico» que señala Brousseau, en particular, que se trate de un conocimiento, y no de una falta de conocimiento. SOLUCIONARIO
b) Trate de encontrar más ejemplos de propiedades que se cumplen cuando se trabaja en el conjunto de los números naturales, pero que, al pasar al conjunto de los números racionales, se vuelven falsas. SOLUCIONARIO
c) De las actividades que se han revisado hasta ahora, o de otras que usted conozca, señale alguna que le parezca adecuada para poner en evidencia ante el alumno el error ***i*** de la actividad 2.13 (inciso **a**). SOLUCIONARIO

Obstáculos didácticos

Brousseau (1998) identificó otro tipo de obstáculos: los de origen didáctico, los cuales tienen que ver con la manera en que se enseñó algo. Un ejemplo de obstáculo didáctico, importante por su amplitud e impacto, fue la decisión de introducir los números decimales en la escuela elemental a partir del sistema decimal de medidas. Un decimal, por ejemplo, 1.25 metros se introducía como la medida equivalente a 125 cm, pero con la unidad metros. De esta manera, todo decimal resultaba equivalente a un número entero, con otra unidad. Dicho de otra forma: bastaba un cambio de unidad para convertir al decimal en entero. Esta concepción, señala Brousseau, «añadida a una mecanización del alumno, será un obstáculo hasta la universidad para una buena comprensión de los números reales». (Brousseau, 1998, p. 125)

Actividad 2.15
Errores que podrían provenir de obstáculos didácticos

Trate de identificar, con sus compañeros, errores en el trabajo con decimales que se puedan considerar producto de una decisión de enseñanza. SOLUCIONARIO

Tema 5. Números racionales decimales, números racionales no decimales, y números no racionales. PROFUNDIZACIÓN

Ya explicamos que, en el conjunto de números racionales, hay fracciones decimales y fracciones no decimales. Vimos también que ambos tipos de fracciones se pueden representar con notación decimal, aunque las representaciones tienen diferencias. En este apartado profundizaremos un poco más en las características de la representación decimal. Los aspectos que estudiaremos no forman parte del currículo de primaria, y solo algunos se ven en secundaria, sin embargo conocerlos, le ayudará a tener una visión más amplia de estos números.

1. Fracciones no decimales

Actividad 2.16
¿$\frac{3}{15}$ es equivalente a una fracción decimal?

a) Averigüe cuáles de las siguientes fracciones tienen una fracción equivalente decimal y cuáles no. Después, lea la explicación que se presenta acerca de una de las maneras de averiguarlo. SOLUCIONARIO

$\frac{1}{3}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{11}{15}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{13}{768}$

b) A continuación, se presenta una técnica para identificar si una fracción tiene una equivalente decimal. Lea el texto y enseguida aplique la técnica para verificar sus respuestas al inciso **a**.

¿Cómo saber si una fracción tiene una equivalente decimal o no?

Las fracciones decimales tienen como denominador una potencia de 10 (10^1, 10^2, 10^3…). Dado que la descomposición en factores primos de 10 es 2×5, cualquier potencia de 10 tendrá a esos mismos factores elevados a la misma potencia, por ejemplo, $1000 = 10^3 = 2^3 \times 5^3$.

Entonces, si se quiere saber por cuánto multiplicar el denominador de una fracción para obtener una potencia de 10, basta con ver qué factores faltan para lograr una expresión del tipo $2^n \times 5^n$. Por ejemplo, si el denominador es 40, dado que 40 es $2^3 \times 5$, el número por el que hay que multiplicarlo para obtener una potencia de 10 es 5^2 ($40 \times 25 = 1000$). Por lo tanto, una fracción como $\frac{13}{40}$ sí tiene equivalente decimal: $\frac{13}{40} = \frac{325}{1000}$.

En cambio, si en la descomposición del denominador aparece un factor primo que no es ni 2, ni 5, y si la fracción es irreductible (es decir, ya fue simplificada al máximo), entonces la fracción no tiene una equivalente decimal. Por ejemplo, si el denominador es 60, su descomposición es $2^2 \times 3 \times 5$. No hay manera de «deshacerse» del 3 para obtener una descomposición formada solamente por 2 y 5. Por lo tanto, una fracción irreductible cuyo denominador es 60 no tiene equivalente decimal.

Si la fracción es simplificable (no es irreductible), y si en la descomposición de su numerador hay también un factor 3, este se simplifica con el del denominador y desaparece.

La fracción así simplificada sí tiene equivalente decimal, por ejemplo:

$$\frac{48}{600} = \frac{2^4 \times 3}{2^3 \times 3 \times 5^2} = \frac{2}{5^2} = \frac{2 \times 4}{5^2 \times 4} = \frac{8}{100}$$

2. Notación decimal de las fracciones no decimales

Otra forma de averiguar si una fracción tiene o no una equivalente decimal consiste en dividir el numerador entre el denominador. Si en algún momento el residuo es cero, la fracción tiene equivalente decimal. El cociente de la división es justamente la expresión decimal de la fracción. Por ejemplo, $\frac{48}{600}$ es decimal pues la división de 48 ÷ 600 tiene residuo igual a 0:

$$\begin{array}{r} 0.08 \\ 600\,\overline{)\,4800} \\ -\,4800 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{48}{600} = 0.08$$

Si siempre queda un residuo, entonces la fracción no tiene equivalente decimal. Lo difícil en este caso es cómo saber que «siempre» quedará un residuo, es decir, cómo saber cuándo detener la división. Una forma de saberlo consiste en identificar el momento en el que las cifras del cociente se empiezan a repetir, como en el ejemplo, para $\frac{5}{6}$:

$$\begin{array}{r} 0.833\ldots \\ 6\,\overline{)\,50} \\ -\,48 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \end{array}$$

Puede observarse que una vez que queda un residuo de 2, este se convierte en 20 al que se resta 18, por lo que el 2 se repite indefinidamente.

La parte del cociente que se repite se llama **periodo**. En el ejemplo anterior el periodo está compuesto por una sola cifra: 3

El periodo se expresa, usando una línea sobre las cifras que lo constituyen:

$$\frac{5}{6} = 0.8\overline{3}$$

La fracción no decimal se puede expresar con notación decimal solamente de manera **aproximada**, con la precisión que se necesite, por ejemplo, hasta milésimos:

$$\frac{5}{6} \approx 0.83 \text{ o bien } \frac{5}{6} \approx 0.8333, \text{ etc.}$$

Actividad 2.17
Fracciones decimales (o equivalentes a decimales) y fracciones no decimales

a) Exprese las siguientes fracciones mediante notación decimal. Indique cuáles son decimales y cuáles no. Para las que no sean decimales, señale el periodo. SOLUCIONARIO

$\frac{1}{8} =$ $\qquad$ $\frac{10}{12} =$

$\frac{11}{125} =$ $\qquad$ $\frac{3}{48} =$

$\frac{25}{30} =$ $\qquad$ $\frac{25}{32} =$

b) Comente ahora la problemática que se expresa en el epígrafe de este capítulo: ¿por qué cuando el alumno multiplica el cociente de 7÷3, por 3, no obtiene de nuevo 7? SOLUCIONARIO

¿Cómo obtener la fracción que corresponde a un decimal?

Pasar un número con extensión decimal finita, como 0.175, a su expresión fraccionaria es muy sencillo: la fracción tiene como numerador el número sin punto decimal, y como denominador un «1» seguido de tantos ceros como cifras después del punto tiene el número, en este caso 3:

$$0.175 = \frac{175}{1000}$$

Para pasar un número *n* con extensión decimal periódica, por ejemplo, 2.735353535…, o $2.7\overline{35}$, a su expresión fraccionaria, se puede seguir el procedimiento que se explica enseguida.

Procedimiento para pasar una expresión decimal periódica a expresión fraccionaria

Primer paso:
Si el periodo del número en cuestión (n) tiene una cifra, dicho número se multiplica por 10, si el periodo tiene 2 cifras, se multiplica por 100, si tiene tres, por 1000, etc. Por ejemplo, el periodo de $2.7\boxed{35}3535\ldots$es de 2 cifras, entonces:

$$n = 2.735353535\ldots$$
$$100n = 273.5353535\ldots$$

Segundo paso:
Se hace la resta $100n - n$

$$\begin{array}{r} 273.5353535\ldots \\ -\quad 2.7353535\ldots \\ \hline 270.8000000\ldots \end{array}$$

Nótese que, en el resultado de esta resta, la extensión decimal ya es finita: 270.8

Tercer paso

Dado que $100n - n$ es igual a $99n$, podemos escribir:

$$99n = 270.8, \text{ de donde } n = \frac{270.8}{99}, \text{ o bien } \frac{2708}{990}$$

Entonces, $\frac{2708}{990}$ es la fracción decimal cuya expresión en notación decimal es: 2.735353535…

Actividad 2.18
De la expresión con números decimales a la expresión con fracciones

Exprese como fracciones los siguientes números decimales.

Número decimal	Fracción
$0.\overline{2}$	
$0.\overline{135}$	
$0.\overline{09}$	
$25.08\overline{1}$	

En resumen

- Toda expresión decimal con extensión decimal finita corresponde a una fracción decimal.
- Toda expresión decimal con extensión decimal infinita y periódica, corresponde a una fracción no decimal (se puede expresar de manera aproximada con un número con extensión decimal finita).

¿Y las expresiones decimales infinitas y no periódicas? De esas hablaremos enseguida.

3. Números que no son racionales: los irracionales

El libro de los Elementos[30], de hace más de 2300 años, da cuenta de cantidades que no pueden medirse de manera exacta una con la otra. Hoy en día se dice que una no puede expresarse como fracción de la otra. Por ejemplo, si se quiere medir la diagonal de un cuadrado tomando como unidad a uno de los lados de ese cuadrado, se encuentra uno con la sorpresa de que no existe ninguna fracción $\frac{a}{b}$ que cumpla con:

$$\text{Diagonal} = \frac{a}{b} \times \textit{lado}$$

Tampoco existe ninguna fracción $\frac{a}{b}$ que cumpla con:

$$\text{Circunferencia de un círculo} = \frac{a}{b} \times \textit{diámetro del círculo}$$

Se dice que esas cantidades, la diagonal de un cuadrado y el lado del cuadrado, o bien, la circunferencia de un círculo y el diámetro, son ***inconmensurables***. Es decir, no se puede medir de manera exacta una, tomando como unidad la otra.

¿Cómo se puede estar seguro de que la diagonal de un cuadrado no se puede medir con el lado como unidad?

Considere un cuadrado cuyos lados miden 1 (ver figura 16).

Por el teorema de Pitágoras, sabemos que esa diagonal mide $\sqrt{2}$ (puesto que la diagonal al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos).

Entonces, la medida de la diagonal, con la unidad «lado», es un número que al cuadrado da 2. Y,

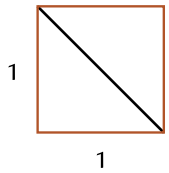


Figura 16. Cuadrado cuyos lados miden uno.

¿qué fracción al cuadrado da 2? Resulta que no existe. ¿Cómo lo sabemos? Hay demostraciones matemáticas que lo prueban, pero no las veremos aquí.

La diagonal de un cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$. La expresión decimal de este número, es infinita y NO periódica:

$$\sqrt{2} = 1.41213562373095\ldots$$

Esto mismo ocurre a otras medidas, por ejemplo, a Pi (la medida de una circunferencia, tomando al diámetro como unidad),

$$\pi = 3.141592653589793\ldots$$

Estos números se llaman **irracionales**. No se pueden expresar con una fracción. El conjunto de los números racionales e irracionales, positivos y negativos, se llama conjunto de los **números reales**.

En resumen, tenemos:

			Representación decimal
Reales	Racionales	Fracciones Decimales*	Extensión decimal finita $\frac{1}{4} = 0.25$
		Fracciones no decimales	Extensión decimal infinita y periódica $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$
	Irracionales	NO son fracciones	Extensión decimal infinita NO periódica 3.141592653589793...

* O que tienen una fracción equivalente decimal

Finalmente, ¿Cuáles son los *números decimales*?

Hay al menos dos definiciones que en los libros de texto pueden considerarse correctas, pero no son equivalentes, es decir, un número puede ser decimal en una y en otra no serlo. Por lo tanto, es necesario tomar una decisión sobre cuál se usará.

1. Números decimales son cualquier expresión con punto decimal (incluye entonces a los racionales y a los irracionales, a las extensiones decimales finitas e infinitas, periódicas y no periódicas).
2. Los números decimales son los equivalentes a fracciones decimales. Se definen como números del tipo $\frac{a}{10^b}$ con a y b enteros. Su expresión con notación decimal, por lo tanto, es con extensión decimal finita. Son un subconjunto de los números racionales.

   Bajo esta definición, ni las fracciones que no son decimales, ni los irracionales son *números decimales*.

La segunda definición es la más utilizada en la educación básica y es la que adoptamos aquí.

El trabajo sobre números decimales continuará en el capítulo 2 del volumen II, en el marco de las estructuras multiplicativas.

Solucionario

Capítulo 1. Las fracciones y la medida

Actividad 1.1
Comunicar una medida: los listones

Inciso e (Segunda parte: analizar)

La tira C es la más fácil de reproducir pues es unitaria y el denominador es potencia de 2. Con doblar dos veces la unidad, se podrá ver que cabe cuatro veces en la tira.

Las tiras A y B son más difíciles. Probablemente A ($\frac{2}{5}$) es la más difícil sobre todo porque no es unitaria. No basta con ir probando dobleces de la tira (en 2, en 3, en 4, en 5), hay que considerar dos de las sub-unidades que se generan.

Actividad 1.3
Análisis de lecciones de un libro de texto de tercer grado

Inciso a

Lección 31

Magnitudes
Longitud y superficie.

Tareas

Consignas 1:

1. Fabricar longitudes (tiras) que midan 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ de un metro. Se trata de un conjunto formado por una unidad y subunidades que será usado para medir.
2. Describir formas de construcción de longitudes con una medida dada.

Consignas 2:

1. Medir objetos del salón con las tiras construidas previamente.
2. Hallar objetos que tengan ciertas medidas de longitud.

Lección 32

Magnitudes

Superficie.

Tareas

1. Representar gráficamente ciertas medidas de superficie: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ de unidades dadas.
2. Determinar la fracción de la superficie de una figura que está iluminada.

Inciso b

Lección 32

Algunas características de las actividades de la lección 32 que exigen un conocimiento mayor que las usuales, son:

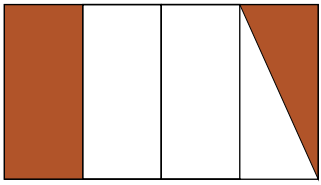
- en la *consigna 1*, las figuras no vienen subdivididas, lo que enfrenta a los alumnos al reto de hacer las partes del mismo tamaño, y del tamaño adecuado. El docente puede llevar la actividad más lejos pidiendo más representaciones de cada fracción;

- en la *consigna 2*, es notorio que en la figura circular, las partes en que está subdivida la figura no son iguales. Si el alumno se limita a contar el número de partes, no obtendrá la respuesta correcta. Él debe subdividir la figura en partes iguales. En las figuras rectangulares, hay dos partes iluminadas y no solamente una, y además, no están yuxtapuestas. Las tres figuras constituyen representaciones poco usuales de las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

Actividad 1.4
Algunas variantes del tipo de tarea «sombrear la figura»

Inciso a

- La unidad no está dividida en 4 partes «iguales».
- El triángulo es $\frac{1}{8}$ porque con 8 como ese, se puede armar o completar la unidad. Por lo tanto, está sombreado $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ de la figura.

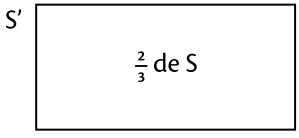


Inciso b

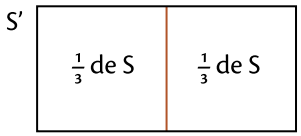
- Algunos rectángulos que corresponden a fracciones unitarias son $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24}, \frac{1}{54}$.
- También se pueden expresar superficies con fracciones no unitarias, por ejemplo, $\frac{3}{54}$.

Inciso c

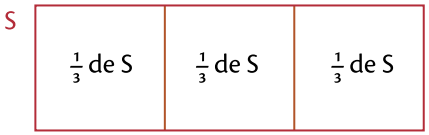
La superficie siguiente es $\frac{2}{3}$ de otra superficie S. Llamémosla S'.



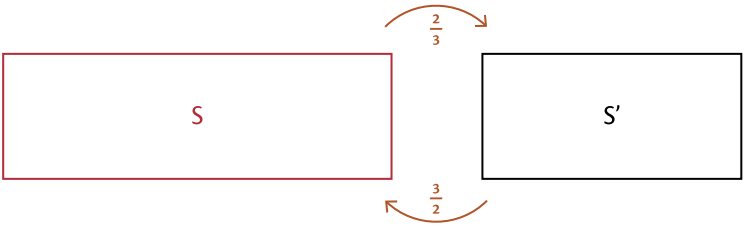
Puesto que S' es $\frac{2}{3}$ de S, si la dividimos en dos partes obtendremos $\frac{1}{3}$.



Para tener a S completa, es decir, los $\frac{3}{3}$ de S, hace falta poner otro tercio de S, que viene siendo $\frac{1}{2}$ de S'

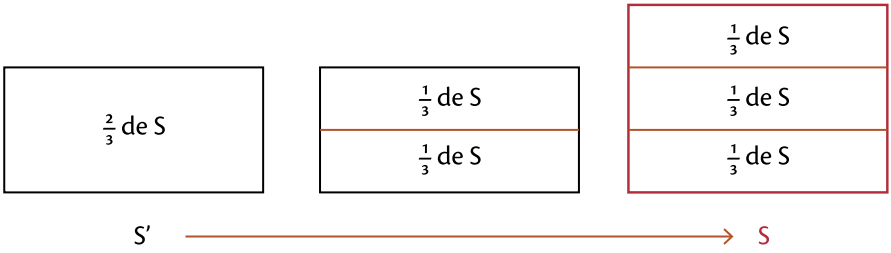


Cabe observar que, para reconstruir la superficie S, se dividió S' entre el numerador de $\frac{2}{3}$, y se tomaron tantas partes como indicó el denominador, es decir, ¡se hizo lo inverso de lo que se hace normalmente! De hecho, como puede verse, S' es $\frac{3}{2}$ de S.



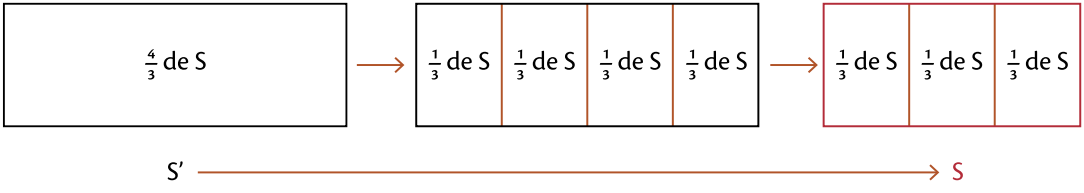
Se trata de un problema difícil. Es probable que los alumnos lo confundan con el que están habituados a resolver: obtener $\frac{2}{3}$ del rectángulo S. Para ayudarlos a ver su error, se puede hacer lo siguiente: primero, preguntar «nos dicen que la superficie S' (mostrarla) es $\frac{2}{3}$ de una superficie S, ¿creen que la superficie S es más grande o más chica que S'?», en la discusión, se esperaría que algunos alumnos pueden convencer a otros que S debe ser más grande que S'. Después, para verificar si la superficie S que obtuvieron es correcta, pueden aplicarle la fracción $\frac{2}{3}$ y ver si sale S'.

Con respecto al número de soluciones: ahora sabemos que S es $\frac{3}{2}$ de S'. Pero… hay muchos rectángulos que tienen un área dada. Para obtener por lo menos un rectángulo más que cumpla con ser $\frac{3}{2}$ de S', podemos repetir el procedimiento: obtener $\frac{1}{2}$ de S', pero esta vez haciendo un corte horizontal en lugar de vertical:



Inciso d

Ahora S' es $\frac{4}{3}$ de otra superficie S. Entonces, para obtener primero $\frac{1}{3}$ de S, hay que dividir S' en cuatro partes. Luego, para tener $\frac{3}{3}$ de S, tomar 3 de esas partes.



Nótese que esta vez S es más pequeña que S'. Así, en este problema, que es el inverso de tomar una fracción de algo, si la superficie que estamos viendo es una fracción mayor que 1 de otra superficie, esta última es de menor tamaño que la primera. ¡Todo en este problema ocurre al revés!

Actividad 1.5
¿Cuáles son mitades?

Inciso b

La afirmación de que la parte «no es mitad porque se forman tres pedazos», deja ver la idea de que la mitad de A se obtiene cortando A solamente en dos pedazos. La situación ayuda a ver que esa idea puede resultar falsa.

La afirmación de que «recortando, todo sería mitad» probablemente se debe a que, al ver que se cortaba la pieza ***d***, la niña pensó que se trataba de quitar un pedazo, y no se dio cuenta de que se trataba solamente de reacomodar.

Inciso c

Una de las formas de ayudar a los alumnos a ver que las partes son iguales aunque no tengan la misma forma, y aunque no estén formadas por el mismo número de pedazos, es recortar las piezas y reacomodarlas.

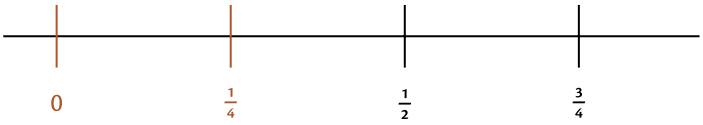
Actividad 1.7
Ubicar fracciones en una recta numérica

Inciso b

Mientras no haya un segundo número en la recta, la unidad no está aún definida, por lo tanto, el 0 puede estar en cualquier punto, a la izquierda de $\frac{1}{2}$.

Inciso c

El segmento entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ es $\frac{1}{4}$ (puesto que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$). Por lo tanto, el cero está a la izquierda de $\frac{1}{2}$, al doble de esa distancia (entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$):



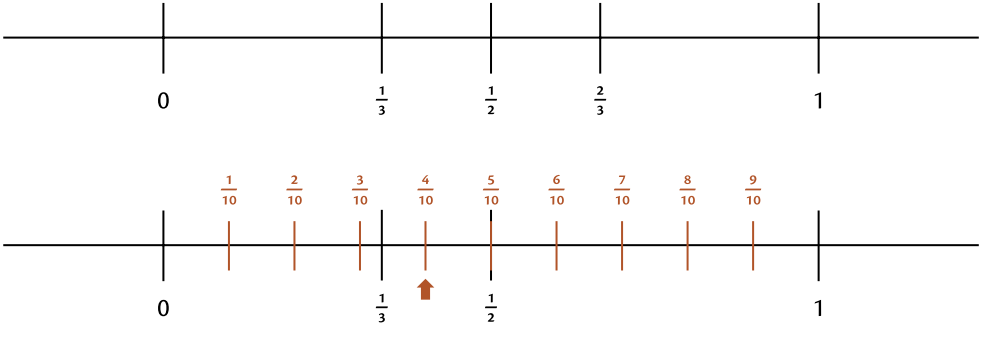
Inciso d

- Primera recta. La respuesta es $\frac{3}{5}$.
- Segunda recta. Una de las respuestas correctas es $\frac{1}{3}$ de 2 unidades, pero dejaría sin resolver cuál es la fracción de una unidad. La respuesta es $\frac{2}{3}$ de una unidad.
- Tercera recta: La respuesta $\frac{1}{4}$ es incorrecta. La respuesta $\frac{1}{4}$ de 3 es correcta pera deja sin resolver cuál es la fracción de una unidad. La respuesta correcta es $\frac{3}{4}$ de una unidad.

Inciso e

No es difícil descubrir que entre estas dos fracciones está, al menos, la fracción $\frac{1}{2}$. Pero… ¿hay alguna fracción entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$? Algunas de las maneras de encontrar fracciones en ese intervalo son las siguientes.

- Subdividir la unidad en un número de partes suficientemente pequeño para que algunas marcas queden entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, por ejemplo, en décimos.



Si fuera necesario, la subdivisión podría hacerse en un mayor número de partes, teóricamente tan grande como se quiera.

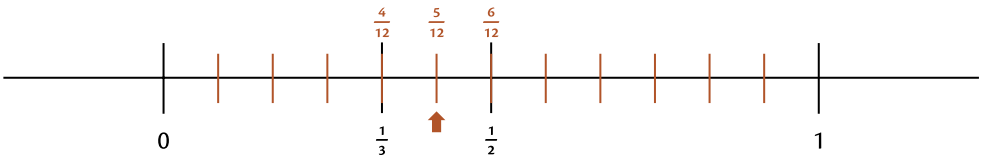
Dos formas más sistemáticas, son las siguientes.

- Sumar a la fracción menor, esto es, a $\frac{1}{3}$, la mitad de la distancia entre las dos fracciones.

  ¿Y cuánto vale esa mitad? La distancia entre las dos fracciones es de $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

  La mitad de $\frac{1}{6}$ es $\frac{1}{12}$.

  Entonces, la fracción $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ está a la mitad entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.



Este procedimiento puede aplicarse a cualquier par de fracciones, por lo tanto, puede considerarse como prueba de que entre cualquier par de fracciones hay una fracción.

- Finalmente, otro procedimiento consiste en obtener fracciones equivalentes a las fracciones dadas, con denominadores suficientemente grandes, para que se facilite identificar fracciones intermedias, por ejemplo, $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ y $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$. Es posible ver que entre las dos están $\frac{21}{60}$, $\frac{22}{60}$... etc.

Actividad 1.8
Análisis de lecciones de un libro de texto de quinto grado. Parte I

Inciso a

Las tareas del inciso 1 de la lección corresponden a:

- dada una marca en la representación, determinar qué fracción le corresponde (B $\rightarrow \frac{1}{2}$; A $\rightarrow \frac{1}{4}$);
- dada la fracción de unidad, indicar a qué marca corresponde ($\frac{3}{4} \rightarrow$ C).

En las dos primeras tareas se habla de **partes de la carrera**, en la última se pregunta por la **fracción** empezando a relacionar el lenguaje cotidiano con el lenguaje matemático.

Las tareas del inciso 2 de la lección son del mismo tipo que las del inciso 1 (determinar la fracción o el punto) salvo la correspondiente a la segunda tarea que requiere determinar si un cierto punto está a más de la mitad de la carrera.

El segmento de la representación de la carrera en el inciso 1 está subdividido en 4 partes iguales, mientras que en el 2, se encuentra subdividido en 5 partes iguales.

En cuanto al lenguaje involucrado, las preguntas en el inciso 2 incluyen representaciones numéricas de las fracciones mientras que en el 1 no.

Actividad 1.9
Análisis de lecciones de un libro de texto de quinto grado. Parte II

Inciso a

La primera recta del inciso 3 ya está subdividida en 6 partes iguales y los alumnos deben seleccionar qué subdivisiones usar para representar medios o tercios. En cambio, en las demás, la subdivisión queda bajo la responsabilidad de los alumnos, lo cual puede ser problemático, porque se suelen preguntar, por ejemplo: «para tener quintos, ¿hay que hacer 5 subdivisiones? ¿O hay que lograr 5 espacios iguales?».

Inciso b

En relación con las 4 rectas del inciso 3 de la lección.

- La primera recta está subdividida en sextos, y se deben representar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, por lo tanto la cuestión será determinar cuál es el punto medio, y luego identificar cuál de las «rayitas» corresponde a $\frac{1}{3}$. Debajo de la recta aparece una indicación de lo que debe cumplirse para identificar el punto correspondiente a $\frac{1}{3}$. En las otras tres rectas no se marcaron las subdivisiones.
- En la segunda recta podrán representar $\frac{1}{2}$ con cierta facilidad (mitad del segmento [0,1]). Para ubicar $\frac{1}{6}$, en uno de los mensajes de la derecha se dan indicaciones de dividir primero por la mitad y luego cada mitad en tercios. Esto permite establecer relaciones entre las fracciones, en este caso entre medios y sextos, a la vez que evita la laboriosa tarea de dividir un segmento en 6 partes iguales. Por cierto, cuando se va a hacer una subdivisión de un segmento en partes iguales, cada vez que se pueda es mejor hacerlo en dos pasos. Por ejemplo, para dividir en octavos, se puede dividir el segmento por la mitad, luego nuevamente por la mitad (se obtienen cuartos) y otra vez por la mitad (se obtienen octavos).
- En la tercera recta se trata de 2 fracciones equivalentes que están representadas por el mismo punto. Es importante que los alumnos comprendan que no es casualidad. Si se divide $\frac{1}{3}$ por la mitad, se obtienen sextos, ya que entran dos en cada tercio y 6 en los tres tercios que forman el entero; entonces, si en un tercio entran 2 sextos, en $\frac{2}{3}$ entran 4 sextos, es decir, $\frac{4}{6}$.
- En la cuarta recta aparecen fracciones conocidas, como $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, y otras mayores que la unidad. Para representar $1\frac{1}{2}$ (que es lo mismo que $1 + \frac{1}{2}$), tendrán que trasladar la unidad a partir de 1, marcar el punto 2, y después, a la mitad entre 1 y 2, el punto $1\frac{1}{2}$, o bien trasladar directamente el segmento $[0, \frac{1}{2}]$ a partir del 1. Para ubicar al número $2\frac{1}{4}$, podrán trasladar el segmento $[0, \frac{1}{4}]$ a partir del 2.

Inciso c

En las cápsulas informativas se explica cómo representar sextos, a partir de representar medios y tercios.

Inciso d

Se plantean relaciones entre medios y tercios; tercios y sextos, y medios y cuartos. Esto favorece que los alumnos descubran y analicen equivalencias entre fracciones, por ejemplo, entre $\frac{2}{6}$ y $\frac{1}{3}$, y establezcan otras relaciones más elaboradas, por ejemplo, $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}$.

Inciso e

Tomar la parte que entra 4 veces en la unidad.

Actividad 1.11
Resolviendo problemas de fracciones con cálculo mental

Inciso f

Al sumar de $\frac{2}{5}$ en $\frac{2}{5}$ a partir de cero, no se pasa por el número 1. El primer entero por el que se pasa, después de sumar 5 fracciones, es 2 y después, 4, 6, 8,10:

$$\mathbf{0}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5}, \mathbf{2}, 2\frac{2}{5}, 2\frac{4}{5}, 3\frac{1}{5}, 3\frac{3}{5}, \mathbf{4}, 4\frac{2}{5}\ldots$$

Entonces, la variable que hace más difícil esta actividad es que el numerador ya no es 1, ni es equivalente a una fracción de numerador 1.

Inciso h

Una idea clave que los alumnos pueden establecer al intentar contestar, y al discutir sus procedimientos es: si las dos fracciones que se suman son menores que la mitad, su suma será menor que 1. Y también, si ambas son más grandes que la mitad, la suma será más grande. Es más difícil en los otros casos, como el de $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$, en el que puede encontrarse

una manera de averiguar con la siguiente pregunta auxiliar: ¿Cuánto le falta a $\frac{3}{4}$ para completar el entero?

Actividad 1.14
El algoritmo de la suma de fracciones

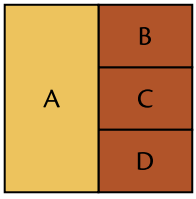
Explicación sobre el procedimiento $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

La idea es obtener fracciones con el mismo denominador para sumar:

- una fracción equivalente a $\frac{a}{b}$ es $\frac{ad}{bd}$ (se multiplican tanto numerador como denominador por *d*, que es el denominador de la segunda fracción);
- una fracción equivalente a $\frac{c}{d}$ es $\frac{bc}{bd}$;
- con eso, se tienen ya dos fracciones equivalentes con mismo denominador –*bd*– (aunque no necesariamente, las más simples);
- entonces, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ o, lo que es lo mismo, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Explicación sobre la inconveniencia de enseñar el algoritmo: el algoritmo de la suma de fracciones está basado en la noción de equivalencia. Si se enseña directamente el algoritmo, queda oculto el uso de la equivalencia, y con ello, lo que justifica al algoritmo.

Actividad 1.15
Importancia de la unidad



Conteste las preguntas.

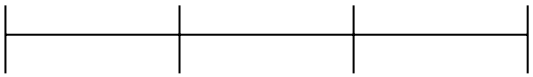
B es $\frac{1}{3}$ de A o bien $\frac{1}{6}$ de todo el cuadro o bien $\frac{1}{2}$ de la superficie ocupada por B y C.

Actividad 1.16
Cambiando el dato desconocido

Inciso a

Tracen un segmento L de cualquier tamaño. Este segmento mide $\frac{2}{3}$ de L'. Tracen L'

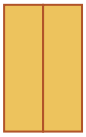
$L = \frac{2}{3} L'$



$L' = 1\frac{1}{2}$ de L

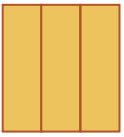
Inciso b

Tracen una superficie rectangular S de cualquier tamaño. Esa superficie es $\frac{2}{3}$ de S'. Tracen S'.



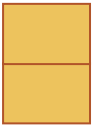
Superficie S (es $\frac{2}{3}$ de S')

$\frac{1}{3}$ de S'



$\frac{3}{3}$ de S'

Otra solución:



Superficie S (es $\frac{2}{3}$ de S')

$\frac{1}{3}$ de S'

$\frac{3}{3}$ de S'

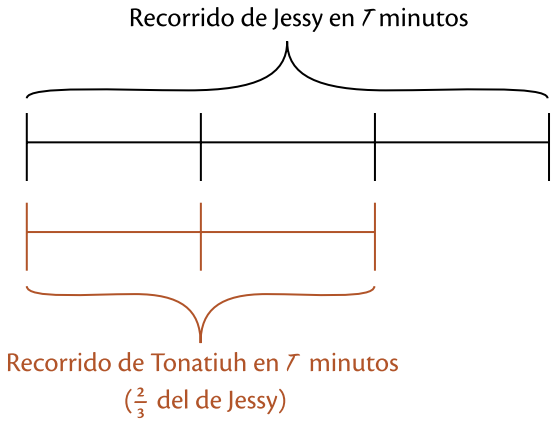
Actividad 1.17
Fracciones ocultas...

Una idea: ver qué parte del jardín hace cada uno en solo un día. Luego, ¿qué parte del jardín hacen los dos juntos, en un día?...

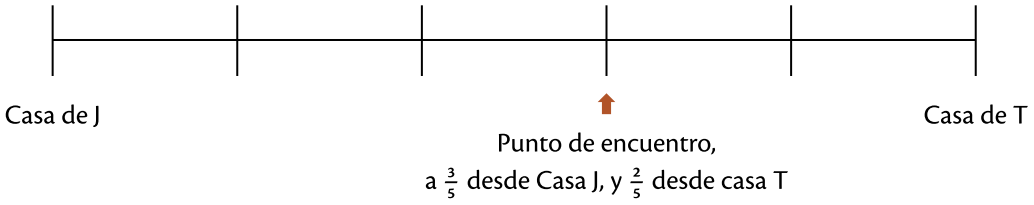
La respuesta es: 3 días

Actividad 1.18
Intervienen fracciones de longitud y, en el fondo, también razones

Una manera de resolver este problema es la siguiente: el tiempo que toma a Jessy hacer el recorrido es menor que el que toma a Tonatiuh, por lo que sabemos que Jessy camina más rápido que Tonatiuh. De hecho, el tiempo que hace Jessy es $\frac{2}{3}$ del tiempo que hace Tonatiuh, pues 20 es $\frac{2}{3}$ de 30, —nótese que aquí la fracción se usa para expresar una relación entre cantidades—. Sería de esperar entonces que, en un tiempo dado, Jessy recorra más distancia que Tonatiuh, de hecho, Tonatiuh debería recorrer $\frac{2}{3}$ de lo que recorre Jessy.



Y como la distancia entre las dos casas es la suma de los recorridos, entonces:

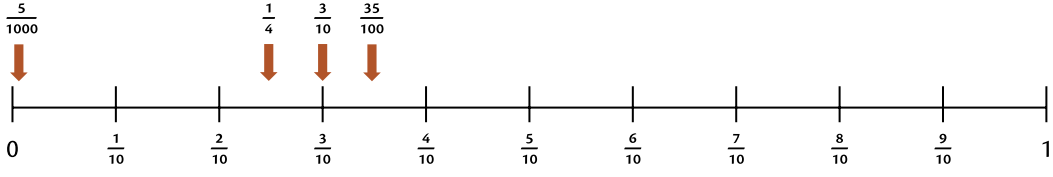


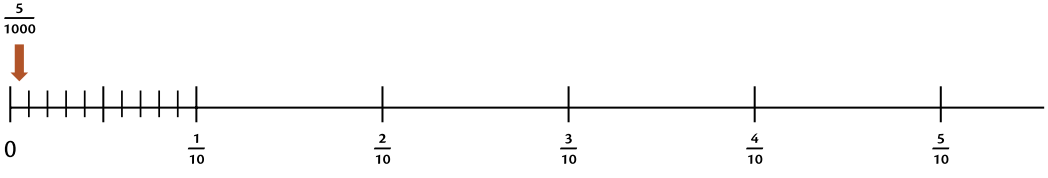
Y, finalmente el tiempo: si a Jessy le toma 20 min hacer todo el recorrido, hace $\frac{3}{5}$ del recorrido en $\frac{3}{5}$ de 20 min, es decir, 12 min. Así mismo, Tonatiuh hace $\frac{2}{5}$ del recorrido en $\frac{2}{5}$ de 30 min, es decir, 12 min.

Capítulo 2. Los decimales y la medida

Actividad 2.2
Dos representaciones de las fracciones decimales

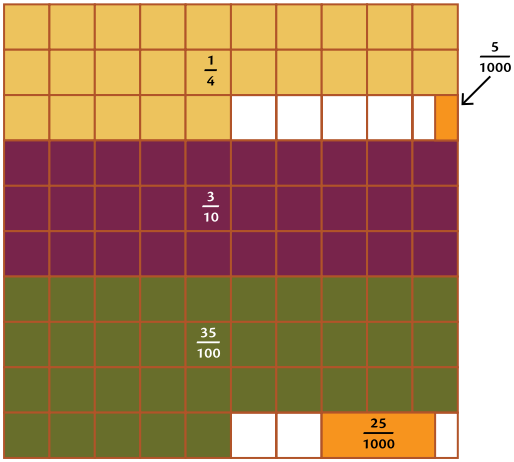
Inciso a





Dado que $\frac{5}{1000}$ es la mitad de $\frac{10}{1000}$, es decir, simplificando, de $\frac{1}{100}$, se ubica a la mitad del intervalo entre 0 y $\frac{1}{100}$.

Incisos b y c



Inciso d

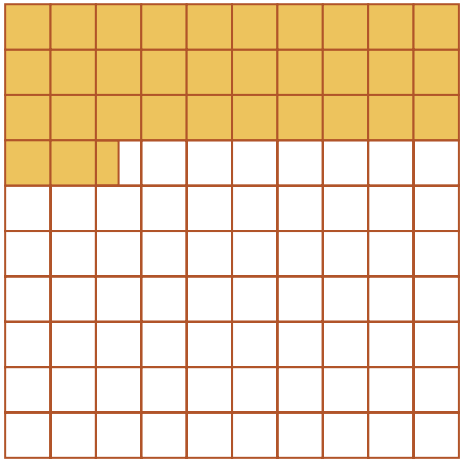
Caso 1. Incorrecto: dividieron cada centésimo en 4 partes en lugar de en 10. Su entero está formado por $\frac{400}{400}$ en lugar de milésimos. Lo que sombrean es $\frac{25}{400}$.

Casos 2 y 3. Incorrectos: dividieron cada centésimo en 16 partes en lugar de en 10. Su entero está conformado de $\frac{1600}{1600}$. Sombrearon $\frac{25}{1600}$.

Caso 4. La respuesta es correcta: al parecer ellos sabían que un centésimo equivale a 10 milésimos, porque, sin necesidad de marcar los milésimos, sombrearon dos centésimos (20 milésimos) y la mitad de otro centésimo (5 milésimos), total $\frac{25}{1000}$.

Actividad 2.3
¿Cómo representar milésimos?

Represente la fracción $\frac{325}{1000}$ en el cuadro.



Actividad 2.5
Analizar una lección

Inciso a

¿Cómo podrían resolver alumnos de 5to o 6to grados las siguientes preguntas y qué conocimiento podrían aportarles?

- ¿Es necesario contar todos los cuadraditos para representar $\frac{1}{2}$ del cuadrado unidad?

Esta pregunta ayuda a relacionar fracciones decimales con las comunes. Al mismo tiempo puede servir para que cuando tengan que representar $\frac{50}{100}$ sepan que no necesitan contar todos los cuadritos. De la misma manera, es útil que sepan que $\frac{1}{10}$ del cuadrado unidad corresponde a una columna (de 10 cuadritos). Esto facilita representar otras fracciones, por ejemplo $\frac{21}{100}$, con 2 columnas y un cuadrito.

- ¿Cómo se escribe la mitad de un décimo como fracción decimal?

Esta pregunta es difícil. Se puede contestar al tomar en cuenta un aspecto gráfico: un décimo del cuadrado unidad corresponde a una columna, por lo que medio décimo corresponde a la mitad de una columna. La columna está formada por 10 cuadritos, cada uno de los cuales son centésimos del cuadrado unidad. Entonces, la mitad de una columna son $\frac{5}{100}$ (o $\frac{1}{20}$ porque ya tuvieron que representar la fracción $\frac{1}{20}$ en la primer pregunta de la lección 22).

Es interesante y diferente de lo habitual que, para representar $\frac{1}{20}$, tengan que pensar en mitad de columnas y para $\frac{1}{2}$ en mitad del cuadrado unidad (cambio de universo de referencia).

Inciso b

- ¿Cómo podrían resolver el ejercicio 3 y qué podría aportarles?

El hecho de que se pidan dos escrituras diferentes para las fracciones de unidad representadas, propicia que los alumnos vayan más allá de contar centésimos. Un camino más rápido que se sugiere en el texto que se encuentra en la etiqueta amarilla que está a la derecha de los cuadrados, consiste en considerar décimos pintados (es decir, columnas, que son agrupamientos de 10 centésimos).

Inciso c

- ¿Qué puede aportarles el juego que se plantea al final de la lección?

En las partidas simuladas del juego, se plantean comparaciones y operaciones entre las fracciones decimales. La idea no es enseñarles a simplificar, sino a establecer relaciones. Por ejemplo $\frac{5}{10}$ es la mitad del cuadrado unidad y esa parte también puede pensarse como $\frac{50}{100}$ (probablemente lo han hecho antes). La simplificación —como toda buena técnica— es muy útil pero opaca para los alumnos, ni siquiera

se puede «ver» que no varía la cantidad aunque sí su escritura. Los alumnos creen que se achicó la fracción.

Se pretende que, para interpretar a los décimos, en vez de contar todos los cuadritos del cuadrado y dividan esa cantidad entre 10, consideren que para que sea $\frac{1}{10}$ tiene que entrar 10 veces en el cuadrado, por lo tanto equivale a una columna de 10 cuadritos. Es decir, con estas fracciones hay que hablar de columnas, no solo de cuadraditos y por supuesto, de mitades o cuartas partes del cuadrado unidad. Representar $\frac{1}{5}$ es interesante porque una solución «elegante» es considerar 2 columnas.

Actividad 2.6
El juego «Atrapa el número escondido»

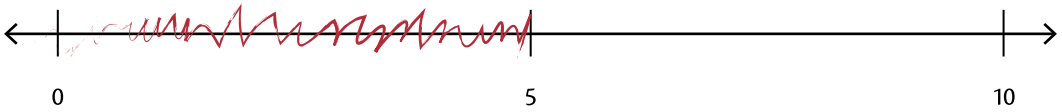
Segunda parte: analizar algunas características de la situación

A continuación, se presentan algunas características de la situación didáctica «Atrapar el número escondido».

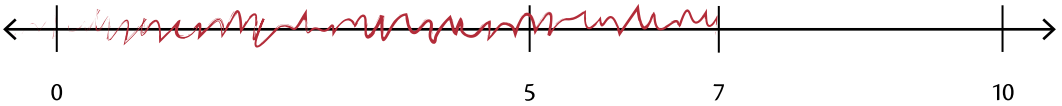
- Trabajar con fracciones decimales facilita hacer las preguntas, y contestarlas; de hecho, un propósito de la situación es poner en evidencia que es más fácil operar —comparar, sumar y restar— con fracciones decimales que con fracciones no decimales.
- El reto de atrapar un número escondido, o acotarlo en un intervalo lo más pequeño posible, requiere utilizar varios conocimientos (noción de densidad, habilidad para obtener fracciones equivalentes y para restar fracciones). Al jugar, esos conocimientos se practican pero, a diferencia de otros juegos, para empezar este, es necesario tener ciertos conocimientos, en particular, es necesario saber comparar fracciones con distintos denominadores.
- Se aprende a hacer mejores preguntas al ver las jugadas de los otros, al revisar el conjunto de preguntas y recibir críticas.
- La actividad favorece desarrollar una estrategia para optimizar el resultado de las preguntas: ir dividiendo el rango aproximadamen-

te a la mitad. A continuación, se muestra un ejemplo en el que aún no se usan fracciones decimales. Cabe observar que muy pronto se vuelve difícil formular las preguntas y contestarlas.

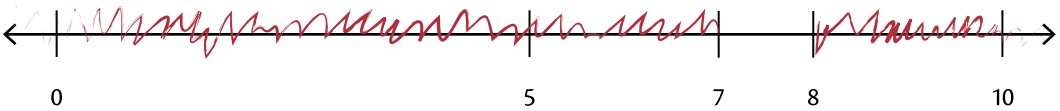
Pregunta 1: ¿Es mayor que 5? Sí



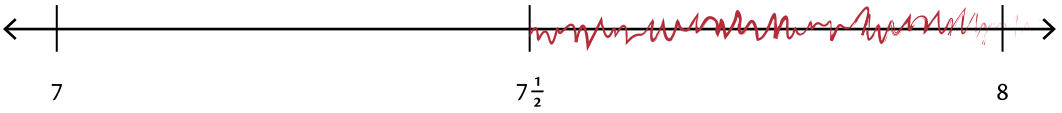
Pregunta 2: ¿Es mayor que 7? Sí



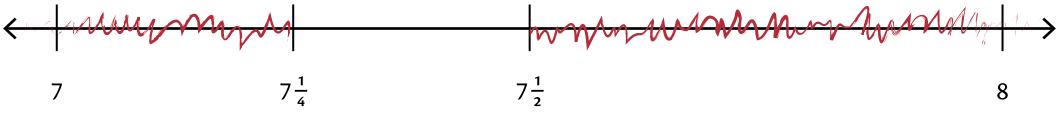
Pregunta 3: ¿Es mayor que 8? No



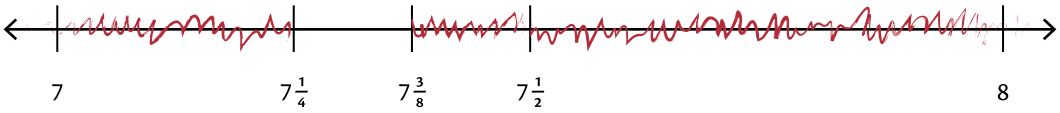
Pregunta 4: ¿Es mayor que $7\frac{1}{2}$? No
Se trazó una nueva recta, ampliando el rango 7-8:



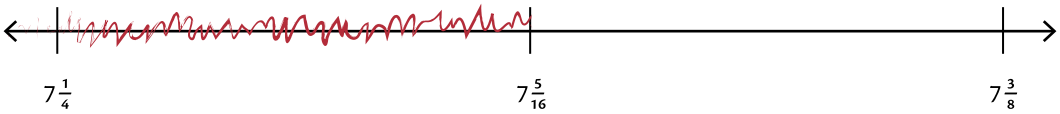
Pregunta 5: ¿Es mayor que $7\frac{1}{4}$? Sí



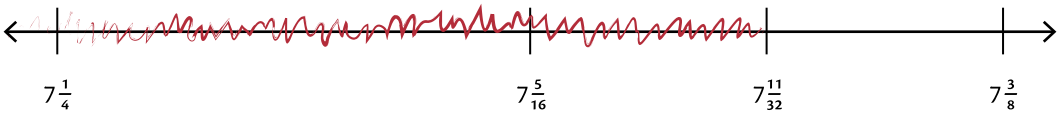
Pregunta 6: ¿Es mayor que $7\frac{3}{8}$? No



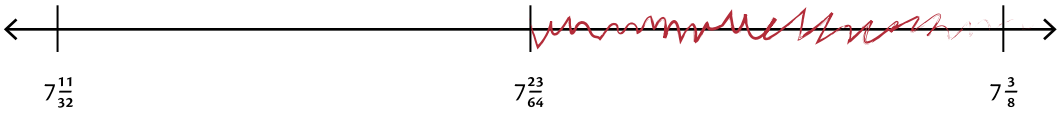
Pregunta 7: ¿Es mayor que $7\frac{5}{16}$? Sí
Se trazó una nueva recta, ampliando el rango $7\frac{1}{4} - 7\frac{3}{8}$:



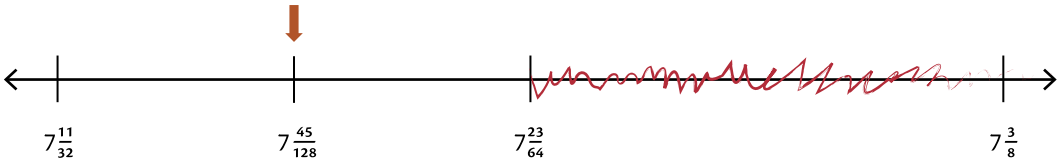
Pregunta 8; ¿Es mayor que $7\frac{11}{32}$? Sí



Pregunta 9 ¿Es mayor que $7\frac{23}{64}$? No
Se trazó una nueva recta, ampliando el rango $7\frac{11}{32} - 7\frac{3}{8}$



Pregunta 10 ¿La fracción es $7\frac{45}{128}$?



La fracción es $7\frac{5}{14}$, la diferencia fue de apenas poco más de 5 milésimos!

- Otras características: la manera de validar es social, es decir, para saber si una pregunta es correcta y también la respuesta, se requiere de la participación de los jugadores. Cuando no se usan decimales, muy pronto los cálculos se vuelven complejos y las probabilidades de errores son altas.

Actividad 2.9
Errores en el paso de la escritura fraccionaria a la escritura con punto decimal

Error 1. La respuesta tiene una parte válida, pues ubica a los 45 décimos en la columna de los décimos. Pero con ello, incumple una regla básica del sistema decimal de numeración: no puede haber dos cifras en un casillero. En cada casillero (en realidad se llama «orden»[31]), puede haber de 0 a 9 unidades, y no 10, ni más de 10 pues con 10 se forma una unidad del orden siguiente. Entonces, no se puede poner el 45 en la columna de los décimos. 45 décimos es 4 unidades y $\frac{5}{10}$.

$$\frac{45}{10} = 4\,\frac{5}{10} = 4.5$$

Error 2. El alumno contesta bien la primera parte: «$\frac{9}{1000}$ son 9 milésimos (pone un 9 en la columna de los milésimos y cero en las demás)», pero al escribir el número en notación decimal en la última columna, en lugar de limitarse a transcribir el numeral que se formó en la tabla (0.009), escribe 0.9.

Se observa que hizo lo mismo en los renglones anteriores.

Pareciera que infirió, del primer renglón, una regla incorrecta. Se pone cero, punto y el numerador de la fracción.

Es decir, al menos hasta ese momento, no fue posible trasmitirle la manera en que funciona la tabla.

Actividad 2.11
Avanza, pero no rebases

Primera parte: a jugar

El juego podría haber continuado así, por ejemplo:

Jugador A	Jugador B
100 + 50 = 150	200 – 40 = 160
150 + 9 = 159	160 – 0.5= 159.5
159 + 0.25 = 159.25	159.5 – 0.2 = 159.3
159.25 + 0.1 = 159.35	

El jugador A puso un número mayor que el jugador B, con lo cual perdió la partida.

Segunda parte: analizar

Para jugar, los alumnos, deben ubicar números naturales y decimales en la recta. Al jugar, pueden descubrir y poner en práctica, la noción de densidad de los números decimales: dados dos números, siempre existe un tercero entre los dos.

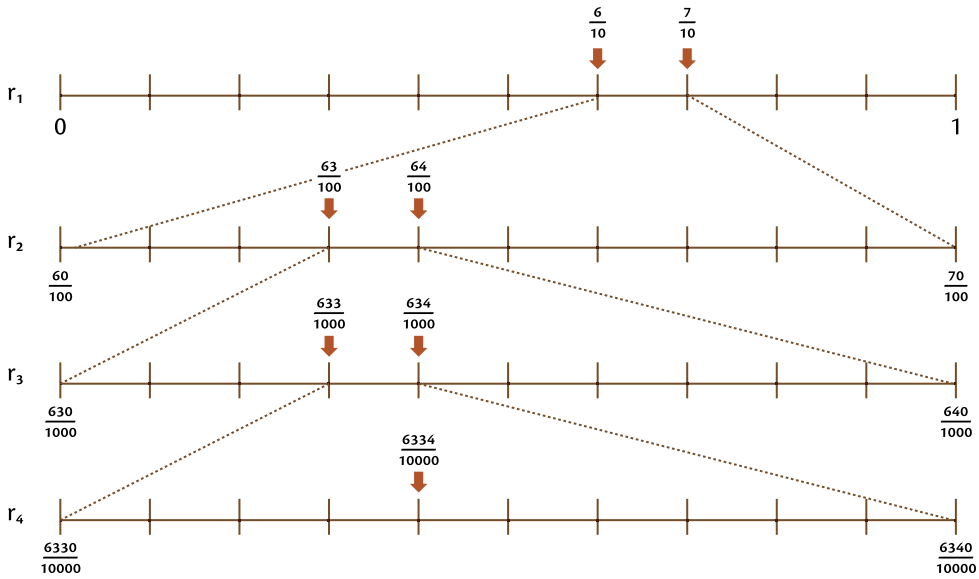
Actividad 2.12
Ubicar números entre otros dos

Inciso a

Una forma de encontrar una fracción entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ consiste en hallar fracciones equivalentes con denominador común, de manera que los numeradores no sean números consecutivos, por ejemplo, $\frac{6}{10}$ y $\frac{8}{10}$, entre las cuales está $\frac{7}{10}$.

La misma idea funciona, y de manera mucho más fácil, para 0.25 y 0.26. Esos números se pueden expresar: 0.250 y 0.260, entre los cuales está, por ejemplo, 0.251

Inciso b



Actividad 2.13
Conocimientos que se esconden detrás de los errores

Inciso a

- El error vi) probablemente es un error de distracción en la aplicación de un algoritmo.
- El error iii) proviene de una confusión de términos, entre «milésimos» y «miles».
- El error i) y también ii) probablemente son consecuencia de transportar a los decimales, criterios válidos para comparar números

naturales: en el caso i) entre más cifras tiene un número, mayor es, y en el caso ii) el cero a la izquierda no vale.

- El error iv) viene de tratar la parte no entera del número (a la derecha del punto) como si fuera independiente de la parte entera. No se considera que 10 décimos forman un entero.
- El error v) viene también de aplicar una propiedad de la multiplicación que solamente es válida en los naturales (la multiplicación agranda).

Inciso b

Es probable que estos errores se deben a distracciones, como olvidar «llevar uno» al hacer una suma, o confusiones menores, como confundir la palabras «miles» y «milésimos». En cambio, los demás errores tal vez son consecuencia de una incomprensión de algún aspecto conceptual del número decimal, por ejemplo, considerar que la multiplicación siempre agranda…

Actividad 2.14
Errores que podrían provenir de obstáculos epistemológicos

Inciso a

Al menos los errores *iii* y *vi* no son de origen epistemológico. Los errores *i* y también *ii* probablemente lo son, pues son consecuencia de trasportar a los decimales criterios válidos para comparar números naturales.

Inciso b

Hay numerosos ejemplos de propiedades que se cumplen cuando se trabaja en el conjunto de los números naturales, pero que, al pasar al conjunto de los números racionales, se vuelven falsas, por ejemplo:

los números tienen sucesores; la multiplicación agranda, la división achica; entre más cifras tiene un número, mayor es.

Inciso c

Algunas actividades que pueden ayudar a cuestionar que entre más cifras tiene un decimal, más grande es (por ejemplo, cuestionar que 0.19 es mayor que 0.2) son las que consisten en comparar medidas de longitud y de área en el nivel numérico y luego verificar (como las actividades 2.1 y 2.4), y también las de cambiar de representación (la actividad 2.2).

Actividad 2.15
Errores que podrían provenir de obstáculos didácticos

Una manera de representar las fracciones que fue usual en México en los años 60 y que hoy en día sabemos que es inadecuada, consistía en representar al numerador y al denominador con dos colecciones de objetos, como la siguiente:

$\frac{3}{4}$:

Numerador

Denominador

¿Por qué es inadecuada? Por una parte, favorece ver a la fracción como dos números naturales en lugar de como un solo número. En segundo lugar, no se ve en qué puede ayudar, para qué puede servir.

Por otra parte, errores que originalmente son de tipo epistemológico, pueden verse reforzados por decisiones didácticas inadecuadas. Por ejemplo, trabajar mucho tiempo con números decimales con dos cifras a la derecha del punto, refuerza la idea de que un decimal tiene sucesor (por ejemplo, el de 0.24 es 0.25, etc.).

Actividad 2.16
¿ $\frac{3}{15}$ es equivalente a una fracción decimal?

Inciso a

- $\frac{1}{3}$ no es una fracción decimal pues es irreductible y 3 es un factor del denominador.
- $\frac{3}{8}$ sí es una fracción decimal. $8 = 2^3$, $8 \times 5^3 = 1000$ $\frac{3}{8} \times \frac{125}{125} = \frac{375}{1000}$.
- $\frac{11}{15} = \frac{11}{5 \times 3}$, no es decimal, pues es irreductible y 3 es un factor del denominador.
- $\frac{3}{15} = \frac{3}{5 \times 3} = \frac{1}{5} = \frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{2}{10}$, es decimal.
- $\frac{13}{768}$ No es una fracción decimal, hay un 3 en el denominador ($768 = 2^8 \times 3$).

Actividad 2.17
Fracciones decimales (o equivalentes a decimales) y fracciones no decimales

Inciso a

La fracción $\frac{3}{48}$ sí es equivalente a una fracción decimal, pues el denominador es $2^4 \times 3$, pero el factor 3, se simplifica con el denominador, entonces:

$$\frac{3}{48} = \frac{3}{3 \times 2^4} = \frac{1}{2^4} \times \frac{5^4}{5^4} = \frac{625}{10000}$$

Con respecto a las demás:

$\frac{1}{8} = 0.125$

$\frac{10}{12} = 0.8333\ldots$

$\frac{11}{125} = 0.088$

$\frac{25}{32} = 0.78125$

$\frac{25}{30} = 0.8333\ldots$

Inciso b

Cuando el alumno multiplica el cociente de 7 ÷ 3, por 3, no obtiene de nuevo 7 porque el cociente de 7 ÷ 3, expresado con decimales, no es exacto: 2.333…

Si se toma el cociente expresado con fracción, sí se obtiene de nuevo del 7:

$$7 \div 3 = \frac{7}{3} \text{ y } \frac{7}{3} \times 3 = 7$$

Cabe observar que el único número que multiplicado por 3 da por resultado 7 es la fracción $\frac{7}{3}$ la cual no tiene una representación decimal.

Actividad 2.18
De la expresión con números decimales a la expresión con fracciones

Número decimal	Fracción
$0.\overline{2}$	$\frac{2}{9}$
$0.\overline{135}$	$\frac{135}{999} = \frac{45}{333}$
$0.\overline{09}$	$\frac{9}{99} = \frac{1}{11}$
$25.08\overline{181}$	$\frac{24831}{990}$

Notas

1 Ver Block, Mendoza y Ramírez, 2010.
2 Ver Bock, Martínez y Moreno, 2013.
3 Ver Brousseau, 2000.
4 Maestro y Doctor en Educación con especialidad en Educación Matemática, ha sido profesor de educación primaria, de bachillerato y formador de profesores, es autor y coautor de artículos y libros sobre la enseñanza de las matemáticas. Actualmente coordina el *Doctorado en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores* de la Universidad Pedagógica Nacional en la región Noreste de México.
5 Finalmente, está la definición de los números racionales como clases de equivalencia de parejas ordenadas de números enteros, la cual no revisaremos aquí.
6 La denominación de «fracciones comunes» no aporta al concepto de fracción, solo se usa para precisar que se está hablando de fracciones en general, y no a un tipo de fracciones en particular.
7 Tomado de Sensevy, 1996, p. 19.
8 En el capítulo 1 del volumen II, en el tema 4, apartado 1.2, y en el capítulo 2 del volumen II, a lo largo del tema 2.
9 Se llama variable didáctica a «(…) aquellas condiciones que pueden variar a voluntad del docente y que, según los valores que toman, modifican el conocimiento necesario para resolver la situación.» (Fregona y Orús, 2011, p. 30)
10 Tomada de Lamon, 2006, p. 87.
11 Situación tomada de Block, 2007, pp. 66-74.
12 Varios de los ejercicios que se incluyen aquí fueron tomados y adaptados de Block, García y Balbuena, 2018.
13 Para la realización de esta actividad y la siguiente, se contó con la colaboración de Irma Saiz.
14 El libro de texto es argentino y se han respetado las expresiones locales.
15 Tomado de Lamon, 2007, p. 655.

16 Tomado del Instituto Nacional de Formación Docente, 2016, p. 11.
17 Tomado de Nabors, 2003, p. 159.
18 Alumnos de la experiencia «Diario de fracciones», en Sensevy, 1996, pp. 23 y 27.
19 Ejemplos tomados de la Tesis de Elizabeth Antero (2015).
20 R. Duval llama «Registros semióticos» a las representaciones de un concepto matemático que cumplen ciertos requisitos. Sobre el cambio de representación afirma: «La coordinación de varios registros de representación semiótica aparece como fundamental para la aprehensión conceptual de los objetos: es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que sea reconocido en cada una de sus representaciones posibles. Esas son las dos condiciones para que una representación funcione verdaderamente como tal, es decir, para que dé acceso al objeto representado» (1993, p.40). (Traducción del autor)
21 Tomadas de Elizabeth Antero, 2015.
22 Tomadas de Elizabeth Antero, 2015.
23 Se agradecen a Irma Saiz los elementos de respuesta que se proporcionan en el solucionario para esta actividad, así como el contenido del apartado siguiente «Ventajas de relacionar fracciones…».
24 Guy Brousseau, Nadine Brousseau y Virginia Warfield (2004, 2007, 2008 y 2009).
25 Tomado de la tesis de Elizabeth Antero (2015).
26 Adaptación de un juego propuesto por Julia Centeno, 1997, p. 176.
27 Carpenter, 1981, citado por Centeno 1997, p. 136.
28 Traducción del autor
29 Traducción del autor
30 Tratado de matemáticas y geometría escrito por antiguos matemáticos griegos, dirigidos por Euclides alrededor del año de 300 AC.
31 Se llama «orden» a un tipo de agrupamiento: milésimos, centésimos, décimos, unidades, decenas, etc. Un orden aquí corresponde a un casillero.

Bibliografía

Antero, E. (2015). *La construcción de la noción número decimal por estudiantes de primaria: una experiencia de intervención docente.* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero.

Block, D. (2007). Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria. En: *Serie Tesis Maestría DIE* (versión disco compacto). Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV.

Block, D., García, S. y Balbuena, H. (2018). *Matemáticas 1.* (Serie Conecta MÁS. Secundaria). SM de Ediciones, S.A. de C.V.

Block, D., Martínez, P. y Moreno, E. (2013). *Repartir y comparar. La enseñanza de la división entera en la escuela primaria*. (*Colección «Somos Maestr@s» de la Serie «Enseñar y Aprender»*). SM de Ediciones S.A. de C.V.

Block, D., Mendoza, T., y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. (Colección «Somos Maestr@s» de la Serie «Enseñar y Aprender»*). SM de Ediciones S. A. de C.V.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Ed.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 12 (1), 5-38.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, 23 (1), 1-20.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 2: From rationals to decimals. *Journal of Mathematical Behavior*, 26 (4), 281-300.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 3: Rationals and decimals as linear functions. *Journal of Mathematical Behavior,* 27 (3), 153-176.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2009). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 4: Solving, composed mappings and division. *Journal of Mathematical Behavior*, 28 (2), pp. 79-118.

Centeno, J. (1997). Dificultades, errores conflictos y obstáculos. En: *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* (Serie. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje, Vol.5, pp. 135-150). Editorial Síntesis, S.A.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37–65.

Fregona, D. y Orús Baguena, P. (2011). *La noción de medio en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas*. Libros del Zorzal.

Instituto Nacional de Formación Docente (2016). Clase 4. La división en los distintos conjuntos numéricos: el caso de D y Q. (Módulo: Enseñanza de la Aritmética) En: *Especialización docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria.* Ministerio de Educación de la Nación.

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grade* (Vol. 2, pp. 162-181). National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Erlbaum

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester, Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Information Age Publishing.

Nabors, W.K. (2003). From Fractions to proportional reasoning: a cognitive schemes of operation approach, *Journal of Mathematical Behavior*, 22 (2), 133–179.

Saiz, I. y Parra, M. C. (2011). *Hacer Matemática en 6º*. Editorial Estrada.

Saiz, I. y Parra, M. C. (2014). *Hacer Matemática en 5º*. Editorial Estrada.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer Grado*. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Sensevy, G. (1996). Le temps didactique et la durée de l'élève. Étude d'un cas au cours moyen: le journal des fractions. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 16 (1), 7-46.

El autor

David Block Sevilla, investigador SNI III del Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV, durante casi 40 años ha incursionado en diversas líneas de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con el propósito de profundizar en el estudio de nociones específicas, principalmente en la problemática didáctica de las estructuras multiplicativas (la operación de división, la noción de fracción y la noción de razón) en la educación básica.

Su trabajo abarca varias vertientes, entre ellas, el diseño y experimentación de situaciones didácticas, estudios de prácticas de enseñanza en escuelas multigrado y escuelas de organización completa y conocimientos adquiridos fuera de la escuela, en especial con adultos no alfabetizados. A la par del trabajo de investigación, ha participado en numerosos proyectos de desarrollo curricular a nivel nacional: programas y libros para la formación de maestros, materiales de apoyo

para los alumnos, en particular, libros de texto oficiales y evaluación de programas educativos, entre otros.

Con respecto a la formación de recursos humanos, ha dirigido más de 20 tesis de posgrado y ha contribuido en la formación y actualización de profesores y a consolidar cuadros de especialistas en la enseñanza de las matemáticas, varios de ellos con una participación importante en el sector educativo.

Sus líneas de investigación asumen como principal referente teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas, creada originalmente en Francia por el Dr. Brousseau y aportan conocimientos desde una perspectiva epistemológica (problemas vinculados a su construcción), curricular (la lógica de los cambios que han sufrido a lo largo de las reformas a los programas), didáctico (diseño y experimentación de secuencias de situaciones, análisis de procesos de aprendizaje) y sobre las prácticas de enseñanza en el aula.

El autor agradecerá todo comentario que ayude a mejorar esta obra en futuras ediciones. Se puede dirigir a: davidblock54@gmail.com

Taberna Libraria
Editores

MÁS DE UNO, PERO MENOS DE DOS.
LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES Y LOS DECIMALES
EN LA EDUCACIÓN BÁSICA.
de David Block Sevilla,
se terminó de imprimir en el mes de octubre de 2022.
Cuidado de la edición a cargo del autor.
500 ejemplares